الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط) :

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير

1) الحل الخاص f للمعادلة التفاضلية $y'+2y-4=0$ و الذي يحقق $f'(0)=3$

معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{3}{2}e^{-2x}+2$

2) مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $-(\log(x))^2-(\log(x))+2=0$ في المجال $]0;+\infty[$

هي $S=\{1;-2\}$.

3) (S) سطح كرة معادلته $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ و (p) المستوي ذو المعادلة $x+y+z-1=0$.

(p) و (S) يتقاطعان وفق دائرة .

4) $G;C;B;A$ أربعة نقط من المستوي حيث $z_B=2+i$; $z_C=2-i$; $z_G=1-i$ و G مرجح الجملة

$\{(C;2);(B;-2);(A;1)\}$

لاحقة النقطة A هي $z_A=-1-i$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

نعتبر النقط A , B ; C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$; $z_B=-1-i\sqrt{3}$; $z_C=2$.

1) بين أن $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعية المثلث ABC

2) عين مركز و نصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC ثم أنشئ (C).

3) لتكن (Γ)مجموعة النقط Mمن المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $2(z+\overline{z})+\overline{z}.z=0$.

حدد طبيعة المجموعة (Γ) ثم تحقق أن النقطتان A , B تنتميان إلى (Γ).

4) ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ)بين أن صورة النقطة B بالدوران R هي النقطة C.

ب)عين z_D لاحقة D صورة C بالدوران R ثم بين أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

التمرين الثالث (5 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i}\ ;\overrightarrow{j}\ ;\overrightarrow{k}\right)$ نعتبر النقط :

$A(-1\ ;\ 1;3)$, $B(1\ ;\ 0;-1)$; $C(\ 2;-1\ ;1)$ و $D(2;0;-1)$ والمستوي (P) ذو معادلته الديكارتية $2y+z+1=0$.

و ليكن (Δ) مستقيم المُعرف بالتمثيل الوسيطي التالي $\beta \in R$: $\begin{cases} x=-1 \\ y=2+\beta \\ z=1-2\beta \end{cases}$.

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CB) ثم تحقق أن المستقيم (CB) محتوى في المستوي (P).
2) بين أن المستقيمان (CB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .
3) أحسب المسافة بين A و المستوي (p) .
4) بين أن D نقطة من (p) و أن المثلث BCD قائم .
5) أحسب مساحة رباعي الوجه $ABCD$.

التمرين الرابع (7 نقاط)

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\overrightarrow{i}\ ;\overrightarrow{j}\right)$. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=x-\frac{1}{1+e^{x}} .$$

(C) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- بين أن : $f'(x)>0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$.ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3- أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب $y=x$ و $y=x-1$.
ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيمين (Δ) و (Δ').

4- بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<\frac{1}{2}$ ثم تحقق أن : $e^{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}$.

5- أثبت أن النقطة $I\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

6- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C)في النقطة ذات الفاصلة $x=0$ثم أنشئ (C) و (Δ) و(Δ'). (نأخذ $\alpha\approx 0.4$).

7- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+\ln(m)$.

الحل المفصل للموضوع الثاني

التمرين الأول :

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير

1) الحل الخاص f **للمعادلة التفاضلية** $y'+2y-4=0$ **و الذي يحقق** $f'(0)=3$

معرفة على $\mathbb{R}$ **بـ :** $f(x)=\frac{3}{2}e^{-2x}+2$

خطأ : بالفعل $y'+2y-4=0$ معناه $y'=-2y+4$

المعادلة التفاضلية $y'=-2y+4$ من الشكل $y'=ay+b$. حلول هذه المعادلة التفاضلية على $\mathbb{R}$ هي الدوال y

المعرفة بـ : $y(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث C ثابت كيفي .

هنا $a=-2$ و $b=4$. حلول المعادلة التفاضلية على $\mathbb{R}$ هي إذن الدوال y المعرفة بـ :

$y(x)=Ce^{-2x}-\frac{4}{-2}$ أي $y(x)=Ce^{-2x}+2$ حيث C ثابت كيفي .

ليكن f حل المعادلة على $\mathbb{R}$ والذي يحقق $f'(0)=3$.

لدينا $f'(x)=-2Ce^{-2x}$

إذن : $f'(0)=3$ معناه $-2Ce^{-2(0)}=3$ أي $Ce^{0}=-\frac{3}{2}$ ومنه $C=-\frac{3}{2}$

إذن : $\boldsymbol{f(x)=-\frac{3}{2}e^{-2x}+2}$.

/2 مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول x **التالية** $-(\log(x))^2-(\log(x))+2=0$ **في المجال** $]0;+\infty[$

هي $S=\{1;-2\}$ **.**

خطأ : نضع $\log x=X$ ومنه المعادلة تكتب : $-X^2-X+2=0$ وحلي المعادلة هما : 1 و -2 .

$X=1$ معناه $\log x=1$ أي $\log x=\log 10$ أي $x=10$.

$X=-2$ معناه $\log x=-2$ أي $\log x=\log 10^{-2}$ أي $x=10^{-2}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $-(\log(x))^2-(\log(x))+2=0$ **هي** $\boldsymbol{S=\{10;10^{-2}\}}$

/3 (S) **سطح كرة معادلته** $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ **و** (p) **المستوي ذو المعادلة** $x+y+z-1=0$ **.**

(S) **و** (p) **يتقاطعان وفق دائرة .**

صحيح : معادلة (S) تكتب : $(x-1)^2+y^2+z^2=4$ إذن مركز (S) هو $I(1;0;0)$ ونصف قطر (S) هو 2

لدينا : $d(I;(P))=\frac{|x_I+y_I+z_I-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0$ و $2>0$ إذن : (p) و (S) **يتقاطعان وفق دائرة .**

/4 A ; B ; C ; G **أربعة نقط من المستوي حيث** $z_B=2+i$; $z_C=2-i$; $z_G=1-i$ **و** G **مرجح الجملة**

$\{(C;2);(B;-2);(A;1)\}$ **لاحقة النقطة** A **هي** $z_A=-1-i$ **.**

خطأ : بالفعل لدينا $z_G=z_A-2z_B+2z_C$ ومنه :

$$z_A=z_G+2z_B-2z_C=1-i+2(2+i)-2(2-i)=1-i+4+2i-4+2i$$

$$z_A=1+3i$$

التمرين الثاني :

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$.

نعتبر النقط A , B ; C التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+i\sqrt{3}$; $z_B=-1-i\sqrt{3}$; $z_C=2$.

1) تبيين أن $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ **ثم استنتاج طبيعة المثلث** ABC

لدينا : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2}=\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}$ و : $\left|\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\right|=\dfrac{|-3-i\sqrt{3}|}{|-3+i\sqrt{3}|}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}=1$

و $\arg\left(\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\right)=\arg(-3-i\sqrt{3})-\arg(-3-i\sqrt{3})=\dfrac{7\pi}{6}-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ إذن : $\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

طبيعة المثلث ABC **:**

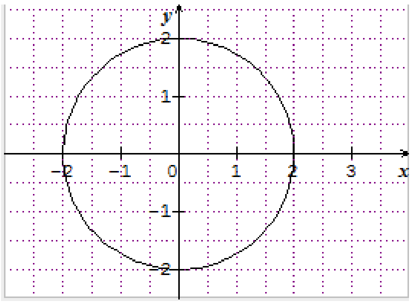
لدينا $\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|=1$ إذن $\dfrac{CB}{CA}=1$ أي $CB=CA$ و $arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ إذن : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

المثلث ABC متقايس الأضلاع .

2)تعيين مركز و نصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC ثم أنشاء (C).

لدينا : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$ إذن : $OA=OB=OC=2$. النقط A ، B و C تنتمي إذن إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 .

- إنشاء الدائرة (C) :



3) **لتكن** (Γ)**مجموعة النقط** M **من المستوي ذات اللاحقة** z

و التي تحقق $2\left(z+\overline{z}\right)+\overline{z}.z=0$

تحديد طبيعة المجموعة (Γ) ثم التحقق أن النقطتان A , B تنتميان إلى (Γ).

$M\in(\Gamma)$ معناه $2\left(z+\overline{z}\right)+\overline{z}.z=0$ أي $2(2x)+x^2+y^2=0$ أي : $(x+2)^2+y^2=4$

إذن (Γ) هي الدائرة التي مركزها $I(-2;0)$ ونصف قطرها 2 .

- التحقق أن النقطتان A , B تنتميان إلى (Γ) : $IA=|z_A-z_I|=\left|-1+i\sqrt{3}-(-2)\right|=\left|1+i\sqrt{3}\right|=2$

وبطريقة مماثلة نجد أن $IB=2$ إذن النقطتان A , B تنتميان إلى (Γ)

ملاحظة : يمكن التعويض بإحداثيي A , B في معادلة (Γ)

4) ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

أ) تبيين أن صور ة النقطة B بالدوران R هي النقطة C.

لتكن B' صورة B بالدوران R :

$B'=R(B)$ معناه $z_{B'}-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)$ أي $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B-z_A)+z_A$

أي $z_{B'}=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-2i\sqrt{3}\right)+\left(-1+i\sqrt{3}\right)=-i\sqrt{3}+3-1+i\sqrt{3}=2$ **إذن :** $\boldsymbol{z_{B'}=z_C}$

ب) تعيين z_D لاحقة D صورة C بالدوران R ثم تبيين أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

$D=R(C)$ معناه $z_D-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_A)$ أي $z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C-z_A)+z_A=2+2i\sqrt{3}$.

- لدينا : $z_B-z_A=z_C-z_D=-2i\sqrt{3}$ أي $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ومنه **الرباعي** $ABCD$ **متوازي أضلاع.**

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i}\ ;\overrightarrow{j}\ ;\overrightarrow{k}\right)$ **نعتبر النقط :**

$A(-1\ ;\ 1;3)$, $B(1\ ;0;-1)$; $C(2;-1\ ;1)$ و $D(2;0;-1)$ **والمستوي** (P) **ذو معادلته الديكارتية** $2y+z+1=0$

و ليكن (Δ) **مستقيم المُعرف بالتمثيل الوسيطي التالي** $\beta\in R$: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$.

1) تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CB) **ثم التحقق أن المستقيم** (CB) **محتوى في المستوي** (P)**.**

شعاع توجيه لـ (CB) هو $\overrightarrow{CB}(-1\ ;1\ ;\ -2)$ إذن : $t\in R$: (CB): $\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=-1-2t\end{cases}$ (يمكن استعمال النقطة C)

- التحقق أن المستقيم (CB) محتوى في المستوي (P). لدينا : $2(t)+(-1-2t)+1=2t-2t-1+1=0$

إذن : (CB) محتوى في (P) .

2) تبيين أن المستقيمان (CB) **و** (Δ) **ليسا من نفس المستوي .**

نحل الجملة : $\begin{cases}1-t=-1..............(1)\\t=2+\beta...............(2)\\-1-2t=1-2\beta.....(3)\end{cases}$. من (1) نجد $t=2$.بالتعويض في (2) نجد $\beta=0$ وبالتعويض في (3)

نجد $\beta=3$ إذن الجملة ليس لها حلا وبالتالي **المستقيمان** (CB) **و** (Δ) **ليسا من نفس المستوي .**

3) حساب المسافة بين A **و المستوي** (p) **.**

لدينا : $d(A;(P))=\frac{|2y_A+z_A+1|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}}=\frac{|2+3+1|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ أي $\boldsymbol{d(A;(P))=\frac{6\sqrt{5}}{5}}$.

4) تبيين أن D **نقطة من** (p) **و أن المثلث** BCD **قائم .**

لدينا : $2y_D+z_D+1=2(0)+(-1)+1=0-1+1=0$ إذن D **نقطة من** (p) **.**

ولدينا : $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$ ؛ $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$ و $\overrightarrow{CD}(0;1;-2)$

ومنه $\boldsymbol{BC^2}=1^2+(-1)^2+2^2=\boldsymbol{6}$ ؛ $\boldsymbol{BD^2}=1^2+0^2+0^2=\boldsymbol{1}$ و

$\boldsymbol{CD^2}=0^2+1^2+(-2)^2=\boldsymbol{5}$

و : $BD^2+CD^2=6$ و $BC^2=6$ أي أن $BD^2+CD^2=BC^2$ حسب المبرهنة العكسية لفيتاغورس

المثلث $\boldsymbol{BCD}$ **قائم في** $\boldsymbol{D}$.(يمكن استعمال الجداء السلمي)

5) حساب حجم رباعي الوجه $ABCD$ **.**

لدينا :

$V_{(ABCD^\circ}=\frac{1}{3}S_{(BCD)}\times h=\frac{1}{3}S_{(BCD)}\times d(A;(P))=\frac{1}{3}\times\frac{1\times\sqrt{3}}{2}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}=1u.v$.

التمرين الرابع :

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x-\frac{1}{1+e^x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

1/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0\end{cases}$ إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ولدينا $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1\end{cases}$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2/ تبيين أن : $f'(x)>0$ **من اجل كل** x **من** $\mathbb{R}$ **.ثم شكل جدول تغيرات الدالة** f

لدينا : $f'(x)=1-\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}=1+\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ $e^x>0$ و $(1+e^x)^2>0$ إذن لكل x من $\mathbb{R}$ ، $1+\frac{e^x}{(1+e^x)^2}>0$ إذن :

من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$.

جدول تغيرات الدالة f **:** بما أن لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ $f'(x)>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3/ إثبات أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما على الترتيب $y=x$ و $y=x-1$.

