الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مـديرية التربية بولاية تمنراست　　　　ثانويات تمنغست المقاطعة 27

امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي　　　　الموسم الدراسي : 2018/2017

الشعبــــة : الثالثة علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات　　　　المــــــــدة: 3 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط) :

(u_n) متتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

1 - أ- أحسب u_1 و u_2

ب-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

2 - لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

ب -أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثمّ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

3 - (w_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{3}{u_n}$ نضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$.

أ - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$.بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$

ب -أحسب نهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

تتكون مؤسسة تربوية من أساتذة و تلاميذ و إداريين، حيث 9% منهم أساتذة ، و 85% تلاميذ ، و 40% . من الأساتذة ذكور، و 65% من التلاميذ إناث ، و 75% من الإداريين ذكور.

- نختار عشوائيا شخصا من المؤسسة .

نرمز بـ T للحادثة (اختيار أستاذ) ، وE للحادثة (اختيار تلميذ) ،و A للحادثة (اختيار إداري)

ونرمز بـ H للحادثة (اختيار ذكر) ،و F للحادثة (اختيار أنثى)

1) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه التجربة.
2) ما احتمال أن يكون الشخص المختار أستاذة.
3) ما احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى.
4) علما أن الشخص المختار ذكر فما هو احتمال أن يكون تلميذ.　　　　(تعطى النتائج على شكل كسر)

التمرين الثالث (5 نقاط):

1. حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة ذات المجهولين z_1 , z_2 حيث : $\begin{cases} z_1+\sqrt{3}z_2=-4i \\ -\sqrt{3}z_1+z_2=4 \end{cases}$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\sqrt{3}-i$ و $z_B=1-i\sqrt{3}$

أ)اكتب العدد ين المركبين z_A و z_B على الشكل الآسي .

ب) عين زاوية الدوران الذي مركزه O و يحول A إلى B، ثم أستنتج طبيعة المثلث OAB

ج) بين أن $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{2018}=-1$, ثم أحسب $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{2018}+\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2018}$

3) لتكن النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و M من المستوي ذات اللاحقة z .

- تحقق أن $AB=2\sqrt{2}$ ثم بين أن $MA^2+MB^2=2MG^2+4$
- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2+MB^2=8$

التمرين الرابع (7 نقاط):

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=-x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}$.

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بيّن أنّ $x=0$ معادلة مستقيم مقارب .

2) تحقق أن $f(x)=-x+\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ ثم استنتج ان المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) ; (Δ') معادلتهما على الترتيب $y=-x$ و $y=-x+1$

3) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكل جدول تغيّراتها .

4) بين إن $w\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C) , وأنّ المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث. $1<\alpha<1{,}2$

5) أنشئ (C) .

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $(1-m)(e^{2x}-1)+1=0$

7) اثبت أن مساحة الحيز بالمنحى (C) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x=4$; $x=2$.

هي $A=\left(6-\frac{1}{2}\ln(e^4+1)\right)(u.a)$

انتهى الموضوع الأول.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط) :

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $f(x)=\dfrac{2x}{2x+1}$.

أدرس اتجاه تغير الدالة f .

II - لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1}=f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه و من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$.

2) تحقق أن : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ ، ثم أستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

3) نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على N : $v_n=\dfrac{2^n\times u_n}{2u_n-1}$

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب -أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج : $u_n=\dfrac{2^{2n-1}}{2^{2n}+2^n}$

ج-أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

د-أحسب بدلالة المجموع : $S_n=\dfrac{u_0}{2u_0-1}+\dfrac{u_1}{2u_1-1}+...+\dfrac{u_n}{2u_n-1}$

التمرين الثاني (4 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ و $C(-1;-3;2)$.

1. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .
2. عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) ثم أستنتج بعد النقطة C عن المستقيم (AB) .
3. (Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=2t \\ y=3+2t \quad : t\in R \\ z=-4-2t \end{cases}$

أ - تحقق أنّ (Δ) يوازي (AB) بين أن النقطة $D(2;5;-6)$ تنتمي إلى (Δ) و لا تنتمي إلى المستقيم (AB) .

ب - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل كل من المستقيمين (Δ) و (AB) .

4. أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) الذي مركزه النقطة $E(2;1;0)$ و تمس المستوي (P) .

التمرين الثالث (5 نقاط) :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2(1+\sqrt{2})z+2(2+\sqrt{2})=0$.

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ النقط C;B;A ذات اللواحق $z_A=1+\sqrt{2}-i$ و $z_B=1-i$ و $z_C=1+\sqrt{2}+i$

1) بين أن $z_B\times z_C=\sqrt{2}\,z_A$ ثم استنتج أن $k\in Z$: $\arg(z_A)=\frac{1}{2}\arg(z_B)+\pi k$.

2) اوجد عمدة العدد المركب z_B ثم استنتج أن $\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ هو عمدة للعدد المركب z_A .

3) اكتب z_A ; z_B على الشكل الآسي .ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لـ: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

4) من اجل كل نقطة M لاحقتها z تختلف عن z_A و z_B نعرف العدد المركب L حيث: $L=\frac{z-z_C}{z-z_A}$

أ) فسر هندسيا عمدة العدد المركب L .

ب) عين (E) مجموعة النقط M لاحقتها z بحيث يكون L تخيلي صرف .

التمرين الرابع (7 نقاط) :

I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=2+\frac{a+b\ln x}{x}$ ، حيث a ; b عددان حقيقيان .

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

- عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(1;3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

II. نضع $a=b=1$.

1) احسب $\lim\limits_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ،ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,23<\alpha<0,24$.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2$.

