الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست | ثانويات تمنراست المقاطعة 27

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي | دورة : مـــــايو 2018

شعـــــبة : الرياضيات و تقني رياضي

اختبار في مادة الرياضيات | المـــدة : 4 ساعات و 30 دقيقة

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

1) أ-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10 ثم استنتج باقي قسمة A_n على 10 حيث

$$A_n = 1993^{16n+6} - 2\times 1439^{2n+3} + 2018$$

2) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$ ثم أستنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1}$ مضاعف للعدد 10 .

3) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\alpha 0\alpha\alpha 02}$ في النظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{\beta 612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 أوجد العددان $\alpha\ ;\ \beta$ ثم أكتب N في النظام العشري .

4) يحتوي كيس على 4 كريات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد .

أ - أحسب احتمال الحصول على رقمين مجموعها يساوي مجموع أرقام العدد 2017 .

ب - X المتغير العشوائي الذي يرفق عملية السحب بمجموع الرقمين المتحصل عليهما

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

التمرين الثاني (4 نقاط) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 3$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}}$.

1) أحسب الحدود u_1 و u_2 و u_3 ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على IN ثم أستنتج أنها متقاربة معيناً نهايتها .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب -أكتب بدلالة n كلا من $u_n\ ;\ v_n$ ثم أحسب $\lim u_n$.

ج-أحسب بدلالة n كلا من المجاميع التالية $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ و

$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \dots + 2^n v_n$ و $L_n = \ln(v_0) + \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n)$

التمرين الثالث (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ;B ; C ;D التي لواحقها على الترتيب

$z_A = 1+i$; $z_B = \overline{z_A}$; $z_C = i\sqrt{2}$; $z_D = e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

و لتكن النقطة L نظيرة النقطة C بالنسبة إلى D.

1) بين أن لاحقة النقطة L تساوي $-\sqrt{2}$.

2) أثبت أن النقط A ; B ; C ; L تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

3) نعتبر النقطة K ذات اللاحقة $z_K = -z_B$ و R الدوران ذات المركز O و يحول C إلى K.

عين قيس زاوية الدوران R ثم عين لاحقة النقطة L' صورة L بالدوران R محدداً طبيعة الرباعي $ABL'K$.

4) نعتبر التحويل النقطي T المعرف بـ : $T = R\circ h$ حيث h هو التحاكي الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه O .

حدد طبيعة التحويل T ثم عين عناصره المميزة .

5) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z - z_A| = |\overline{z} - 2z_D|$ حيث $\overline{z}$ مرافق z .

التمرين الرابع (7 نقاط)

I - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{1+x} - 2\ln(1+x)$.

أ - أدرس تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$.

ب-بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $-0{,}72 < \alpha < -0{,}71$

ج-استنتج إشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1,0[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول هي . $2\,cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها .

2) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أنشئ المنحنى (C_f) نضع $\alpha \approx -0{,}715$ و $f(\alpha) \approx -2{,}46$.

4) ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما نضع $I(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(t)dt$

أ - أعط تفسيراً هندسيا للعدد $I(\lambda)$ حسب قيم العدد الحقيقي λ

ب -بملاحظة أنه من أجل كل x عدد حقيقي من $]1\ ;+\infty[$: $\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$

أحسب $I(\lambda)$ باستعمال التكامل بالتجزئة ثم احسب $\lim_{x\to +\infty} I(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n - 2^n$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq 0$ ثم أستنتج أن (u_n) متناقصة .

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 2^n - u_n$.

أ - بين أن (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

ب -عبر عن كلا من u_n و v_n بدلالة n.

3) أ- أحسب $\lim u_n$ ماذا تستنتج ؟

ب-أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

4) أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5 و بواقي قسمة 3^n على 4

ب-عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $2018 + 1962^{2n} + 1439^n \equiv 0[5]$

التمرين الثاني (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و نعتبر النقط A ; B ; C ; D ; E التي لواحقها على الترتيب $z_A = 1$ و $z_B = 4 + i$ و $z_C = 3i$ و $z_D = -1 + i$ و $z_E = -2i$.

1) بين أن $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم استنتج أنه يوجد تحويل نقطي T يحول D إلى E و يحول B إلى C يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .

2) عين لاحقة النقطة C' صورة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z صورتها M' ذات اللاحقة z' بالتشابه S.

بين أن $z' = \frac{1}{2}[(1+i)z + 1 - i]$.

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $z = (1+i)(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

أ - عين طبيعة مجموعة النقط (Γ) لما θ يمسح المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

ب -اوجد طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S.

5) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\arg(z - z_B) - \arg(z - z_A) \equiv \pi[2\pi]$

عين طبيعة مجموعة النقط (γ) .

التمرين الثالث (4 نقاط):

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(12;7;-13)$ و $B(3;1;2)$ و المستويان $(P_1):3x+2y-5z-1=0$ و $(P_2):x+y-2z=0$.

1) بين المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و شعاع توجيهه $\vec{v}(1;1;1)$.

2) أثبت أن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1).

3) ليكن (Q) المستوي المعرف بتمثيله الوسيطي التالي $(\alpha;\beta)\in IR^2$: $\begin{cases} x=2\alpha-2\beta+6 \\ y=2\alpha+3\beta+5 \\ z=2\alpha-6 \end{cases}$

أ - بين أن (Q) و (P_1) متوازيان

ب- تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $3x+2y-5z=58$.

ج-تحقق أن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي للمستوي (Q) ثم أستنتج أن (Q) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

4) أ-بين أن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي سطح كرة يطلب تعين عناصره المميزة .

ب-عين طبيعة مجموعة نقاط تقاطع (S) و المستوي (Q).

التمرين الرابع (7 نقاط):

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{1}{1+e^{-x}}=1-\frac{1}{e^x+1}$ ثم بين أن f دالة فردية .

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على IR^+

4) أستنتج انه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$.

5) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]$ ثم فسر النتيجة هندسياً

6) أنشئ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+1$ و المنحنى (C_f).

7) أ-بين أن الدالة $x\mapsto\ln\left(e^{-x}+1\right)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto-\frac{1}{e^x+1}$ على IR

ب-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$; $x=0$

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل لاختبار الرياضيات الامتحان التجريبي 2018 – شعبة الرياضيات و التقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

5) أ-دراسة بواقي قسمة العدد 3^n على 10 لدينا $3^0 \equiv 1[10]$

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	$[10]$

باقي قسمة 3^n على 10

لما $n=4k$ هو 1

و لما $n=4k+1$ هو 3

و لما $n=4k+2$ هو 9

و لما $n=4k+3$ هو 7

استنتاج باقي قسمة A_n على 10 : لدينا $1993 \equiv 3[10]$ و منه $1993^{16n+6} \equiv 3^{16n+6}[10]$ يعني أن $1993^{16n+6} \equiv 3^{4(4n+1)+2}[10]$ من ما سبق نجد أن $1993^{16n+6} \equiv 9[10]$

و لدينا $1439 \equiv -1[10]$ و منه $1439^{2n+3} \equiv -1[10]$ إذن $-2\times 1439^{2n+3} \equiv 2[10]$

و $2018 \equiv 8[10]$

بالجمع نجد $1993^{16n+6} - 2\times 1439^{2n+3} + 2018 \equiv 9+2+8[10]$ و منه $A_n \equiv 9\ [10]$

باقي قسمة A_n على 10 هو 9

6) إثبات انه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$

لدينا $1439 \equiv 9[10]$ أي أن $1439 \equiv 3^2[10]$ بالرفع إلى قوى n نجد $1439^n \equiv 3^{2n}[10]$ بالضرب في $3n+4$ نجد $(3n+4)\times 1439^n \equiv 3^{2n}(3n+4)[10]$.......(1)

و لدينا $2017 \equiv -3\ [10]$ بالرفع إلى قوى $2n+1$ نجد $2017^{2n+1} \equiv -3^{\,2n+1}[10]$.......(2)

بجمع (1) و (2) نجد $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+4) - 3^{2n}\times 3[10]$ أي أن $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$

استنتاج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1}$ مضاعف للعدد 10 :

يعني أن $(3n+4)\times 1439^n + 2017^{2n+1} \equiv 0\ [10]$ مما سبق نجد أنه يعني أن $3^{2n}(3n+1) \equiv 0\ [10]$ بما أن 3 و 10 أوليان فيما بينهما فحسب نظرية غوس $3^{2n}(3n+1) \equiv 0\ [10]$ يكافئ $(3n+1) \equiv 0\ [10]$ يكافئ $3n \equiv -1\ [10]$ بالضرب في 3 نجد $9n \equiv -3\ [10]$ و $9 \equiv -1\ [10]$ إذن $-n \equiv -3\ [10]$ بالضرب في -1 نجد $n \equiv 3\ [10]$ أي أن $n = 3+10k$ و k عدد طبيعي .....

7) N عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\alpha0\alpha\alpha02}$ في النظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{\beta612}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7

ننشر N في النظامين ثلاثة و سبعة نجد

$N=2+9\alpha+27\alpha+243\alpha+729\alpha$ و منه $N=2+1008\alpha$

$N=2+7\times1+49\times6+343\times\beta$ و منه $N=303+343\beta$

و منه $2+1008\alpha=303+343\beta$ أي أن $343\beta=1008\alpha-301$

α عدد طبيعي أصغر تماما من 3

لما $\alpha=1$ نجد أن $343\beta=1008-301$ أي أن $\beta=\dfrac{707}{343}$ مرفوض

لما $\alpha=2$ نجد أن $343\beta=2016-301$ أي أن $\beta=5$ مقبول

و منه $N=2018$.

8) يحتوي كيس على 4 كريات مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10 نسحب عشوائياً كرتين في آن واحد .

ت -حساب احتمال الحادثة A "الحصول على رقمين مجموعها يساوي مجموع أرقام العدد 2017 "

+	1	3	7	9
1				
3	4			
7	8	10		
9	10	12	16	

$P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

ث - X المتغير العشوائي الذي يرفق عملية السحب بمجموع الرقمين المتحصل عليها قيمه هي 4 و 8 و 10 و 12 و 16 .

قانون الاحتمال

x_i	4	8	10	12	16
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{6}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{6}$

حساب أمل ألرياضياتي : $E(X)=4\left(\dfrac{1}{6}\right)+8\left(\dfrac{1}{6}\right)+10\left(\dfrac{2}{6}\right)+12\left(\dfrac{1}{6}\right)+16\left(\dfrac{1}{6}\right)$ و منه $E(X)=10$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

4) حساب الحدود u_1 و u_2 و u_3 : $u_1=\sqrt{\dfrac{1+u_0^2}{2}}=\sqrt{5}$ و $u_2=\sqrt{\dfrac{1+u_1^2}{2}}=\sqrt{3}$ و

$u_3=\sqrt{\dfrac{1+u_2^2}{2}}=\sqrt{2}$

البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>1$: لدينا $u_0>1$ محققة لان $3>1$

نفرض أن $u_n > 1$ و لنبرهن أن $u_{n+1} > 1$

$u_n > 1$ بالتربيع نجد $u_n^2 > 1$ بإضافة 1 نجد $1+u_n^2 > 2$ بالقسمة على 2 نجد $\frac{1+u_n^2}{2} > 1$ بالجذر نجد $\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} > 1$

و منه نجد $u_{n+1} > 1$ محققة

و منه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

5) إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على IN : لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$ و منه نجد

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\frac{1+u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1-u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{(1+u_n)(1-u_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$ بما أن $u_n > 1$ فإن

(u_n) متناقصة .

بما أن (u_n) متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

و لتكن نهايتها هي l : $\lim u_{n+1} = \lim\sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$ يعني أن $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$ يكافئ $l^2 = 1$ و منه $l = 1$

6) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n^2 - 1$

ت -إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول :

$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1+u_n^2}{2} - 1 = \frac{u_n^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول

$v_0 = u_0^2 - 1 = 8$

ث -الكتابة بدلالة n كلا من u_n ; v_n : $v_n = v_0.q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-3}}$ و لدينا $v_n = u_n^2 - 1$ و منه

$u_n = \sqrt{v_n + 1}$ و منه $u_n = \sqrt{\frac{1}{2^{n-3}} + 1}$

حساب النهاية $\lim u_n = 1$.

ج-حساب بدلالة n كلا من المجاميع التالية :

- لدينا

$v_n = u_n^2 - 1$ و منه $u_n^2 = 1 + v_n$ و منه $S_n = (1+v_0)+(1+v_1)+(1+v_2)+\ldots+(1+v_n)$ أي أن

$S_n = (n+1) + v_0 \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}$ و منه $S_n = (n+1)+16\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$

- حساب المجموع T_n لدينا $v_n = \dfrac{1}{2^{n-3}}$ و منه $w_n = 2^n v_n = 2^3 = 8$ إذن (w_n) متتالية ثابتة إذن

$T_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + ... + 2^n v_n$ أي $T_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ و منه $T_n = 8(n+1)$

- حساب المجموع L_n و لدينا $v_n = \dfrac{1}{2^{n-3}}$ و منه $k_n = \ln(v_n) = (3-n)\ln(2)$ إذن (k_n) متتالية حسابية أساسها $\ln(2)$

و منه $L_n = \ln(v_0)+\ln(v_1)+\ln(v_2)+....+\ln(v_n)$ أي أن $L_n = k_0 + k_1 + k_2 + ... + k_n$ و منه

$L_n = \dfrac{n+1}{2}[k_0 + k_n]$ إذن $L_n = \dfrac{n+1}{2}[3\ln(2)+(3-n)\ln(2)]$

و منه $L_n = \dfrac{(n+1)(6-n)\ln(2)}{2}$.

التمرين الثالث (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ;B ;C ;D التي لواحقها على الترتيب

$z_A = 1+i$; $z_B = \overline{z_A}$; $z_C = i\sqrt{2}$; $z_D = e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

و لتكن النقطة L نظيرة النقطة C بالنسبة إلى D.

6) إثبات أن لاحقة النقطة L تساوي $-\sqrt{2}$: لدينا النقطة L نظيرة النقطة C بالنسبة إلى D يعني أن $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{DC}$ يعني

أن $z_D - z_L = z_C - z_D$ و منه $z_L = 2z_D + z_C$ أي $z_L = 2e^{\frac{3\pi}{4}i} + i\sqrt{2}$

يكافئ $z_L = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\sqrt{2} = -\sqrt{2}$ و هو المطلوب .

7) إثبات أن النقط A ; B ; C ; L تنتمي إلى نفس الدائرة (C) بما أن

$|z_A| = \sqrt{2}$; $|z_B| = \sqrt{2}$; $|z_C| = \sqrt{2}$; $z_L = \sqrt{2}$ فإن النقط تنتمي إلى الدائرة (C) ذات المركز O و نصف القطر $\sqrt{2}$.

8) نعتبر النقطة K ذات اللاحقة $z_K=-z_B$ و R الدوران ذات المركز O و يحول C إلى K أي أن

$R(O)=O\ ;\ R(C)=K$ يعني أن زاوية الدوران هي $\arg\left(\frac{z_K}{z_C}\right)$ لدينا

$\left(\frac{z_K}{z_C}\right)=\left(\frac{-z_B}{z_C}\right)=\left(\frac{-1+i}{i\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}$ و منه $\arg\left(\frac{z_K}{z_C}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ و هي زاويتي الدوران R .

تعين لاحقة النقطة L' صورة L بالدوران R : العبارة المركبة هي $z'=e^{\frac{\pi}{4}i}z$ و منه $z_{L'}=e^{\frac{\pi}{4}i}z_L$ أي أن

$z_{L'}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\sqrt{2}\right)$ و منه $z_{L'}=-1-i$.

طبيعة الرباعي $ABL'K$: لدينا $z_{L'}=-z_A\ ;\ z_K=-z_B$ و منه $|z_K-z_B|=|z_{L'}-z_A|=2|z_A|=2\sqrt{2}$ إذن قطرا الرباعي متقايسان و

$\left(\overrightarrow{KB};\overrightarrow{L'A}\right)=\arg\left(\frac{z_A-z_{L'}}{z_B-z_K}\right)=\arg\left(\frac{2z_A}{2z_B}\right)=\arg\left(\frac{z_A}{\overline{z_A}}\right)=2\arg(z_A)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ و منه $ABL'K$ هو مربع قطراه متقايسان و متعامدان

9) نعتبر التحويل النقطي T المعرف بـ : $T=R\circ h$ حيث h هو التحاكي الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه O .

لدينا

$\underbrace{z\overset{h}{\longmapsto}z_1\overset{R}{\longmapsto}z'}_{T}$ أي أن $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}z \\ z'=e^{\frac{\pi}{4}i}z_1\end{cases}$ و منه $z'=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z$ ومنه T هو التشابه المباشر الذي نسبته $\sqrt{2}$ و مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

10) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-2z_D|$ يعني أن

$|z-z_A|=|z-2\overline{z_D}|$ يعني أن $MA=MN$ حيث N النقطة ذات اللاحقة $2\overline{z_D}$ و منه مجموعة النقط (Γ) هي محور القطعة المستقيمة $[AN]$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

III - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=\frac{x}{1+x}-2\ln(1+x)$.

ب- دراسة تغيرات الدالة g على $]-1;+\infty[$.

النهايات : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ و $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{x-2(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$ و منه

$\lim_{x\xrightarrow{>}-1}g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{x-2(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$ أي أن $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{x}{1+x}=-\infty$

لان $\lim_{x\xrightarrow{>}-1}(1+x)\ln(1+x)=0$

المشتقة : $g'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{2}{1+x}=\dfrac{-1-2x}{(1+x)^2}$ إشارتها سالبة على المجال $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و منه

الدالة g متناقصة على هذا المجال و متزايدة على المجال $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right]$.

ت -إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $-0{,}72<\alpha<-0{,}71$

بما أن $g(0)=0$ منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل معدوم .

و لدينا $g(-0{,}71)=0{,}03$ و $g(-0{,}72)=-0{,}03$ بما الدالة g متزايدة تماما على $\left]-1;-\dfrac{1}{2}\right]$ و

$g(-0{,}72)\times g(-0{,}71)<0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث

$-0{,}72<\alpha<-0{,}71$

ج-استنتاج إشارة $g(x)$:

x	-1		α		0		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$-$	

IV - نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-1{,}0\,[\cup]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$

5) حساب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=0$.بالتزيد المقارن و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\dfrac{1}{1+x}\times\dfrac{1}{x}\right]=+\infty$ و

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\times\dfrac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left[\dfrac{1}{1+x}\times\dfrac{1}{x}\right]=-\infty$

6) دراسة تغيرات الدالة f : $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{1+x}-2x\ln(1+x)}{x^4}=\dfrac{x.g(x)}{x^4}$ و منه إشارتها من إشارة البسط

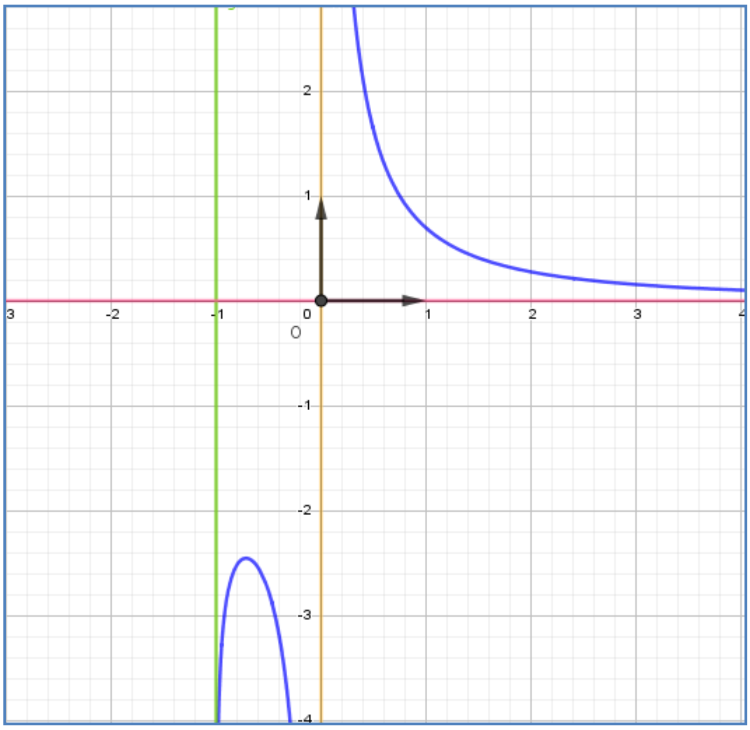
من جدول الإشارة نستنتج أن f متزايدة على المجال $]-1;\alpha]$ و متناقصة على المجالين $[\alpha;0[$ و $]0;+\infty[$.

x	-1		α		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
إشارة x		$-$		$-$	0	$+$	
إشارة $x.g(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

جدول تغيراتها :

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

7) إنشاء المنحنى (C_f)



8) ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما نضع

$$I(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(t)dt$$

ت-تفسيراً هندسيا للعدد $I(\lambda)$ حسب قيم العدد الحقيقي λ:

- لما $\lambda>1$ فإن $I(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلتها $x=1\ ;\ x=\lambda\ ;\ y=0$.
- لما $0<\lambda<1$ فإن $-I(\lambda)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلتها $x=1\ ;\ x=\lambda\ ;\ y=0$.

ث-بملاحظة أنه من أجل كل x عدد حقيقي من $]1\ ;+\infty[$: $\dfrac{1}{x(1+x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}$

حساب $I(\lambda)$: $I(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(t)dt=\int_1^{\lambda}\dfrac{\ln(1+t)}{t^2}dt=-\left.\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right]_1^{\lambda}+\int_1^{\lambda}\dfrac{1}{t(1+t)}dt$ و منه

$I(\lambda)=-\dfrac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}+\ln(2)+\int_1^{\lambda}\left[\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{1+t}\right]dt$ إذن $I(\lambda)=-\dfrac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}+\ln(2)+\left[\ln(t)-\ln(1+t)\right]_1^{\lambda}$ و منه

$I(\lambda)=-\dfrac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}+\ln(2)+\ln\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$ و منه . $I(\lambda)=-\dfrac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}+2\ln(2)+\ln\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right)$.

