الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية غرداية — المقاطعة التفتيشية الأولى

الشعبة :تقني رياضي — امتحان: البكالوريا التجريبي — دورة : ماي 2018

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة: 04 ساعات ونصف

ملاحظة: على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين.

الموضوع الأول

التمرين الأول: 4ن

1- عين الاعداد الصحيحة x التي تحقق: $x^2-x+6\equiv 0[9]$

2- أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 ، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن : $7^{2n}\equiv 4^n[9]$

ب) استنتج تبعا لقيم n الطبيعية باقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 9.

3- أ) ما هو باقي قسمة العدد: $5^{2017}+25^{2018}$ على 9 .

ب) عين الاعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد : $7^{2n}-7^n+6$ مضاعف للعدد 9

4-عين الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية بحيث : $7^x+4^y\equiv 2[9]$

التمرين الثاني:04ن

يحتوي كيس على 12 كرة منها: 3 بيضاء تحمل الأرقام 2;1;1 وأربع كرات حمراء تحمل الأرقام 2;2;;1;1 وخمس كرات خضراء تحمل الأرقام 3;2;2;2;1 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس

1. نعتبر الحادثتين A: "سحب كرتين من نفس اللون " B "سحب كرة خضراء على الأقل "

- أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية : A و B و $A\cap B$

2. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .

-عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ,ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الثالث: 5ن

1- نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z)$ حيث : $p(z)=z^4+6z^3+30z^2+48z+40$

أ) - بين أنه من أجل كل عدد مركب z لدينا: $p(z)=(z+1-i)g(z)$ حيث $g(z)$ كثير حدود يطلب تعيينه.

ب) - تحقق ان : $g(-1-i)=0$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z)=0$

2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط :

A ، B ، C و D صور الاعداد المركبة : $-2+4i$ ، $-2-4i$ ، $2+3i$ ، $2-3i$ على الترتيب .

أ)- اكتب العدد المركب z حيث : $z=z_A+z_D+1$ على شكله المثلثي ثم الأسي. ثم أحسب $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{2018}$.

ب)-عين الاعداد الطبيعية n حتى يكون العدد $\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عددا حقيقيا .

3- عين مجموعة النقط M صور العدد المركب z حيث: $arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in Z$

4-عين العدد المركب Z_F لاحقة النقطة F حيث : $\frac{z_F-z_C}{z_F-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AFC .

5-عين مجموعة النقط M من المستوي صور العدد المركب Z حيث: $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ مع $k\in R_+$

التمرين الرابع: 07 ن

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(0;\vec{i};\vec{j})$

1) لتكن u الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $u(x)=x-ln(1+x)$.

- ✓ ادرس اتجاه تغير الدالة u .
- ✓ احسب $u(0)$ ثم استنتج إشارة $u(x)$.

2) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=ln(x+e^{-x})$

أ) تحقق أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=-x+ln(1+xe^{x})$.

ب) تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f(x)-ln(x)=ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

جـ) احسب نهاية $f(x)$ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ و استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل للمنحني (c_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي .

3) ليكن (Γ) المنحنى ذو المعادلة : $y=lnx$ ، بين أن (Γ)منحنى مقارب للمنحني (c_f) في جوار $+\infty$.

4) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها ، (نقبل أن : $x+e^{-x}>0$ من أجل $x\in\mathbb{R}$) .

ب) انشئ كلا من (Δ) و (c_f) و (Γ) في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5) نعتبر x عدد حقيقي من المجال$[0;+\infty[$ ولتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n=\int_0^1 ln(1+x^n)\,dx .$$

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب u_1 .

ب) باستعمال الجزء الأول (السؤال 01) بين أن : $0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$.

جـ) ادرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثم احسب نهاية u_n عند $+\infty$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: 4 نقاط

كيس به كريات منها أربعة حمراء و n كرة سوداء حيث n عدد طبيعي و $n \geq 2$ كلها متماثلة.

1) نعتبر $n = 5$، ثم نسحب من الكيس على التوالي دون إرجاع، ثلاث كرات.

