الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية **مديرية التربية بولاية تمنراست**

امتحـــان الثلاثي الأول **السنة الدراسية : 2017/2016**

شعبة : الثالثة رياضيات

اختبار في مادة الرياضـــــــــيات	**المـــدة : ثلاثة ساعات و نصف**

التمرين الأول (4 نقاط) :

نعتبر في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $(E)\ :\ y'+3y=2e^{-x}$.

1- عين قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=a.e^{-x}$ حل للمعادلة (E).

2- نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E') : y'+3y=0$ حل المعادلة (E').

3- برهن أن الدالة k هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط اذا كانت الدالة $(k-g)$ هي حل للمعادلة (E') .

ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

4- عين حلا خاصا k للمعادلة (E) بحيث يكون معامل توجيه المماس للمنحنى لممثل للدالة k في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4 .

التمرين الثاني (4 نقاط) :

1- أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 7

ب- عين باقي قسمة كل من العددين 5^{1438} و 5^{2017} على 7 .

2- أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7.

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+5n$ قابلا للقسمة على 7 .

4- n عدد طبيعي ، نضع : $_n=n+2\quad,\ \sim_n=n^2+n$

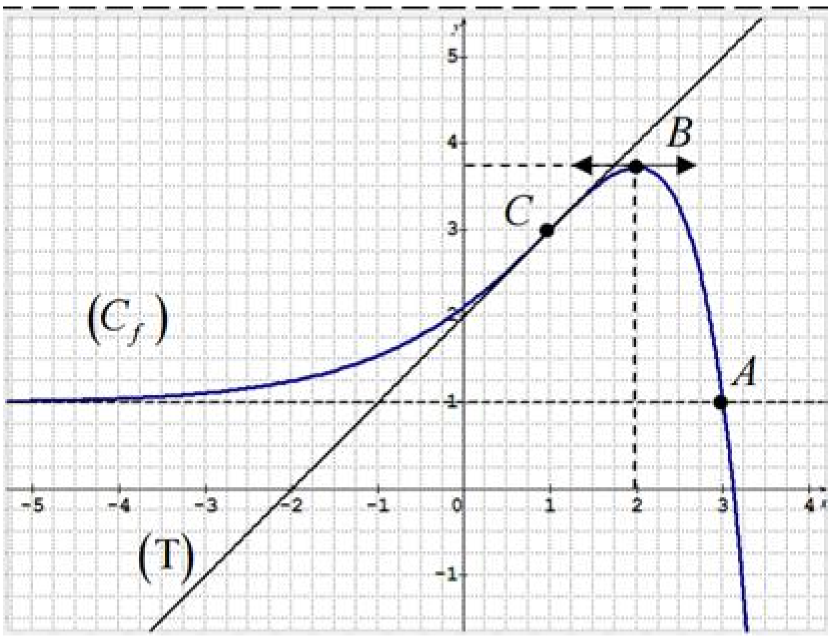
أ. تحقق أن : $n\ _n-\sim_n=n$

ب. أثبت أن : $PGCD(\ _n\ ;\ \sim_n)=PGCD(\ _n\ ;\ n)$.

ج. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\ _n\ ;\ \sim_n)$.

التمرين الثالث (5 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرفة بتمثيلها البياني (C_f) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ حيث $B(2;e+1)$ و $A(3;1)$ و $C(1;3)$ من البيان أجب عن الأسئلة التالية :



1) عين كلا من $f'(2)$ و $f'(1)$ و $f''(1)$.

2) أكتب معادلة المماس (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة C .

3) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~حيث $]3;+\infty[$ ∋ ~ ثم أستنتج اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب-شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

5) لتكن h الدالة المعرفة على $]-\infty\,;\,$~$[$ كما يلى $h(x)=f(x)-\ln[f(x)]$.

أ- أعط عبارة $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين الرابع (7 نقاط) :

g دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}} & : \ x \succ 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أدرس استمرارية الدالة g عند 0

2. تحقق انه من اجل كل x من المجال $]0\,;+\infty[$ فإن $\dfrac{g(x)}{x}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

3. أدرس قابلية اشتقاق g عند 0 و فسر النتيجة هندسيا

4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$

5. بين ان $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)-x}{\ln(x)}=1$ (لاحظ أن $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$)

ثم استنتج ان $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-x]=+\infty$.

6. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

7. أحسب $g(1)\ ;\ g(2)\ ;\ g(3)$ ثم أنشئ (C_g).

" تستطيع أن تنجح في حياتك ولو كان الناس يعتقدون أنك غير ناجح ولكن لن تنجح أبدا إذا كانت تعتقد في نفسك غير ناجح "

بالتوفيق و النجاح في امتحان البكالوريا 2017

ثـانوية الشيخ أمود تمنـراست

تصحيح اختبار في مادة الرياضـــــــيات

التمرين الأول (4 نقاط) :

1-تعين قيمة العدد الحقيقي a : : $g(x)=a.e^{-x}$ و $g'(x)=-a.e^{-x}$ و لدينا

$g'(x)+3g(x)=-a.e^{-x}+3ae^{-x}$ أي $g'(x)+3g(x)=2ae^{-x}$ حتى تكون g حل للمعادلة (E) يكافئ

ان $2ae^{-x}=2e^{-x}$ أي ان $a=1$.

2- : $(E'):y'+3y=0$ حلها $y=Ce^{-3x}$ حيث C ثابت حقيقي .

3- k هي حل للمعادلة (E) يكافئ $k'(x)+3k(x)=2e^{-x}$ و لدينا $g'(x)+3g(x)=2e^{-x}$ بالطرح نجد أن

$g'(x)-k'(x)+3g(x)-3k(x)=0$ أي ان $(g-k)'(x)+3(g-k)(x)=0$ و منه الدالة $(k-g)$ هي

حل للمعادلة (E') .

إذن حلول المعادلة (E) هي k حيث $k(x)-g(x)=C.e^{-3x}$ و منه $k(x)=g(x)+C.e^{-3x}$ أي أن

$k(x)=2e^{-x}+C.e^{-3x}$ و C ثابت حقيقي.

4- معامل توجيهمنحنى الممثل للدالة k في النقطة ذات الفاصلة 0 يساوي -4 يعني أن

$k'(0)=-4$ نحسب المشتقة $k'(x)=-2e^{-x}-3C.e^{-3x}$ و منه $k'(0)=-2-3C$ نساويها بـــــــ -4

نجد ان $-2-3C=-4$ يكافئ $C=-\frac{2}{3}$ **و منه** $k(x)=-2e^{-x}+2.e^{-3x}$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

1-أ- دراسة **بواقي قسمة** 5^n على 7 حسب قيم العدد الطبيعي n

$5^0\equiv1[7]$ و $5^1\equiv5[7]$ و $5^2\equiv4[7]$ و $5^3\equiv6[7]$ و $5^4\equiv2[7]$ و $5^5\equiv3[7]$ و $5^6\equiv1[7]$

نلاحظ أن بواقي قسمة 5^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها 6 و منه

باقي قسمة 5^n على 7

لما $n=6k$ هو 1 **و لما** $n=6k+1$ هو 5 **و لما** $n=6k+2$ هو 4 **و لما**

$n=6k+3$ هو 6 **و لما** $n=6k+4$ هو 2 **و لما** $n=6k+5$ هو 3 .حيث k عدد طبيعي .

ب-لدينا $1438=6(239)+4$ هو من الشكل $n=6k+4$ إذن **باقي قسمة** 5^{1438} على 7 هو 2 .

و لدينا $2017=6(336)+1$ هو من الشكل $n=6k+1$ إذن **باقي قسمة** 5^{2017} على 7 هو 5 .

2- إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n **العدد** $26^{6n+5}+2\times47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 لدينا $26\equiv5[7]$

بالرفع الى قوى $6n+5$ **نجد** $26^{6n+5}\equiv5^{6n+5}[7]$ **و مماسبق نستنتج ان** $5^{6n+5}\equiv3[7]$ و منه نجد

$26^{6n+5}\equiv 3[7]$.....(1) و لدينا $47\equiv 5[7]$ بالرفع الى قوى $12n+2$ نجد $47^{12n+2}\equiv 5^{12n+2}[7]$ و مماسبق
نستنتج ان $5^{6(2n)+2}\equiv 4[7]$ و منه $47^{12n+2}\equiv 4[7]$ بالضرب في 2 نجد $2\times 47^{12n+2}\equiv 8[7]$ و $8\equiv 1[7]$ إذن
$2\times 47^{12n+2}\equiv 1[7]$...(2) بجمع (1) و (2) نجد $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}\equiv 4[7]$ بإضافة 3 نجد
$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 7[7]$ و $7\equiv 0[7]$ و منه $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3\equiv 0[7]$ إذن
$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3$ يقبل القسمة على 7 .

