الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية الشيخ أمود -تمنغست | الموسم الدراسي 2018/2017

المستوى : الثالثة شعبتي الرياضيات و التقني رياضي | المـــدة : 14400 ثانية

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول(5 نقاط) :

1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 504 و 1260 و 2772 .

2) نعتبر في المجموعة $Z\times Z$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية $2772x-1260y=504.....(1)$.

أ - عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2-3y_0=-4$.

ب -باستعمال الحل الخاص المتحصل عليه حل في $Z\times Z$ المعادلة (1)

3) نفرض أن x ; y عددان طبيعيان حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1) :

أ - عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x ; y .

ب -عين الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون العددان x ; y أوليان فيما بينهما.

4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 ثم أستنتج رقم أحاد 2018^{1439}.

5) عين الثنائيات $(x;y)$ من $N^*\times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x}\equiv 8[10]$.

التمرين الثاني (4 نقاط)

لدينا U_1, U_2 , U_3 حيث الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء و الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء

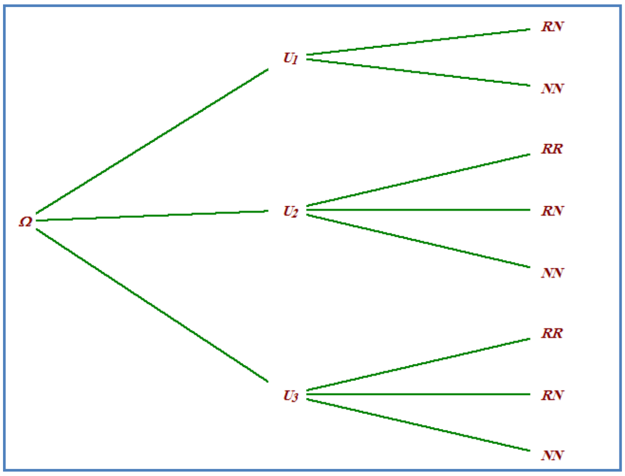
و الصندوق U_3 يحتوي على ثلاثة كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق المختار

نسمي RR حادثة " الحصول على كرتين حمراوين"

و NN حادثة " الحصول على كرتين سوداوين"

و RN حادثة " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "



1) أنقل هذه الشجرة موضحا عليها كل الاحتمالات .

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ - حدد قيم المتغير العشوائي X.

ب -بين أن احتمال الحادثة (X=2) يساوي $\frac{2}{285}$.

ج-بين أن احتمال الحادثة (X=1) يساوي $\frac{53}{285}$.

د-استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي E(X).

3) علما أننا حصلنا على كرتين حمرويين ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 ؟.........(خاص بشعبة الرياضيات)

4) أحسب احتمال الحصول على كرة حمراء على الأكثر...(خاص بالتقني رياضي)

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية حدها الأول $u_1 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}u_n$.

1) أ-احسب الحدود u_2 و u_3 .

ب-برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ج-أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة و أحسب نهايتها.

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = n.2^n.u_n$.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q و حدها الأول v_1 .

ب -أكتب v_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n و أثبت تقارب المتتالية (u_n).

3) أحسب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$

4) أحسب الجداء $P_n = u_1(2u_2)(3u_3)....(nu_n)$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2\left[3 - \ln(x^2)\right] + 1 \ : \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب النهاية $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسياً

3) أدرس اتحاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$ و $f(\alpha) = 0$.

5) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

6) نعتبر g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ - أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغيرالدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$

ب -حدد اتجاه تغير الدالة g ثم أستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ج-أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

بالتوفق للجميع - الأستاذ : جواليل أحمد

اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول(5 نقاط) :

1) ايجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 504 و 1260 و 2772 بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نجد

$PGCD(2772;1260;504)=252$

2) نعتبر في المجموعة $Z\times Z$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية $2772x-1260y=504.....(1)$.