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} I(\lambda)$: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)=2\ln(2)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

5) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=0$ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3u_n-2^n$.

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 0$: لدينا $u_0\le 0$ محققة

نفرض أن $u_n\le 0$ و لبرهن أن $u_{n+1}\le 0$

$u_n\le 0$ يعني أن $3u_n\le 0$ و منه $3u_n-2^n\le -2^n$ و $-2^n\le 0$ و منه $u_{n+1}\le 0$ محققة إذن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 0$.

لدينا $u_{n+1}-u_n=2u_n-2^n=2\left(u_n-2^{n-1}\right)$ و $u_n\le 0$ إذن الفرق سالب إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

6) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=2^n-u_n$.

ت - إثبات أن (v_n) هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول : لدينا . $v_{n+1}=2^{n+1}-u_{n+1}=2\times 2^n-3u_n+2^n$ يعني أن $v_{n+1}=2^{n+1}-u_{n+1}=3\times 2^n-3u_n=3\left(2^n-u_n\right)=3v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 و حدها الأول $v_0=2^0-u_0=1$.

ث -تعبير عن كلا من u_n و v_n بدلالة n: $v_n=3^n$ و $u_n=2^n-3^n$

7) أ- حساب $\lim u_n=\lim\left[2^n-3^n\right]=\lim 3^n\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right]=-\infty$ و منه المتتالية (u_n) متباعدة .

ب-حساب المجموع S_n بدلالة n حيث $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ و منه

$S_n=\left(2^0-3^0\right)+(2-3)+\left(2^2-3^2\right)+\ldots+\left(2^n-3^n\right)$ و منه $S_n=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}-\frac{1-3^{n+1}}{1-3}$ أي أن

$S_n=-1+2^{n+1}+\frac{1}{2}\left(1-3^{n+1}\right)$ إذن $S_n=-\frac{1}{2}+2^{n+1}-3^{n+1}$.

8) أ-الدراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 5

$n=$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	
$2^n\equiv$	1	2	4	3	$[5]$

و منه لما $n=4k$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 1 و لما $n=4k+1$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 2 لما $n=4k+2$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 4 و لما $n=4k+3$ فإن باقي قسمة 2^n على 5 هو 3.

و بواقي قسمة 3^n على 4

$n=$	$2k$	$4k+1$	
$3^n\equiv$	1	3	$[4]$

و منه لما $n=2k$ فإن باقي قسمة 3^n على 4 هو 1 و لما $n=2k+1$ فإن باقي قسمة 3^n على 4 هو 3.

ب-تعين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $2018+1962^{2n}+1439^n\equiv 0[5]$ لدينا $2018\equiv 3[5]$ و $1962\equiv 2[5]$ و منه $2^{2n}\equiv 0[5]$ و $1439\equiv 9[5]$ و منه $1439^n\equiv 3^{2n}[5]$ إذن

يكافئ أن $2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 3+2^{2n}+3^{2n}[5]$

و لدينا $2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 3+4^n+9^n[5]$ و $9 \equiv 1[5]$ و $4 \equiv -1[5]$ و منه $9^n \equiv 1[5]$ أي أن

$2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 4+(-1)^n[5]$ حتى يكون $2018+1962^{2n}+1439^n \equiv 0[5]$ يجب أن

يكون n عدد زوجي .

التمرين الثالث (5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ و نعتبر النقط A ; B ; C ; D ; E التي لواحقها على الترتيب $z_A=1$ و $z_B=4+i$ و $z_C=3i$ و $z_D=-1+i$ و $z_E=-2i$.

6) إثبات أن $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}$ لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3i-1}{4+i-1}=\frac{3i-1}{3+i}=\frac{i(3+i)}{3+i}=i$ و

$\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-2i-1}{-1+i-1}=\frac{i(-2+i)}{-2+i}=i$ و منه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}$.

نستنتج أنه يوجد تحويل نقطي T يحول D إلى E و يحول B إلى C و هو الدوران الذي مركزه A و زاويته $\arg(i)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

7) تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$ و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$z_{C'}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z_C+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)z_A$ و منه $z_{C'}=\frac{1}{2}(1+i)3i+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=i-1$

8) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z صورتها M' ذات اللاحقة z' بالتشابه S.