5) أنشئ (d) و (C_f) .

6) أوجد دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

7) بيّن أنّ مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=2$; $x=1$; $x=3$ تساوي $6.8\ \text{cm}^2$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي 2018 شعبة العلوم التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول(4 نقاط) :

(u_n)متتالية المعرفة بـ $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}$.

1 - أ- حساب u_1 و u_2 : $u_1=\frac{4u_0}{1+u_0}=\frac{4}{2}=2$ و $u_2=\frac{4u_1}{1+u_1}=\frac{8}{3}$ .... $2\times(0,25)$

ب-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<3$

لدينا $0<u_0<3$ محققة .... $(0,25)$

نفرض أن $0<u_n<3$ و لنبرهن أن $0<u_{n+1}<3$

طريقة 1 : f الدالة المرفقة حيث $f(x)=\frac{4x}{x+1}$ و منه $f'(x)=\frac{4}{(x+1)^2}$ متزايدة تماما على المجال $[0;3]$

و منه إذا كان $0<u_n<3$ فإن $f(0)<f(u_n)<f(3)$ أي أن $0<u_{n+1}<3$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0<u_{n+1}<3$

طريقة 2 : لدينا $u_{n+1}=\frac{4u_n}{1+u_n}=4-\frac{4}{1+u_n}$

$0<u_n<3$ يكافئ $1<1+u_n<4$ بالقلب نجد $\frac{1}{4}<\frac{1}{1+u_n}<1$ بالضرب في -4 نجد $-1>-\frac{4}{1+u_n}>-4$ بإضافة 4 نجد $0<4-\frac{4}{1+u_n}<3$

و منه $0<u_{n+1}<3$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0<u_n<3$.. $(0,75)$

2 - لتكن (v_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$

أ - تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-3}{u_{n+1}}=\frac{\frac{4u_n}{1+u_n}-3}{\frac{4u_n}{1+u_n}}=\frac{4u_n-3-3u_n}{4u_n}=\frac{1}{4}\left(\frac{u_n-3}{u_n}\right)=\frac{1}{4}v_n$ و منه محققة و حدها الأول $v_0=\frac{u_0-3}{u_0}=-2$.......... $(0,5)$

كتابة v_n ثم u_n بدلالة n : $v_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .... $(0,25)$ و لدينا $v_n=\frac{u_n-3}{u_n}$ و منه $v_n=1-\frac{3}{u_n}$

إذن $u_n=\frac{3}{1-v_n}$ و منه $u_n=\frac{3}{1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.................. $(0,25)$

ب - حساب نهاية المتتالية (u_n) . و منه $\lim u_n=\lim\frac{3}{1-v_n}=3$.................................. $(0,25)$

3 - (w_n) متتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=\frac{3}{u_n}$ نضع $S_n=w_0+w_1+w_2+....+w_n$.

أ - التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=1-v_n$ لدينا $w_n=\frac{3}{u_n}$ و منه $w_n=\frac{3}{\left(\frac{3}{1-v_n}\right)}=1-v_n$......... $(0,25)$

بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = n+1+\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$: لدينا $S_n = (1-v_0)+(1-v_1)+...+(1-v_n)$. و منه

$S_n = (n+1)-v_0\left[\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right] = (n+1)+\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$ .... (0,75)

ب- حساب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$. : $\lim\frac{S_n}{n} = \lim\left(1+\frac{1}{n}+\frac{8}{3n}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\right) = 1$ .... (0,25)

التمرين الثاني (4 نقاط) :

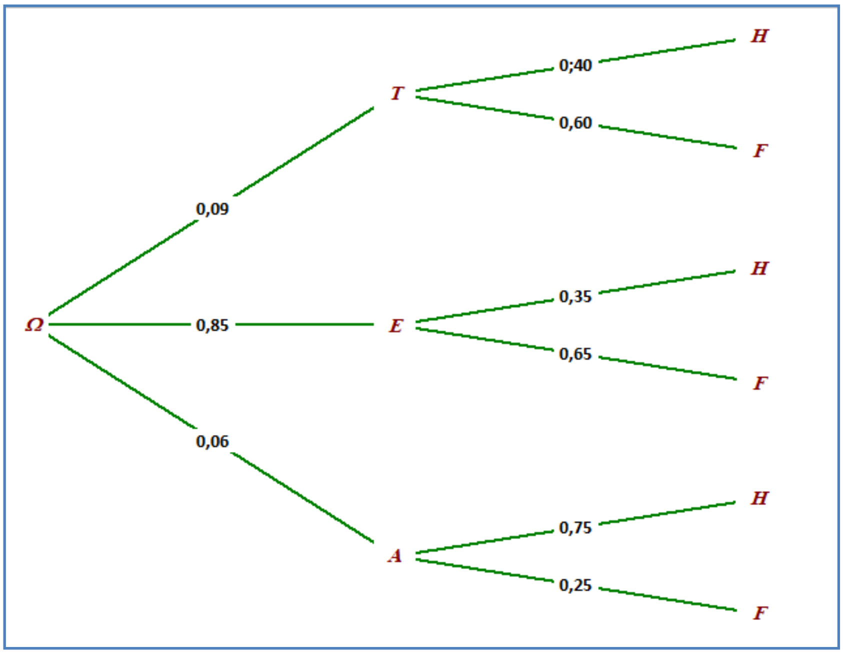
تتكون مؤسسة تربوية من أساتذة و تلاميذ و إداريين، حيث 9% منهم أساتذة ، و 85% تلاميذ ، و 40% . من الأساتذة ذكور، و 65% من التلاميذ إناث ، و 75% من الإداريين ذكور.

- نختار عشوائيا شخصا من المