الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية الشيخ أمود -تمنغست — الموسم الدراسي 2018/2017

المستوى : الثالثة علوم تجريبية — المـــدة : ثلاث ساعات

اخت بلو الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول(4 نقاط) :

أجب بصحيح أو بخطأ مع التبرير

1) إذا كان $A(1;3)$ مرك تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x)=6-f(1+x)$

2) g دالة معرفة على R بـ $g(x)=e^{-x}.\ln(1+e^{2x})$ فإن $g(x)=\frac{2x.}{e^{x}}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{x}}$.

3) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=2$ فإن $S_n=v_0^2+v_1^2+v_2^2+...+v_n^2=\left[2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{9}}\right)\right]^2$.

4) إذاكان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X=x_i)$	a	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	b	$\frac{3}{13}$

و أملة الرياضياتي هو $E(X)=\frac{17}{13}$ فإن $b=\frac{4}{13}$; $a=\frac{3}{13}$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

يحتوي صندوق على 12 كرية لا نفرق بينها عند اللمس منها 3 كريات بيضاء مرقمة بالأرقام 1 و 1 و 2 و أربع كريات حمراء مرقمة بالأرقام 1 و 1 و 2 و 2 و خمس كريات خضراء مرقمة بالأرقام 1 و 2 و 2 و 2 و 3 .

نسحب من الصندوق كرتين في أن واحد .

1) أ- أحسب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب

ب-لتكن الحادثتان A و B حيث "A سحب كريتان من نفس اللون " و B " سحب كرية خضراء على الأقل "

أحسب احتمال الحوادث التالية A ; B ; $A\cap B$.

ج- هل الحدثتان A و B مستقلتان ؟

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين المحصل عليهما .

أ - عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عين قانون احتماله

ب -أحسب الأمل الرياضياتي E(X) ثم أحسب الاحتمال $P(\ x^2-6x+8\le 0\ )$.

التمرين الثالث(5 نقاط) :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي من اجل كل عدد طبيعي n $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2+3u_n^2}{1+3u_n} \end{cases}$.

1) بين ان من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1} = \dfrac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$.

2) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

3) بين المتتالية (u_n)متزايدة ثم استنتج انها متقاربة.

4) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{3u_n}{1+3u_n} < \dfrac{6}{7}$ ثم استنتج أن $2-u_{n+1} < \dfrac{6}{7}(2-u_n)$

5) استنتج من 1) و 4) انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_n \le \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ ثم اوجد نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول : نعتبر المعادلتين التفاضليتين التالية $y'+y=-x-1.........(E)$ و $y'+y=0.........(E')$

1) أوجد الحل h الخاص للمعادلة التفاضلية (E') و الذي يحقق $h(1)=\dfrac{1}{e}$.

2) عين العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة u المعرفة على R بـ $u(x)=e^{-x}+ax$ حل للمعادلة التفاضلية (E).

الجزء الثاني : لتكن الدالة g المعرفة على R بـ $g(x)=e^{-x}-x$

1) عين نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم أدرس تغيراتها و شكل جدول تغيراتها.

2) أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيداً α حيث $0<\alpha<1$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$

الجزء الثالث : نعتبر f دالة معرفة على $]-\infty;\alpha[$ بـ $f(x)=\dfrac{x}{e^{-x}-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;\alpha[$: $f(x)=\dfrac{xe^x}{1-xe^x}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} \alpha} f(x)$

مفسراَ النتيجتين بيانيا

2) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;\alpha[$: $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(e^{-x}-x)^2}$ إستنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;\alpha[$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أنشئ التمثيل البياني (C_f) نضع $(\alpha \approx 0,5)$

أساتذة المادة- بالتوفيق للجميع في بكالوريا 2018

التصحيح المفصل للاختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول(4 نقاط) :

الإجابة مع التبرير

1) إذا كان $A(1;3)$ مرك تناظر للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f فإن $f(1-x)=6-f(1+x)$

الإجابة صحيحة .... (0,5)

لأنه إذا كانت $A(1;3)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) فإنه $f(1-x)+f(1+x)=2(3)$ و هذا يعني $f(1-x)=6-f(1+x)$ محققة...(0,5)

2) g دالة معرفة على R بـ $g(x)=e^{-x}.\ln(1+e^{2x})$ فإن $g(x)=\frac{2x.}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$

الاجابة صحيحة .... (0,5)

لأنه من اجل كل عدد حقيقي x : $g(x)=e^{-x}.\ln(1+e^{2x})$ يعني ان $g(x)=e^{-x}.\ln(e^{2x}(e^{-2x}+1))$ و منه $g(x)=e^{-x}.\ln(e^{2x})+e^{-x}.\ln(e^{-2x}+1)$ أي أن $g(x)=\frac{2x}{e^x}+\frac{\ln(e^{-2x}+1)}{e^x}$.....................(0,5)

3) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=2$ فإن الإجابة خاطئة...............................(0,5)

.

لأن المجموع هو مجموع حدود متتابعة من مربعات متتالية هندسية هو مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها مربع اساس المتتالية الأولى أي أن $-\frac{9}{2}\left[\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-1\right]=4\left[\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-1}{-\frac{8}{9}}\right]=S_n=v_0^2\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{9}-1}$ ....(0,5)

4) إذاكان قانون احتمال لمتغير عشوائي X

x_i	-2	0	1	3	5
$P(X=x_i)$	a	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	b	$\frac{3}{13}$

و أملة الرياضياتي هو $E(X)=\frac{17}{13}$ فإن $b=\frac{4}{13}$; $a=\frac{3}{13}$ الإجابة خاطئة...(0,5)

لأنه لو عوضنا القيمتين في الأمل الرياضياتي $E(X)=-2\left(\frac{3}{13}\right)+0\left(\frac{2}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}\right)+3\left(\frac{4}{13}\right)+5\left(\frac{3}{13}\right)=\frac{22}{13}$ و هو يختلف عن $\frac{17}{13}$.

أو نحل الجملة $\begin{cases} a+\frac{2}{13}+\frac{1}{13}+b+\frac{3}{13}=1 \\ \text{و} \\ -2a+0\left(\frac{2}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}\right)+3b+5\left(\frac{3}{13}\right)=\frac{17}{13} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a+b=\frac{7}{13} \\ \text{و} \\ -2a+3b=\frac{1}{13} \end{cases}$ و منه نجد $\begin{cases} a=\frac{4}{13} \\ \text{و} \\ b=\frac{3}{13} \end{cases}$....(0,5)

التمرين الثاني (4 نقاط) :

1) أ- حساب عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هي $C_{12}^2 = 66$ ....(1)

ب- حساب احتمال الحوادث التالية

"A سحب كريتان من نفس اللون " يعني سحب كرتين حمروان او كرتين خضروان او كرتين بيضاوان

عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = 19$ و منه $P(A) = \frac{19}{66}$ ....(0,25)

B " سحب كرية خضراء على الأقل " يعني سحب كرة خضراء و كرة من لون أخر او سحب كرتين خضروان

عدد الحالات الملائمة لهذه الحادثة هي $C_5^1 \times C_7^1 + C_5^2 = 35 + 10 = 45$ و منه $P(B) = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$ ....(0,25)

$A \cap B$. " سحب كرتين خضروان " عدد الحالات الملائمة هي $C_5^2 = 10$

و منه $P(A \cap B) = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$ ....(0,25)

ج- الحدثتان A و B مستقلتان يعني أن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و لدينا $P(A) \times P(B) = \frac{19}{66} \times \frac{15}{22} = \frac{95}{484}$ و

هو يختلف عن $P(A \cap B) = \frac{5}{33}$ و منه الحدثان غير مستقلان...(0,25)

2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقمين المحصل عليهما .

أ - تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X و هي $\{2 ; 3 ; 4 ; 5\}$..(0,25)

.

قانون احتمال :...(0,5)

2 : هو مجموع 1 و 1 عدد الحالات الملائمة لما $X = 2$ هو $C_5^2 = 10$

3 : هو مجموع 1 و 2 عدد الحالات الملائمة لما $X = 3$ هو $C_5^1 \times C_6^1 = 30$

4 : هو مجموع 2 و 2 أو مجموع 1 و 3 عدد الحالات الملائمة لما $X = 4$ هو $C_6^2 + C_5^1 = 20$

5 : هو مجموع 2 و 3 عدد الحالات الملائمة لما $X = 5$ هو $C_6^1 = 6$

x_i	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{10}{66}$	$\frac{30}{66}$	$\frac{20}{66}$	$\frac{6}{66}$

ب-حساب الأمل الرياضياتي E(X) :

$E(X) = 2\left(\frac{10}{66}\right) + 3\left(\frac{30}{66}\right) + 4\left(\frac{20}{66}\right) + 5\left(\frac{6}{66}\right) = \frac{220}{66} = \frac{10}{3}$ ....(0,25)

حساب الاحتمال $P(\ x^2 - 6x + 8 \leq 0\ )$ نحسب مميز $(\ x^2 - 6x + 8\ )$ نجد أن $\Delta = 4$ و منه جذريه هما 4 و 2 إذن

$P(\ x^2 - 6x + 8 \leq 0\ ) = P(2 \leq x \leq 4) = P(X = 2) + P(X + 3) + P(X = 4)$

و منه $P(\ x^2 - 6x + 8 \leq 0\ ) = \frac{10}{66} + \frac{30}{66} + \frac{20}{66} = \frac{60}{66} = \frac{10}{11}$ ....(1)

التمرين الثالث(5 نقاط) :

1) نبين ان من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}=\dfrac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$. نحسب

$2-u_{n+1}=2-\dfrac{2+3u_n^2}{1+3u_n}=\dfrac{2+6u_n-2-3u_n^2}{1+3u_n}=\dfrac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$ ....(1)

2) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$

لدينا $0<u_0<2$ محققة..(0,25)

نفرض أن $0<u_n<2$ و لنبرهن أن $0<u_{n+1}<2$

$0<u_n<2$ و $2-u_{n+1}=\dfrac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$ و منه $2-u_{n+1}>0$ أي أن $u_{n+1}<2$

$0<u_n<2$ و $u_{n+1}=\dfrac{2+3u_n^2}{1+3u_n}$ يعني انها موجبة و منه $0<u_{n+1}<2$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n :

$0<u_n<2$..(0,75)

3) نبين المتتالية (u_n)متزايدة نحسب الفرق $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2+3u_n^2}{1+3u_n}-u_n=\dfrac{2-u_n}{1+3u_n}$ بما أن $0<u_n<2$ فإن الفرق موجب

و منه المتتالية متزايدة..(0,75)

بما أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى و متزايدة فهي متقاربة ....(0,25)

4) نبين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{3u_n}{1+3u_n}<\dfrac{6}{7}$ لدينا $\dfrac{3u_n}{1+3u_n}-\dfrac{6}{7}=\dfrac{3u_n-6}{1+3u_n}=\dfrac{3(u_n-2)}{1+3u_n}$ بما أن

$0<u_n<2$ فإن الفرق سالب تماما $\dfrac{3u_n}{1+3u_n}-\dfrac{6}{7}<0$ إذن $\dfrac{3u_n}{1+3u_n}<\dfrac{6}{7}$..(0, 5)

استنتاج أن $2-u_{n+1}<\dfrac{6}{7}(2-u_n)$ لدينا $\dfrac{3u_n}{1+3u_n}<\dfrac{6}{7}$ بالضرب في$(2-u_n)$ و منه نجد

$\dfrac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)<\dfrac{6}{7}(2-u_n)$ أي أن $2-u_{n+1}<\dfrac{6}{7}(2-u_n)$..(0, 5)

5) استنتاج من 1) و 4) انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} 2-u_1<\dfrac{6}{7}(2-u_0) \\ 2-u_2<\dfrac{6}{7}(2-u_1) \\ . \\ . \\ . \\ 2-u_n<\dfrac{6}{7}(2-u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب نجد