إثبات أن $z'=\frac{1}{2}\left[(1+i)z+1-i\right]$ لدينا $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}z+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)z_A=\frac{1}{2}(1+i)z+\frac{1}{2}(1-i)$ و منه

$z'=\frac{1}{2}\left[(1+i)z+1-i\right]$.

9) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $z=(1+i)\left(1+e^{i\theta}\right)$ حيث $\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

ت -تعيين طبيعة مجموعة النقط (Γ) لما θ يمسح المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا $z=(1+i)+(1+i)e^{i\theta}$ و منه

$z-(1+i)=(1+i)e^{i\theta}$ يعني أن $|z-(1+i)|=|1+i|$ يعني أن $|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ يعني أن $MD=\sqrt{2}$ و

منه لما θ يمسح المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ هي قوس من دائرة أي هي ربع الدائرة ذات المركز D و نصف القطر $\sqrt{2}$

ث- طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S هي ربع دائرة مركزها هو D' ذو اللاحقة

$z_{D'}=\frac{1}{2}\left[(1+i)^2+1-i\right]=\frac{1}{2}(1+i)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=1$

10)لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $\arg(z-z_B)-\arg(z-z_A)\equiv\pi[2\pi]$

طبيعة مجموعة النقط (γ) : $\arg(z-z_B)-\arg(z-z_A)\equiv\pi[2\pi]$ يكافئ $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)\equiv\pi[2\pi]$ يكافئ $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})\equiv\pi[2\pi]$ مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الثالث (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقطتين $A(12;7;-13)$ و $B(3;1;2)$ و المستويان $(P_1):3x+2y-5z-1=0$ و $(P_2): x+y-2z=0$.

5) إثبات أن المستويان (P_1) و (P_2) متقاطعان بما أن شعاعيهما الناظميان على الترتيب $\overrightarrow{n_1}(3;2;-5)$ و $\overrightarrow{n_2}(1;1;-2)$ غير مرتبطان خطيا لأن $\frac{3}{1}\neq\frac{2}{1}$ فهما متقاطعان وفق مستقيم

$B\in(P_1)$ يعني أن $3(3)+2(1)-5(2)-1=0$ أي أن $0=0$ محققة

$B\in(P_2)$ يعني أن $(3)+(1)-2(2)=0$ أي أن محققة و منه B تنتمي إلى مستقيم التقاطع .

لدينا $\overrightarrow{n_1}.\vec{v}=3+2-5=0$ و $\overrightarrow{n_2}.\vec{v}=1+1-2=0$ و منه شعاع توجيه مستقيم التقاطع هو $\vec{v}(1;1;1)$

6) إثبات أن B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P_1) : يعني أن $B\in(P_1)$ محققة

و $\overrightarrow{AB}(-9;-6;15)$ مرتبط خطيا مع $\overrightarrow{n_1}(3;2;-5)$ لدينا $\frac{-9}{3}=\frac{-6}{2}=\frac{15}{-5}=-3$ و منه محققة.

7) ليكن (Q) المستوي المعرف بتمثيله الوسيطي التالي $(\alpha;\beta)\in IR^2$: $\begin{cases}x=2\alpha-2\beta+6\\ y=2\alpha+3\beta+5\\ z=2\alpha-6\end{cases}$

ت- إثبات أن (Q) و (P_1) متوازيان يعني أن الشعاع $\overrightarrow{n_1}(3;2;-5)$ عمودي على الشعاعين المعينين للمستوي (Q) و هما $\overrightarrow{v_1}(2;2;2)$ و $\overrightarrow{v_2}(-2;3;0)$:

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{v_1}=3(2)+2(2)-5(2)=0$ و $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{v_2}=3(-2)+2(3)-5(0)=0$ محققة .

ث -التحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) هي $3x+2y-5z=58$ نعوض التمثيل الوسيطي في المعادلة الديكارتية

$3(2\alpha-2\beta+6)+2(2\alpha+3\beta+5)-5(2\alpha-6)=58$ يكافئ $58=58$ محققة .

ج-التحقق أن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تنتمي للمستوي (Q) : لدينا $I\left(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2}\right)$ بالتعويض في المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) : $3\left(\frac{15}{2}\right)+2(4)-5\left(-\frac{11}{2}\right)=58$ محققة

و بما أن $\overrightarrow{n_1}(3;2;-5)$ الشعاع الناظمي للمستوي (Q) و $\overrightarrow{AB}(-9;-6;15)$ مرتبطان خطيا و المستوي يشمل I فهو المستوي المحور للقطعة المستقيمة $[AB]$.