أ - تعين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2-3y_0=-4$ لدينا (1) تكافئ $11x-5y=2$

الحل الخاص يحقق $\begin{cases}2x_0^2-3y_0=-4\\11x_0-5y_0=2\end{cases}$ يكافئ أن $\begin{cases}10x_0^2-15y_0=-20\\33x_0-15y_0=6\end{cases}$ بالطرح نجد $10x_0^2-33x_0+26=0$

نحسب المميز نجد $\Delta=49$ و منه للمعادلة حلين هما $\begin{cases}x_0=\dfrac{13}{10}\\x_0=2\end{cases}$ الحل الصحيح مقبول و هو $x_0=2$

بالتعويض في معادلة من الجملة نحصل $y_0=4$ و منه الحل الخاص هو $(2;4)$

ب - حل في $Z\times Z$ المعادلة (1) لدينا $\begin{cases}11x-5y=2\\11(2)-5(4)=2\end{cases}$ بالطرح نجد $11(x-2)=5(y-4)$ و العددان 11 و 5 أوليان

فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص فإن 11 قاسم للعدد $(y-4)$ و 5 قاسم للعدد $(x-2)$ أي أن $\begin{cases}x-2=5k\\y-4=11k\end{cases};k\in Z$ و

منه $\begin{cases}x=2+5k\\y=4+11k\end{cases}:k\in Z$ مجموعة الحلول هي $S=\{(2+5k;4+11k):k\in Z\}$

3) نفرض أن x ; y عددان طبيعيان حيث $(x;y)$ هو حل للمعادلة (1) :

أ - تعيين القيم المكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x ; y لدينا $11x-5y=2$ و منه القاسم المشترك الأكبر قاسم للعدد 2 و منه قيمه المكنة هي 1 او 2 .

ب- تعيين الثنائيات $(x;y)$ بحيث يكون العددان x ; y أوليان فيما بينهما أي ان $PGCD(x;y)=1$ و

$\begin{cases}x=2+5k\\y=4+11k\end{cases};k\in N$ و منه هذا يعني أن k عدد طبيعي فردي أي أن $\begin{cases}x=2+5(2k'+1)\\y=4+11(2k'+1)\end{cases}:k'\in N$ و منه

$\begin{cases}x=7+10k'\\y=15+22k'\end{cases}:k'\in N$ و منه $(x;y)=(7+2k';15+22k')$ و $k\in \mathrm{N}$

4) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 لدينا

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[4]
2^n	1	2	4	8	6	[10]

و منه بواقي قسمة 2^n على 10 تشكل متتالية دورية و دورها 4

لما $n=4k+1$ الباقي هو 2 و لما $n=4k+2$ الباقي هو 4 و لما $n=4k+3$ الباقي هو 8 و لما $n=4k+4$ الباقي هو 6

لدينا $2018\equiv 2^3[10]$ و منه $2018^{1439}\equiv 2^{4317}[10]$ و $4317=1079\times 4+1$ و هو من الشكل $n=4k+1$ باقي قسمة 2018^{1439} على 10 هو 2 أي أن $2018^{1439}\equiv 2[10]$ إذن رقم الأحاد المطلوب هو 2 .

5) نعيّن الثنائيات $(x;y)$ من $N^*\times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x}\equiv 8[10]$ لدينا $k\in N$: $\begin{cases}x=2+5k\\ y=4+11k\end{cases}$

بالتعويض نجد $2^k\equiv 8[10]$ من دراسة البواقي نجد أن $k=4k''+3$ و منه $k''\in N$: $\begin{cases}x=17+20k''\\ y=37+44k''\end{cases}$ ومنه الثنائيات هي

$$(x;y)=(17+20k'';37+44k'')\ :\ k''\in N$$

التمرين الثاني (4 نقاط)

لدينا U_1 , U_2 , U_3 حيث الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء و الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء

و الصندوق U_3 يحتوي على ثلاثة كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

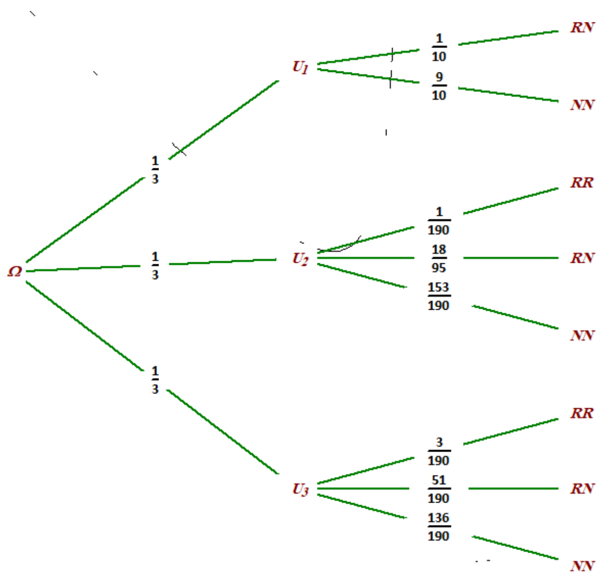
نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق المختار

نسمي RR حادثة " الحصول على كرتين حمراوين"

و NN حادثة " الحصول على كرتين سوداوين"

و RN حادثة " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

1) شجرة الاحتمالات :



عدد الحالات الممكنة في سحب كرتين من أي صندوق هي

$C_{20}^2=190$

السحب من U_1

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مختلفتين في اللون

$C_{19}^1\times C_1^1=19$ و منه احتمال سحب كرتين مختلفين في اللون

هو $P_{u_1}(RN)=\frac{19}{190}=\frac{1}{10}$ و منه

$P_{u_1}(NN)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$.

السحب من U_2

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مختلفتين في اللون

$C_{18}^1\times C_2^1=36$ و منه احتمال سحب كرتين مختلفين في اللون هو $P_{u_2}(RN)=\frac{36}{190}=\frac{18}{95}$.

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمروايـن من هذا الصندوق $C_2^2=1$ و منه احتمال سحب كرتين حمروايـن هو $P_{u_2}(RR)=\frac{1}{190}$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمروايـن من هذا الصندوق $C_{18}^2=153$ و منه احتمال سحب كرتين سودوايـن هو

$P_{u_2}(NN)=\frac{153}{190}$

السحب من U_3

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مختلفتين في اللون $C_{17}^1\times C_3^1=51$ و منه احتمال سحب كرتين مختلفين في اللون هو

$P_{u_3}(RN)=\frac{51}{190}$.

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمروان من هذا الصندوق $C_3^2=3$ و منه احتمال سحب كرتين حمروان هو $P_{u_3}(RR)=\frac{3}{190}$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمروان من هذا الصندوق $C_{17}^2=136$ و منه احتمال سحب كرتين سودوان هو

$P_{u_3}(NN)=\frac{136}{190}$

2) X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ - تحديي قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2

ب -بيين أن احتمال الحادثة (X=2) يساوي $\frac{2}{285}$: سحب كرتين حمروان هو اما السحب من الكيس الثاني او الثالث .

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{190}=\frac{4}{570}=\frac{2}{285}$.

ج-بين أن احتمال الحادثة (X=1) يساوي $\frac{53}{285}$. سحب كرتين مختلفتين في اللون هو اما السحب من الكيس الأول او الثاني أو الثالث $P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{19}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{36}{190}+\frac{1}{3}\times\frac{51}{190}=\frac{106}{570}=\frac{53}{285}$

د-استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{230}{285}$	$\frac{53}{285}$	$\frac{2}{285}$

حساب أمله الرياضياتي E(X) : $E(X)=\frac{230}{285}\times 0+\frac{53}{258}\times 1+\frac{2}{285}\times 2=\frac{57}{285}$

3) علما أننا حصلنا على كرتين حمرويين ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 ؟.........(خاص بشعبة الرياضيات)و

$P(RR)=P(X=2)=\frac{2}{285}$ منه $P(U_3\cap RR)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{190}=\frac{3}{570}$ إذن $P_{RR}(U_3)=\frac{P(U_3\cap RR)}{P(RR)}=\frac{\left(\frac{3}{570}\right)}{\left(\frac{2}{285}\right)}==\frac{3}{4},$

$$P_{RR}(U_3)=\frac{P(U_3\cap RR)}{P(RR)}=\frac{\left(\frac{3}{190\times 3}\right)}{\left(\frac{2}{285}\right)}=\frac{285}{380}=\frac{3}{4}$$

4) حساب احتمال الحصول على كرة حمراء على الأكثر...(خاص بالتقني رياضي)

$P(A)=\frac{230}{285}+\frac{53}{285}=\frac{283}{285}$

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية حدها الأول $u_1=\frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{n}{4(n+1)}u_n$.

1) أ-حساب الحدود : $u_2=\frac{1}{8}u_1=\frac{1}{32}$ و $u_3=\frac{2}{12}u_2=\frac{1}{192}$.

ب-البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$ لدينا $u_1>0$ محققة

نفرض ان $u_n > 0$ و لنبرهن $u_{n+1} > 0$

بما أن $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}u_n$ موجبة و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

ج-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{n}{4(n+1)}u_n - u_n = \frac{(-3n-4)}{4(n+1)}u_n$ بما أن $u_n > 0$ فإن الفرق سالب و منه المتتالية (u_n) متناقصة و محدود من الأسفل فهي متقاربة .

حساب نهايتها نضع $\lim u_n = l$ و لدينا $\lim u_{n+1} = \lim \frac{n}{4(n+1)}u_n$ و منه $l = \frac{1}{4}l$ إذن $l = 0$

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = n.2^n.u_n$.

أ - بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها q و حدها الأول v_1 :

$v_{n+1} = (n+1).2^{n+1}.u_{n+1} = (n+1)2^{n+1}\frac{n}{4(n+1)}u_n = \frac{n.2^n.u_n}{2} = \frac{1}{2}v_n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها هو $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $v_1 = 2u_1 = \frac{1}{2}$.

ب- كتابة v_n بدلالة n : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

أستنتاج $u_n = \frac{1}{n.2^n}v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

إثبات تقارب المتتالية (v_n) :: $\lim u_n = \lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$ و منه فهي متقاربة

3) حساب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ و منه $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$

4) حساب الجداء $P_n = u_1(2u_2)(3u_3)....(nu_n)$ و لدينا $v_n = n.2^n.u_n$ و منه $\frac{v_n}{2^n} = n.u_n$ نضع $w_n = \frac{v_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times ..... \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+4+6+...+2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(2+2n)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2\left[3 - \ln(x^2)\right] + 1 \ : \ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2) دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2}\left[3 - \ln(x^2)\right] = 0$ لأن $\lim_{x\to 0} x\ln(x^2) = 0$

تفسير النتيجة هندسياً المنحنى الممثل للدالة (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه معدوم .

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f لدينا $\begin{cases} f'(x)=x\left[3-\ln(x^2)\right]-x \ : \ x>0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} f'(x)=x\left[2-\ln(x^2)\right] \ : \ x>0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

تنعدم المشتقة عند $x=e$ تكون موجبة على المجال $[0;e]$ فالدالة f متزيدة على هذا المجال و تكون سالبة على المجال $[e;+\infty[$ فالدالة f متناقصة على هذا المجال

جدول تغيراتها :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	↗	$\frac{1}{2}e^2+1$	↘	$-\infty$

4) يتبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $4{,}6<\alpha<4{,}7$ و $f(\alpha)=0$ بما الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $[4{,}6\ ;\ 4{,}7]$ و $f(4{,}7)=-0{,}05$; $f(4{,}6)=0{,}45$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(\alpha)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $4{,}6<\alpha<4{,}7$.

5) كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y=2(x-1)+\frac{5}{2}$ أي $y=2x+\frac{1}{2}$

6) نعتبر g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f(x)-2x-\frac{1}{2}$

أ - حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

$g'(x)=f'(x)-2=x\left[2-\ln(x^2)\right]-2$ و منه $g''(x)=\left[\ 2-\ln(x^2)\ \right]-2=-\ln(x^2)$

دراسة اتجاه تغيرالدالة g' : بما أن $g''(x)=0$ يعني أن $x=1$ و g'' موجبة على المجال $]0;1]$ و منه g' متزايدة على هذا المجال و g'' سالبة على المجال $]1;+\infty[$ و منه g' متناقصة على هذا المجال .

استنتج إشارتها على المجال $]0;+\infty[$ مما سبق نستنتج أن g' تقبل قيمة حدية كبرى هي $g'(1)=0$ و منه فإن $g'(x)$ سالبة على المجال $]0;+\infty[$.

ب -تحديد اتجاه تغير الدالة g بما أن g' سالبة على $]0;+\infty[$ و منه g متناقصة على مجال تعريفها

أستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : $g(1)=f(1)-2(1)-\frac{1}{2}=0$

و منه $g(x)$ موجبة على المجال $]0;1[$ و سالبة على المجال $]1;+\infty[$

(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0;1[$ و (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]1;+\infty[$

ج-أنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)