$(2-u_1)(2-u_2)......(2-u_{n-1})(2-u_n)<\left(\dfrac{6}{7}\right)^n(2-u_0)(2-u_1)(2-u_2)...(2-u_{n-1})$ بالإختزال نجد

$2-u_n<\left(\dfrac{6}{7}\right)^n(2-u_0)$ أي أن $2-u_n<\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$..(0,75)

النهاية المتتالية (u_n) : بما أن $0<2-u_n<\left(\frac{6}{7}\right)^n$ و $\lim\left(\frac{6}{7}\right)^n=0$ فإن $\lim(2-u_n)=0$

و منه $\lim u_n=2$ .... (0,25)

التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول :

1) ايجاد الحل h الخاص للمعادلة التفاضلية (E') و الذي يحقق $h(1)=\frac{1}{e}$: حلها هو $h(x)=Ce^{-x}$ و $h(1)=\frac{1}{e}$

يعني أن $C=1$ و منه $h(x)=e^{-x}$ .... (1)

2) تعيين العدد الحقيقي a بحيث تكون الدالة u المعرفة على R بـ $u(x)=e^{-x}+ax$ حل للمعادلة التفاضلية (E):

نحسب $u'(x)=-e^{-x}+a$ و منه $u'(x)+u(x)=ax+a$ بالمطابقة نجد أن $a=-1$

و منه $u(x)=e^{-x}-x$ .... (1)

الجزء الثاني :

1) تعيين نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{-x}-x\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^{-x}-x\right]=+\infty$ .... (0,25) + (0,25)

دراسة تغيراتها : لدينا $g'(x)=-e^{-x}-1$ و هي سالبة على R و منه الدالة g متناقصة على R .... (0,25)

جدول تغيراتها : .... (0,25)

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

2) إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$: بما أن الدالة g مستمرة و متناقصة على R و $g(0)=1$ و $g(1)=-0,63$ أي أن $g(1)\times g(0)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$ .... (0, 5)

و منه إشارة $g(x)$: .... (0, 5)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	0	$-$

الجزء الثالث :

1) التحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]-\infty;\alpha\right[$: $f(x)=\frac{xe^x}{1-xe^x}$ لدينا $f(x)=\frac{x}{e^{-x}-x}$ يعني أن

$f(x)=\frac{xe^x}{(e^{-x}-x)e^x}=\frac{x\,e^x}{1-x\,e^x}$ و هو المطلوب .... (0, 25)

استنتاج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{<} \alpha} f(x)$: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^{x}}{1-xe^{x}}\right)=0$ ....(0, 25)

لأن $\lim_{x\to-\infty} x.e^{x}=0$

$\lim_{x \xrightarrow{<} \alpha} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{\alpha}{e^{-x}-x}=-\infty$ لأن $\lim_{x \xrightarrow{<} \alpha}\left(e^{-x}-x\right)=0^{-}$ ....(0, 25)

التفسير البياني : (C_f) يقبل مستقيمان مقاربان معادلتيهما $x=\alpha$; $y=0$.....................................(0, 25) + (0,25)

2) تبين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;\alpha[$: $f'(x)=\frac{(1+x)\,e^{-x}}{\left(e^{-x}-x\right)^{2}}$:

نحسب المشتقة $f'(x)=\frac{\left(e^{-x}-x\right)-\left(-e^{-x}-1\right)x}{\left(e^{-x}-x\right)^{2}}=\frac{e^{-x}(1+x)}{\left(e^{-x}-x\right)^{2}}$ ....(0, 25)

استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;\alpha[$: $f'(x)=\frac{e^{-x}(1+x)}{\left(e^{-x}-x\right)^{2}}$ تنعدم عند -1 و منه هي موجبة على $[-1;\alpha[$ و سالبة على المجال $]-\infty;-1]$ إذن الدالة f متزايدة على المجال $[-1;\alpha[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;-1]$..(0, 25)

جدول تغيراتها..(0, 25)

x	$-\infty$		-1		α
$f'(x)$		---	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$\frac{-1}{1+e}$	↗	$+\infty$

3) إنشاء التمثيل البياني (C_f) ....(1)