8) أ-إثبات أن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي سطح كرة ذات القطر $[AB]$

أو بطريقة أخرى $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ يكافئ $(x-12)(x-3)+(y-7)(y-1)+(z+13)(z-2)=0$ يكافئ

$x^2+y^2+z^2-15x-8y+11y+17=0$ و هي سطح الكرة الذي مركزه $I\left(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2}\right)$ و نصف قطره

$\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{342}}{2}$

ب-تعيين طبيعة مجموعة نقاط تقاطع (S) و المستوي (Q) بما أن I نقطة من المستوي (Q) يعني أن (S) و المستوي (Q) يتقاطعان وفق دائرة مركزها $I\left(\frac{15}{2};4;-\frac{11}{2}\right)$ و نصف قطرها هو $\frac{\sqrt{342}}{2}=\frac{AB}{2}$.

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بـ $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1-\frac{1}{e^x+1}=\frac{1}{1+e^{-x}}$

لدينا بتوحيد المقامات نجد $\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}}+1}=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ محققة .

بما أن IR متناظرة بالنسبة O و

$$f(-x)=1-\frac{1}{2}(-x)-\frac{2}{e^{-x}+1}=1+\frac{1}{2}x-2\left[1-\frac{1}{e^x+1}\right]=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1}=-f(x)$$

فإن f دالة فردية .

9) حساب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right]=-\infty$

10)إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$:

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}=-\frac{(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$$ محققة

- جدول تغيرات الدالة f على IR^+ بما أن $f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ فإن الدالة f متناقصة على IR^+

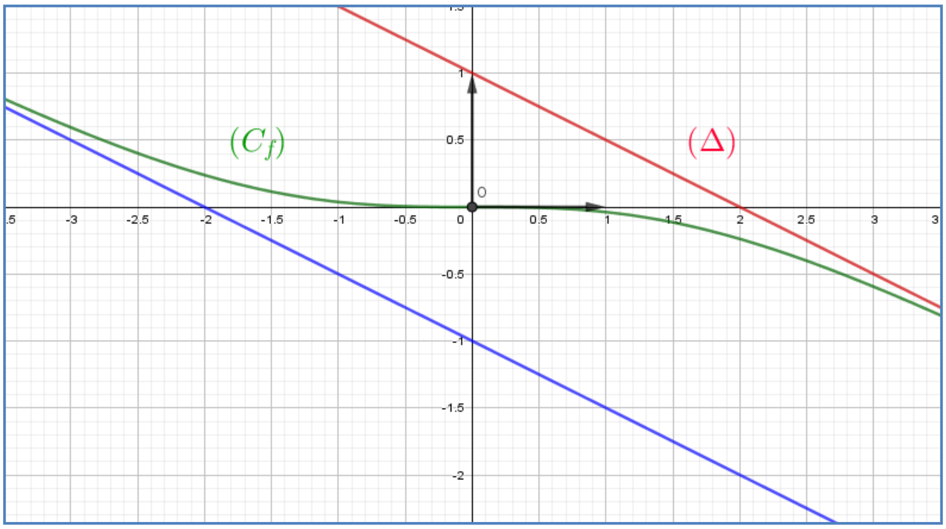
x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

11)استنتاج انه من أجل كل عدد حقيقي موجب x :

$1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$ من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن الدالة تقبل قيمة حدية كبرى هي 0 أي أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x : $f(x)\leq 0$ أي أن $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$.

12)حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]$: $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2}{e^x+1}=0$

التفسير الهندسية : من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب معادلته $y=1-\frac{1}{2}x$ جهة $+\infty$.



13)إنشاء المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+1$ و المنحنى (C_f):

14)أ-إثبات أن الدالة $x\mapsto \ln(e^{-x}+1)$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto -\frac{1}{e^x+1}$ على IR بالاشتقاق:

$x\mapsto \ln(e^{-x}+1)$ دالتها المشتقة هي $x\mapsto \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}$ بالضرب في e^x في البسط و المقام نجد $x\mapsto \frac{-1}{1+e^x}$ و منه محققة .

ب-حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمان اللذان معادلاتهما $x=1$; $x=0$

$A=\int_0^1 -f(t)dt=\int_0^1\left[-1+\frac{1}{2}t+\frac{2}{e^t+1}\right]dt=\left[-t+\frac{1}{4}t^2-2\ln(e^{-t}+1)\right]_0^1$ و منه

$$A=\left[-\frac{3}{4}-2\ln\left(\frac{1}{e}+1\right)+2\ln(2)\right]u.a\approx 0{,}01u.a$$

انتهى الموضوع الثاني