لدينا : $f(x)=x-\frac{1}{1+e^x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x}=0$ إذن $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$

ولدينا : $f(x)-(x-1)=-\frac{1}{1+e^x}+1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{1+e^x}+1=-1+1=0$ إذن $(\Delta'): y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$

الوضع النسبي لـ (C) **و** (Δ) :

لدينا $f(x)-x=-\frac{1}{1+e^x}$. لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ $1+e^x>0$ إذن $f(x)-x<0$ إذن : (C) أسفل (Δ)

الوضع النسبي لـ (C) **و** (Δ') :

لدينا : $f(x)-(x-1)=\frac{e^x}{1+e^x}$

لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ $e^x>0$ و $1+e^x>0$ إذن : $f(x)-(x-1)>0$. وبالتالي (C) أعلى (Δ')

4/ تبيين ان المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث** $0<\alpha<\frac{1}{2}$

ادينا : f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ **تقبل على** $\mathbb{R}$ **حلا وحيدا** α

بما أن $f(0)=-1/2$ و $f(0{,}5)\approx\cdots$ أي $f(0)\times f(0{,}5)<0$ فإن $0<\alpha<0.5$

أو :

1/ مستمرة على $\mathbb{R}$ إذن مستمرة على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

2/ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ إذن متزايدة تماما على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$

3/ $f(0)=-\frac{1}{2}$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)\approx\cdots$ أي $f(0)\times f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة **المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **حيث** $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

- التحقق أن $e^{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}$

لدينا : $f(\alpha)=0$ إذن $\alpha-\frac{1}{1+e^{\alpha}}=0$ أي $\frac{1}{1+e^{\alpha}}=\alpha$ أي $e^{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}$

5/ إثبات أن النقطة $I\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ **مركز تناظر للمنحنى** (C) **.**

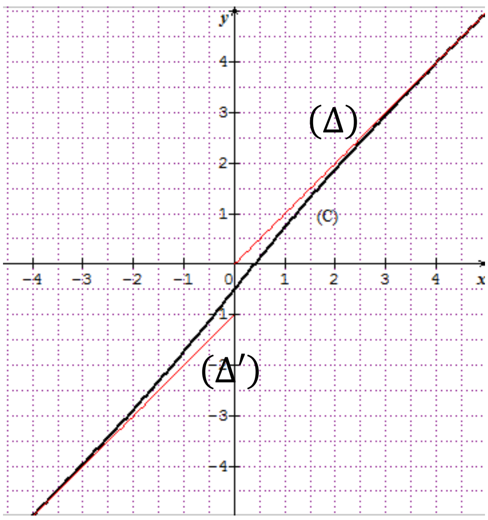
لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ $-x\in\mathbb{R}$ و :

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{1+e^{-x}}+x-\frac{1}{1+e^{x}}=-\frac{1}{1+e^{-x}}-\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{-e^{x}}{1+e^{x}}-\frac{1}{1+e^{x}}=-\frac{e^{x}+1}{1+e^{x}}=-1$$

إذن : $f(-x)+f(x)=-1=2(-\frac{1}{2})$ إذن : **النقطة** $I\left(0;-\frac{1}{2}\right)$ **مركز تناظر للمنحنى** (C)

6/ معادلة المماس (T) **للمنحني** (C) **في النقطة ذات الفاصلة** $x=0$: $(T): y=f'(0)x+f(0)=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$.

إنشاء المنحني (C) **و** (Δ) **و**(Δ')**.** :



7/ المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $f(x)=x+\ln(m)$

حلول المعادلة (في حالة وجودها) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C)

والمستقيم $(\Delta_m): y=x+\ln m$.

لدينا : $(\Delta): y=x$ ، $(\Delta'): y=x-1$ و $(\Delta_m): y=x+\ln m$

- لما (Δ_m) أسفل (Δ') أي $x+\ln m<x-1$ أي $\ln m<-1$
  أي $0<m<\frac{1}{e}$ ليس للمعادلة حلا .
- لما (Δ_m) منطبق على (Δ') أي $x+\ln m=x-1$ أي $\ln m=-1$ أي $m=\frac{1}{e}$ ليس للمعادلة حلا .
- لما (Δ_m) محصور بين (Δ') و (Δ) أي $x-1<x+\ln m<x$ أي $-1<\ln m<0$ أ
  أي $\frac{1}{e}<\mathrm{m}<1$ للمعادلة حل وحيد .
- لما (Δ_m) منطبق على (Δ) أي $x+\ln m=x$ أي $\ln m=0$ أي $m=1$ ليس للمعادلة حلا .
- لما (Δ_m) أعلى (Δ) أي $x+\ln m>x$ أي $\ln m>0$ أي $m>1$ ليس للمعادلة حلا