أ) احسب احتمال الحادثتين الآتيتين:

A: "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون"

B: "الحصول على كرة واحدة حمراء على الأقل"

ب) بين أن احتمال الحصول على كرة واحدة حمراء فقط هو: $\frac{10}{21}$.

2) نسحب على التوالي مع الإرجاع كرتين.

ونعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

أ) عرف قانون احتمال Y.

ب) بين أن: $E(Y) = \frac{2n}{n+4}$.

جـ) عين n حيث : $E(Y) = \frac{42}{25}$.

التمرين الثاني: 5 نقاط

I. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الأتية: $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0 \ldots (E)$

أ) حل المعادلة $(\mathbb{C})$، نعتبر z_1 هو الحل الذي جزأه التخيلي موجب وz_2 هو الحل الآخر.

ب) اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_1}{z_2}$.

جـ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، الوحدة $1\,cm$، نعتبر النقط A، B و Ω

لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{2}(1+i)$، $z_B = \sqrt{2}(1-i)$ و$z_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) أ) عين لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h ذو المركز Ω والنسبة -3.

ب) عين لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R ذو المركز O والزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

2) مثل النقط Ω، A، B، C و D. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

3) أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ على الشكل الجبري، ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) لتكن I منتصف القطعة $[CD]$، و E نظيرة A بالنسبة إلى I.

بين أن الرباعي $ACED$ مربع.

التمرين الثالث: 4 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $[1;10]$ بـ: $g(x) = 3 - x + ln(x)$.

أ) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[1;10]$، ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α في المجال $[1;10]$، ثم تحقق أن $4{,}50 < \alpha < 4{,}51$.

جـ) استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على $[1;10]$.

.II نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

حيث f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالشكل : $f(x) = 3 + lnx$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)، لاحظ أن المنحنى (C_f)هوصورة منحنى الدالة ln بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;3)$.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وحول تقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $1 \leq u_n < \alpha$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ واستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

جـ) هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ علل.

د) استنتج بالضبط نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الرابع: 7 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

$(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $4\ cm$.

1- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$

أ- ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.ثم تحقق أن: $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$

ت- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

2- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

ب- احسب نهاية الدالة f بجوار $+\infty$، وفسر النتيجة بيانيا.

ت- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ وشكل جدول تغيراتها .

3- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4- اكتب معادلة للمستقيم المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C})$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

5- أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$

حيث u الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$.بـ: $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة u ثم استنتج إشارة $u(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

جـ) استنتج وضعية المستقيم (T) مع المنحنى$(\mathcal{C})$.

6- ارسم (T) و$(\mathcal{C})$.

7- أ - عين دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$. (استعمل عبارة f في السؤال 2)

ب-احسب بالسنتيمتر المربع $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C})$، والمستقيم (T) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و$x = 2$. (تعطى النتيجة بالتقريب إلى 10^{-2}).

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي وسلم التنقيط للموضوع الأول

التصحيح	العلامة مجزأة	العلامة الجزئية

التمرين االأول:04ن — 0.5

1, جدول يبين باقي قسمة العدد x^2-x+6 حسب قيم العدد الصحيح x

$x\equiv[9]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x^2\equiv0[9]$	0	1	4	0	7	7	0	4	1
$-x\equiv0[9]$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
$x^2-x+6\equiv0[9]$	6	6	8	3	0	8	0	3	8

0.5

من الجدول نجد : $x^2-x+6\equiv0[9]$ يكافئ: $x\equiv4[9]$ أو $x\equiv6[9]$ أي($x=9k+4$ أو $x=9k+6$, $k\in\mathbb{N}$) — 0.25

1. - الجدول التالي يبين باقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 حسب قيم العدد الطبيعي n

$(k\in\mathbb{N})$, $n=$	$n=3k$	$n=3k+1$	$n=3k+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4

0.25

- $7^2\equiv4\ [9]$ يكافئ $7^{2n}\equiv4^n\ [9]$ — 0.25

-الجدول التالي يبين باقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 9 حسب قيم العدد الطبيعي n

$(k\in\mathbb{N})$, $n=$	$n=3k$	$n=3k+1$	$n=3k+2$
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7

0.25

2. لدينا $5\equiv-4[9]$ يكافئ $5^{2017}\equiv(-4)^{2017}[9]$ أي $5^{2017}\equiv(-4)^{3\times672+1}[9]$

وبما أن $3\times672+1$ من الشكل $n=3k+1$ فإن $(-4)^{3\times672+1}\equiv(-4)[9]$ ومنه $5^{2017}\equiv5[9]$.....(أ) — 0.25

لدينا $25\equiv7[9]$ يكافئ $25^{2018}\equiv7^{2018}[9]$ أي $25^{2018}\equiv7^{3\times672+2}[9]$

وبما أن $3\times672+2$ من الشكل $n=3k+2$ فإن $7^{3\times672+2}\equiv4[9]$ ومنه $25^{2018}\equiv4[9]$.....(ب)

من (أ)و(ب)نجد أن $5^{2017}+25^{2018}\equiv5+4[9]$ ومنه $5^{2017}+25^{2018}\equiv0[9]$ أي أن العدد $5^{2017}+25^{2018}$ يقبل القسمة على9 — 0.5

5. جدول يبين باقي قسمة العدد $7^{2n}-7^n+6$ حسب قيم العدد الطبيعي n

$(k\in\mathbb{N})$, $n=$	$n=3k$	$n=3k+1$	$n=3k+2$
$7^n\equiv[9]$	1	7	4
$7^{2n}\equiv[9]$	1	4	7
$7^{2n}-7^n+6\equiv[9]$	6	3	0

0.5

من الجدول نجد أن : $7^{2n}-7^n+6\equiv0[9]$ من أجل $n=3k+2$ $(k\in\mathbb{N})$

3. الجدول التالي يبين باقي القسمة الاقليدية للعدد 7^x+4^y على9 حسب قيم العدد الطبيعي n

$y=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	$3k+1$	$3k+2$	$3k+2$	$3k$	$3k$	$3k+1$
$7^x+4^y\equiv[9]$	2	2	2	5	8	5	8	5	8

0.5

من أجل الثنائيات (x,x) من الأعداد الطبيعية فإن : $7^x+4^y\equiv2[9]$ — 0.25

التمرين الثاني:4ن

1. عدد الحالات الممكنة لهذا السحب هو : $C_{12}^2=66$ — 0.5

- حساب $P(A)$:

A الحادثة "سحب كرتين من نفس اللون "معناه: (كرتين بيضاوين أو كرتين حمراوين أو كرتين خضراوين)

0.5 — إذن : $P(\mathrm{A})=\dfrac{C_3^2+C_4^2+C_5^2}{C_{12}^2}=\dfrac{3+6+10}{66}=\dfrac{19}{66}$

- حساب $P(B)$:

B الحادثة "سحب كرة خضراء على الأقل" معناه: (كرة خضراء وكرة غير خضراء أو كرتان خضراوان)

0.5 — إذن : $P(\mathrm{B})=\dfrac{C_5^1\times C_7^1+C_5^2}{C_{12}^2}=\dfrac{35+10}{66}=\dfrac{45}{66}=\dfrac{15}{22}$

- حساب $P(\mathrm{A}\cap B)$:

0.25 — $A\cap B$ هي الحادثة : معناه: (كرتين من نفس اللون و خضراء على الأقل) معناه: (كرتان خضراوان)

إذن : $P(A\cap B)=\dfrac{C_5^2}{C_{12}^2}=\dfrac{10}{66}=\dfrac{5}{33}$

0.5 — 2.قيم المتغير العشوائي X هي: $5,4,3,2$

نعتبر الحوادث : C سحب كرة تحمل الرقم1 أي: $C=\{1,1,1,1,1\}$

D سحب كرة تحمل الرقم1 أي: $D=\{2,2,2,2,2,2\}$

E سحب كرة تحمل الرقم1 أي: $E=\{3\}$

0.25 — - $P(X=2)=\dfrac{C_5^2}{C_{12}^2}=\dfrac{10}{66}=\dfrac{5}{33}$

0.25 — - $P(X=3)=\dfrac{C_5^1\times C_6^1}{C_{12}^2}=\dfrac{30}{66}=\dfrac{5}{11}$

0.25 — - $P(X=4)=\dfrac{C_6^2+C_5^1\times C_1^1}{C_{12}^2}=\dfrac{15+5}{66}=\dfrac{10}{33}$

0.25 — - $P(X=5)=\dfrac{C_6^1\times C_1^1}{C_{12}^2}=\dfrac{6}{66}=\dfrac{1}{11}$

0.25 — قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ملخص في الجدول التالي:

$X=x_i$	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	$\dfrac{5}{33}$	$\dfrac{5}{11}$	$\dfrac{10}{33}$	$\dfrac{1}{11}$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X هو:

0.5 — $E(X)=\sum_1^4 x_i\times p_i=2\times\dfrac{10}{66}+3\times\dfrac{30}{66}+4\times\dfrac{20}{66}+5\times\dfrac{6}{66}=\dfrac{10}{3}$

التمرين الثالث: 5ن

0.25 — 1. أ)- بما أن $p(-1+i)=0$ فإن $p(z)=(z+1-i)g(z)$ حيث:

$g(z)=z^3+(5+\mathrm{i})z^2+(24+4i)z+20+20i$

0.75 — ب) - بما أن $g(-1-i)=0$ فإن $g(z)=(z+1+i)(z^2+4z+20)$

مجموعة حلول المعادلة $p(z)=0$ في C هي : $s=\{-1-i;-1+i;-2-2i;-2-2i\}$

0.5 — 2. أ) $z=z_A+z_D+1=1+i$ الشكل المثلثي لـ z هو $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i.\sin\frac{\pi}{4})$

0.5 — الشكل الأسي لـ z هو $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

0.5 — - $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{2018}=e^{i2018.\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

ب) - $\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{n}=e^{in\frac{\pi}{4}}=\cos n\frac{\pi}{4}+i.\sin n\frac{\pi}{4}$

0.5 — ($\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عدد حقيقي)يكافئ ($n\frac{\pi}{4}=k\pi$) يكافئ (nعدد طبيعي مضاعف لـ4)

0.5 — 3. - $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يكافئ ($(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MA})=\frac{\pi}{2}+k\pi$) مجموعة النقط Mعبارة عن

0.5 — الدائرة ذات القطر $[AB]$ باستثناء النقطتين AB

0.5 — 4. - $Z_F=-1-10i$ و $FC=FA$ و $(\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FC})=\frac{\pi}{2}+K\pi$. المثلث AFC قائم في Fومتساوي الساقين

0.5 — 5. - $Z=Z_A+ke^{i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $Z-Z_A=ke^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{v}$ حيث : $(\vec{i},\vec{v})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.مجموعة النقط

M عبارة عن نصف المستقيم المحدد بالنقطة Aوالموجه بالشعاع $\vec{v}$والذي يشمل النقطة التى لاحقتها $Z_A+e^{i\frac{\pi}{3}}$باستثناء النقطة A .

التمرين الرابع:7ن

دراسة الدالة حيث : $u(x)=x-ln(1+x)$

0.5 — ✓ $u'(x)=1-\frac{1}{(1+x)}=\frac{x}{1+x}$

من أجل x ينتمي إلى المجال $[0;+\infty[$ فإن $u'(x)>0$

ومنه الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة u :

0.5

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$0 \nearrow 1$

0.5 — ✓ من أجل x ينتمي إلى المجال $[0;+\infty[$ فإن $u(x)\geq 0$

0.25 — 2. أ) $f(x)=ln(x+e^{-x})=ln\left(\frac{xe^x+1}{e^x}\right)=-x+ln(xe^x+1)$

0.25 — ب) من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x)-ln(x)=ln(x+e^{-x})-lnx=ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)$

0.25 — جـ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-x+ln(xe^x+1)=+\infty$

0.25 — $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ln(x+e^{-x})=+\infty$

0 . 5

لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} ln(xe^{x}+1) = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحني (c_f)

0 . 5

3 . لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ln(x) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$

ومنه المنحني(Γ) مقارب للمنحني (c_f) في جوار $+\infty$.

4 . دراسة تغيرات الدالة f

0 .25

$f'(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$

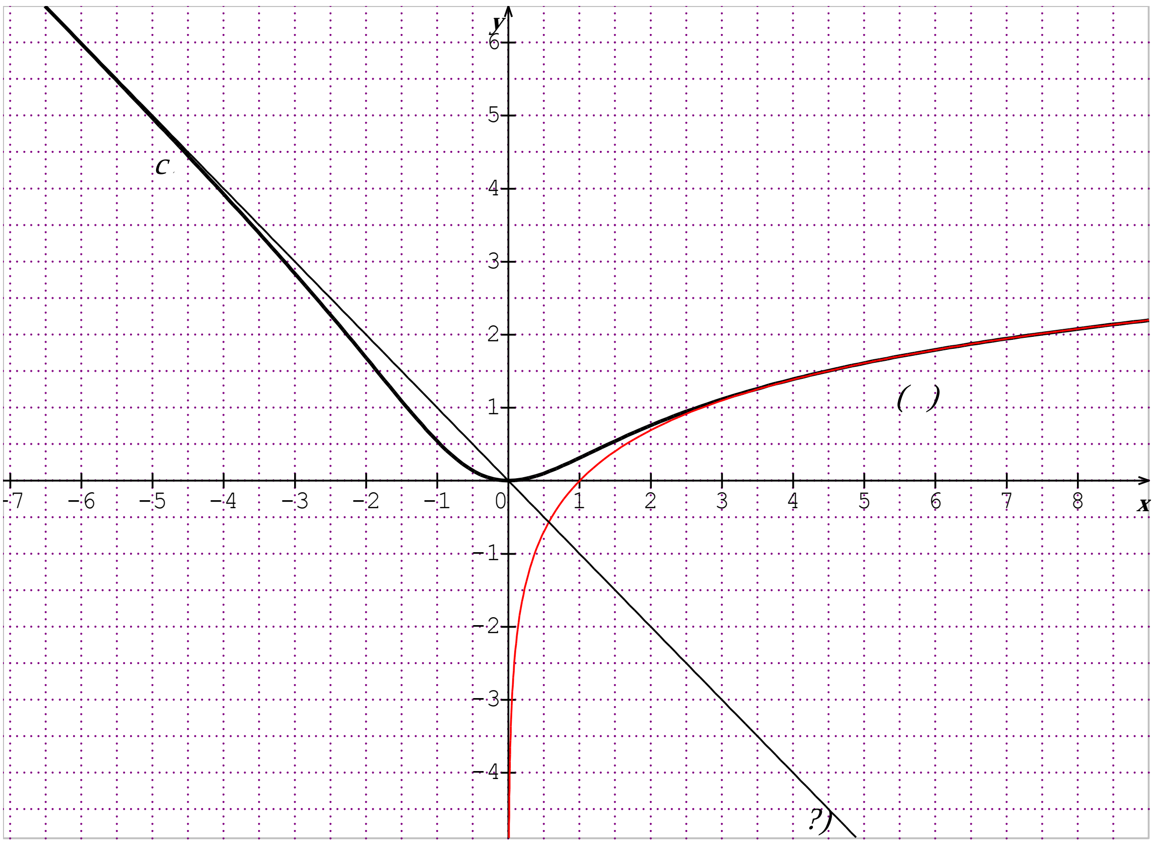
جدول تغيرات الدالة f

0 .25

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		-	0	+	
$u(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0 .5

0 .5



4. $u_n = \int_0^1 ln(1+x^n)\,dx$

0 . 5

1. أ) $u_1 = \int_0^1 ln(1+x)\,dx = [(x+1)ln(x+1) - x]_0^1 = 2ln2 - 1$

ب) البرهان أن: $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$

0 .25

- من أجل $n = 1$ نبين أن $0 \le u_1 \le \frac{1}{1+1}$ أي نبين أن $0 \le u_1 \le \frac{1}{2}$

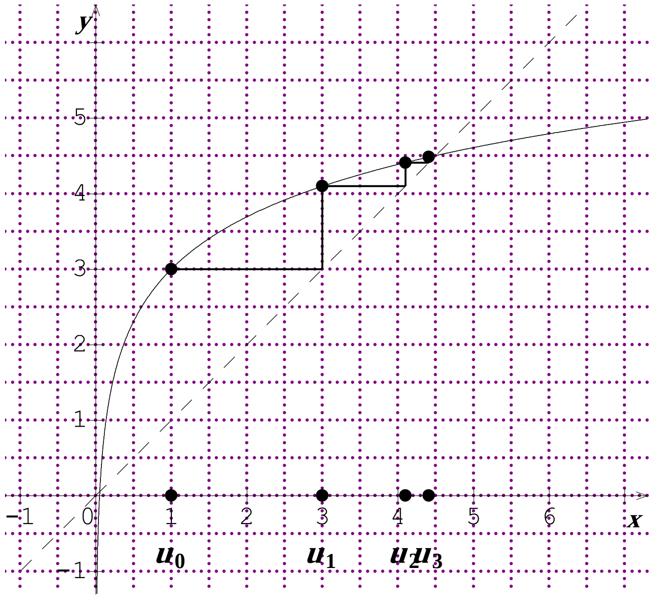
بما أن $_1 = 2ln2 - 1$ و $0 \le 2ln2 - 1 \le \frac{1}{2}$ فإن $0 \le u_1 \le \frac{1}{2}$

	0 . 5	-من أجل $n \in \mathrm{N}^*$ نفرض أن: $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ ثم نبرهن أن: $0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{n+2}$ $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$ يكافئ أن $0 \le \int_0^1 ln(1+x^n)\,dx \le \frac{1}{n+1}$ لدينا: من الجزء الأول (السؤال 01) أنه من أجل x ينتمي إلى المجال $[0;+\infty[$ فإن $x - ln(1+x) \ge 0$ لدينا: $x - ln(1+x) \ge 0$ يكافئ $x \ge ln(1+x)$ بما أن: $x^{n+1} \ge 0$ فإن $^{n+1} \ge ln(1+x^{n+1})$ ومنه $\int_0^1 ln(1+x^{n+1})\,dx \le \int_0^1 x^{n+1}\,dx$ ومنه $_{n+1} \le \left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$ ومنه $u_{n+1} \le \frac{1}{n+2}$ وبما أن $ln(1+x^{n+1}) \ge 0$ فإن $\int_0^1 ln(1+x^{n+1})\,dx \ge 0$ أي أن $u_{n+1} \ge 0$ إذن: $0 \le u_{n+1} \le \frac{1}{n+2}$ - حسب خاصية البرهان بالتراجع فإنه الخاصية "من أجل $n \in \mathrm{N}^*,\ 0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$" صحيحة
	0 . 5	جـ) رتابة المتتالية (u_n): $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 ln\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) dx$ المناقشة : - إذا كان $x = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة و $u_n = 0$. - إذا كان $x = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة $u_n = ln2$ - إذا كان $0 < x < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما - إذا كان $x > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما
	0 .25	• نهاية المتتالية (u_n): من أجل $x \in \Re_+^* - \{1\}$ بما أن $0 \le u_n \le \frac{1}{n+1}$, و $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ فإن: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

حل مختصر للموضوع الثاني للاختبار الأبيض، الثالثة تقني رياضي 2017 – 2018.

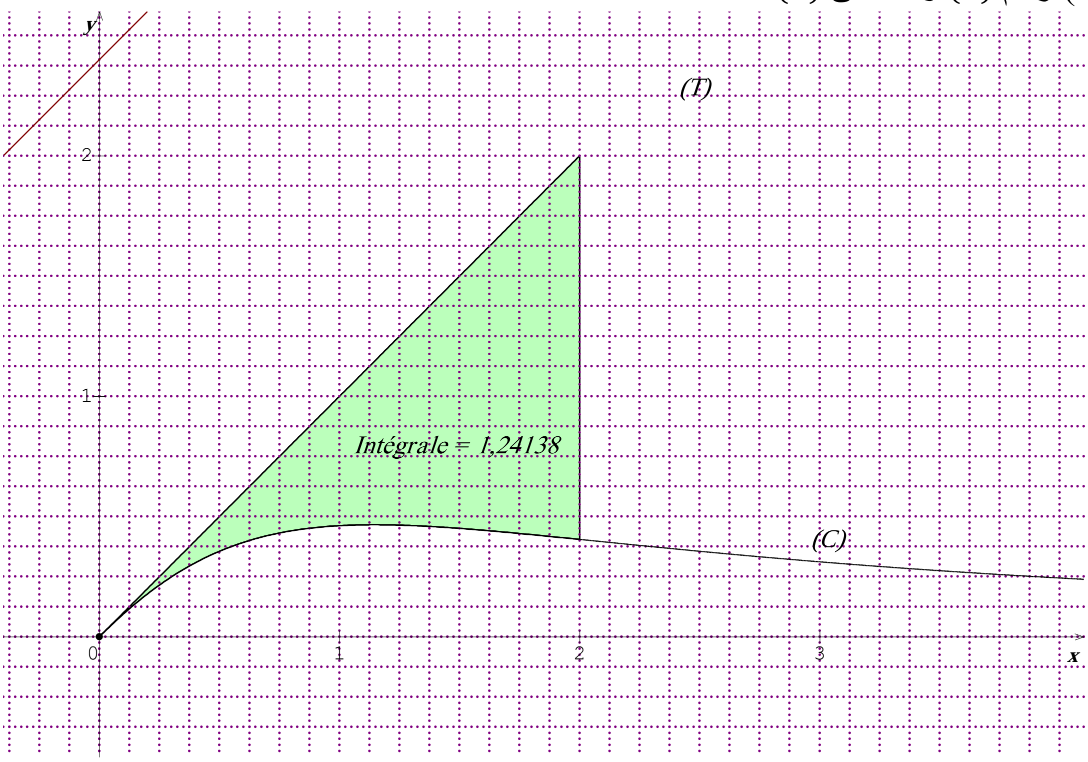
<table>
<tr><th>التمرين الأول: 4 نقاط</th><th>مجزأة</th><th>المجموع</th></tr>
<tr><td>1) أ) $P(A)=\frac{84}{504}=\frac{1}{6}$، $P(B)=1-\frac{A_5^3}{504}=\frac{37}{42}$.
ب) احتمال الحصول على كرة واحدة فقط حمراء هو $\frac{3\times A_4^1\times A_5^2}{504}=\frac{10}{21}$.</td><td>$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
0,5
0,75</td><td>2.25</td></tr>
<tr><td>2) أ) قانون احتمال Y:
<table>
<tr><td>y_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>المجموع</td></tr>
<tr><td>$p_i=P(Y=y_i)$</td><td>$\frac{16}{(n+4)^2}$</td><td>$\frac{8n}{(n+4)^2}$</td><td>$\frac{n^2}{(n+4)^2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>p_iy_i</td><td>0</td><td>$\frac{8n}{(n+4)^2}$</td><td>$\frac{2n^2}{(n+4)^2}$</td><td>$E(X)=\frac{2n}{n+4}$</td></tr>
</table>
ب) الأمل الرياضي: $E(X)=\frac{2n}{n+4}$
جـ) $n=21$</td><td>0,5
0,75
0,5</td><td>1.75</td></tr>
<tr><td>التمرين الثاني: 5 نقاط</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I) 1) حل المعادلة (E): $\Delta=-8$ إذن $S=\{\sqrt{2}+i\sqrt{2};\sqrt{2}-i\sqrt{2}\}$ حيث $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و$z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.
2) الشكل الأسي للعدد المركب $\frac{z_1}{z_2}=e^{\frac{i\pi}{2}}$.
3) قيم العدد الطبيعي n حيث $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا هي $n=2k$ حيث k عدد طبيعي .</td><td>1
0,5
0,25</td><td>1,75</td></tr>
<tr><td>II) 1) أ) لدينا: $h(B)=C$ إذن $z_C=-3(z_B-z_\Omega)+z_\Omega=-\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$
ب) لدينا $R(B)=D$ إذن $z_D=-i(z_B-z_O)+z_O=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.
2) إنشاء النقط Ω، A، B، C وD.
3) $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=i$ إذن $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ وأن $AC=AD$ المستقيمين (AD) و(AC) متعامدان.
4) الرباعي $ACED$ مربع لأن قطراه متناصفان، له زاوية قائمة وضلعان متتابعان متقايسان.</td><td>0,5
0,5
1
$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$
0,5</td><td>3,25</td></tr>
<tr><td>التمرين الثالث: 4 نقاط</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I) 1) تغيرات الدالة g وجدول تغيراتها:
لدينا $g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}$ ومنه g متناقصة تماما على المجال $[1;10]$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$1 \qquad\qquad 10$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$0 \qquad -$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$2 \searrow -7+ln(10)$</td></tr>
</table>
2) بتوظيف مبرهنة القيم المتوسطة نبين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا في المجال $[1;10]$.
التحقق أن: $4{,}50<\alpha<4{,}51$</td><td>0,25
0,25
0,25
0,25</td><td>1,25</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>0,25</td>
<td>
3) إشارة $g(x)$ حسب قم x:
<table>
<tr><td>x</td><td>$1 \quad \alpha \quad 10$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$+ \quad 0 \quad -$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2,75</td>
<td>0,75