3- لدينا مما سبق $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}\equiv 4[7]$ بإضافة $5n$ نجد $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 4+5n[7]$
العدد $26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n$ قابلا للقسمة على 7 يعني ان $4+5n\equiv 0[7]$ أي ان $5n\equiv -3[7]$
يكافئ $5n\equiv 4[7]$ بالضرب في 3 نجد $15n\equiv 12[7]$ أي ان $n\equiv 5[7]$ (لان $15\equiv 1[7]$ و $12\equiv 5[7]$)
و منه قيم n المطلوبة هي $n=7k+5\ :\ k\in Z$.

4- أ. التحقق أن : $n\beta_n-\alpha_n=n$ لدينا $\begin{cases}\beta_n=n^2+2n\\ \alpha_n=n^2+n\end{cases}$ بالطرح نجد $n\beta_n-\alpha_n=n$

ب. إثبات أن : $PGCD(\beta_n;\alpha_n)=PGCD(\beta_n;n)$ نضع
$PGCD(\beta_n;n)=d'$, $PGCD(\beta_n;\alpha_n)=d$ لدينا d قاسم α_n , β_n فهو قاسم للعدد
$n\beta_n-\alpha_n$ و منه فهو قاسم للعدد n إذن d قاسم للعددين n و β_n و منه d قاسم لـــــ d' .... (3)
$PGCD(\beta_n;n)=d'$ يعني أن d' قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $n(n+1)$ و منه d'
قاسم للعدد α_n و منه d' قاسم للعددين α_n و β_n إذن d' قاسم للعدد d .....(4)
من (3) و (4) نجد أن $d=d'$ أي ان $PGCD(\beta_n;\alpha_n)=PGCD(\beta_n;n)$.

ج. $PGCD(\beta_n;\alpha_n)$ قاسم للعددين n و β_n فهو قاسم للعدد $\beta_n-n=n+2-n=2$ القيم الممكنة
للعدد $PGCD(\beta_n;\alpha_n)$ هي قواسم 2 أي 1 و 2.

التمرين الثالث (5 نقاط) :

1- تعيين كلا من $f'(2)=0$ و $f'(1)=1$ و $f''(1)=0$.
2- كتابة معادلة المماس (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة C هي $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و لدينا $f(1)=3$
بالتعويض نجد $y=x+2$.
3- أ-نلاحظ أن المنحنى دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال
$]3;+\infty[$
جدول إشارة $f(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
اشارة $f(x)$		$+$	0	-	

ب-جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$e+1$	$\searrow$	$-\infty$

4- المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m للعدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$:
حل المعادلة هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=f(m)$

المناقشة :

لما $m\in]-\infty;2[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.
لما $m=2$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة منه المعادلة تقبل حل وحيد.
لما $m\in]2;3[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان و منه المعادلة تقبل حلين.
لما $m\in[3;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة منه المعادلة تقبل حل وحيد .

5- أ-عبارة $h'(x)$ **بدلالة** $f'(x)$ و $f(x)$: $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

ب-**استنتاج** اتجاه تغير الدالة h لدينا $h'(x)=f'(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ يكافئ $h'(x)=f'(x)\left[\dfrac{f(x)-1}{f(x)}\right]$

x	$-\infty$		2		3		~
اشارة $f'(x)$		+	0	-		-	
اشارة $f(x)-1$		+		+	0	-	
اشارة $h'(x)$		+	0	-	0	+	

و منه h متزايدة على المجالين $[3;\sim[$ و $]-\infty;2]$ **و متناقصة على المجال** $[2;3]$.
شكل جدول تغيراتها

x	$-\infty$		2		3		~
$h(x)$	1	$\nearrow$	$e+1-\ln(e+1)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

التمرين الرابع (7 نقط) :

g دالة عددية معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} g(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}} & : x\succ 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. دراسة استمرارية الدالة g **عند** 0 لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} g(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}}=0$ **لأن**
$\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}\ln(x)=-\infty$.

2. لدينا $g(x)=e^{\frac{(x+1)\ln(x)}{x}}$ يكافئ $g(x)=e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}}=e^{\ln(x)}.e^{\frac{\ln(x)}{x}}=xe^{\frac{\ln(x)}{x}}$ و منه **من اجل كل** x **من المجال** $]0;+\infty[$: $\dfrac{g(x)}{x}=e^{\frac{\ln(x)}{x}}$.

3. دراسة قابلية اشتقاق g عند 0 لدينا $\lim_{h \xrightarrow{>} 0} e^{\frac{\ln(h)}{h}} = 0$ لأن $\lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(h)}{h} = -\infty$ و

$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ و منه الدالة g قابلة للاشتقاق عند 0.

تفسرها هندسيا ان المنحنى (C_g) يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4. حساب النهاية $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

5. تبيين ان $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)-x}{\ln(x)} = 1$ لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}}-1}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\frac{g(x)}{x}-1\right)}{\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)-x}{\ln(x)}$ بوضع

$t = \frac{\ln(x)}{x}$ لما x يؤول الى $+\infty$ فإن t يؤول 0 و منه $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{t}-1}{t} = 1$

استنتاج ان : $\lim_{x \to +\infty} [g(x)-x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x) \times \frac{g(x)-x}{\ln(x)}\right] = \lim_{x \to +\infty} [\ln(x) \times 1] = +\infty$.

6. دراسة تغيرات الدالة g

المشتقة : $g'(x) = \left[xe^{\frac{\ln(x)}{x}}\right]' = \left[e^{\frac{\ln(x)}{x}} + x\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)e^{\frac{\ln(x)}{x}}\right] = \left[\frac{x+1-\ln(x)}{x}\right]e^{\frac{\ln(x)}{x}}$ اشارة

المشتقة متعلقة بـ $x+1-\ln(x)$ نضع $h(x) = x+1-\ln(x)$ ندرس تغيرات h المشتقة

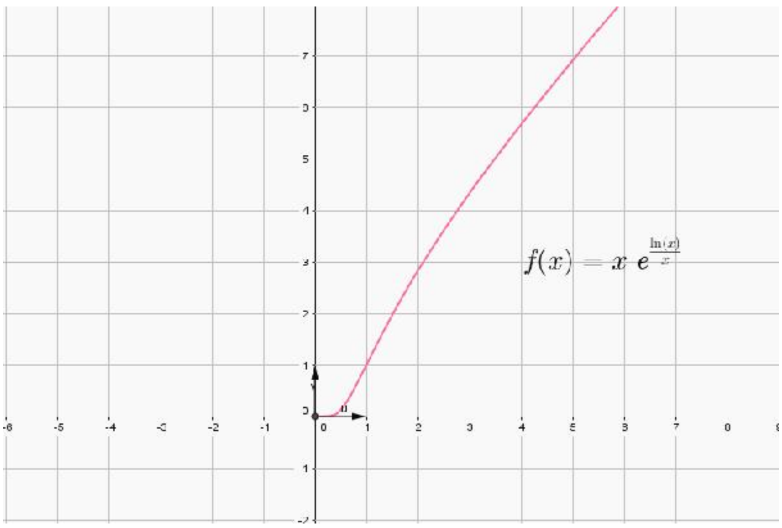
$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ موجبة على المجال $]1;+\infty[$ وسالبة على المجال $]0;1]$ إذن h متزايدة على

$]1;+\infty[$ و متناقصة $]0;1]$ إذن فهي تقبل قيمة حدية صغرى هي $h(1) = 2$ و منه نستنتج ان h موجبة على

مجال تعريفها و منه $g'(x)$ موجبة إذن الدالة g متزايدة على $]0;+\infty[$

جدول تغيراتها

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$



7. حساب $g(1) = 1$; $g(2) = 2e^{\frac{\ln 2}{2}} = 2\sqrt{2}$

$g(3) = 3\sqrt[3]{3}$

رسم (C_g):