0,25
0,75
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
0,25
0,25</td>
<td>
II) 1) أ) تمثيل الحدود على محور الفواصل:


ب) التخمين: من خلال تمثيل الحدود للمتتالية (u_n) المتتالية متزايدة ومتقاربة.
2)أ) البرهان بالتراجع أن من أجل عدد طبيعي n لدينا: $1 \le u_n < \alpha$.
ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$ لأن $1 \le u_n < \alpha$
ومن إشارة $g(x)$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
جـ) المتتالية (u_n) متقاربة كونها متزايدة ومحدودة $1 \le u_n < \alpha$.
3) استنتاج نهاية المتتالية (u_n): $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>التمرين الرابع: 7 نقاط</td>
</tr>
<tr>
<td>1,75</td>
<td>0,25
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$
0,25

0,25
0,25
0,25</td>
<td>
I) 1) تغيرات الدالة g وجدول تغيراتها: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
لدينا $g'(x) = 1 - e^x$ ومنه g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
<table>
<tr><td>x</td><td>$0 \qquad +\infty$</td></tr>
<tr><td>$g'(x)$</td><td>$0 \quad -$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$1 \searrow -\infty$</td></tr>
</table>
2) أ) بتوظيف مبرهنة القيم المتوسطة نبين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا في المجال $[1;10]$.
ب) التحقق أن: $1,14 < \alpha < 1,15$
3) إشارة $g(x)$ حسب قم x:
<table>
<tr><td>x</td><td>$0 \quad \alpha \quad +\infty$</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>$+ \quad 0 \quad -$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>0,5</td>
<td>II) 1)أ) إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$</td>
</tr>
</table>

3,75	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25 0,25 0,25 0,25	ب) نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$. 2)أ) التحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ نستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$. 3) إثبات أن: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$. استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$: $0{,}46<f(\alpha)<0{,}47$. 4) معادلة للماس (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي: $y=x$. 5) أ) بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$ حيث: $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$. ب) دراسة اتجاه تغير الدالة u: لدينا $u'(x)=-xe^{x}\leq 0$ عل المجال $]0;+\infty[$ ومنه u متناقصة تماما على $]0;+\infty[$. استنتاج إشارة $u(x)$ على المجال $]0;+\infty[$: بما أن u متناقصة على $]0;+\infty[$ و $u(0)=0$ فإن u سالبة على $]0;+\infty[$. جـ) استنتاج وضعية المستقيم (T) مع المنحنى $(\mathcal{C})$: مما سبق لدينا $f(x)-x=\frac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}\leq 0$ إذن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقع تحت المستقيم (T).
0,75	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	6) رسم (T) والمنحنى $(\mathcal{C})$: 
0,75	0,25 0,5	III) 1) f دالة مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل دوال أصلية على $]0;+\infty[$ ولتكن F دالة أصلية حيث $F(x)=\ln(x+e^{-x})$. 2) حساب المساحة: $\mathcal{A}=\int_0^2 \lvert f(x)-x\rvert dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\ln(x+e^{-x})\right]_0^2=4-\ln(2e^2-1)\,u.a$ $\mathcal{A}=16{,}86\,cm^2$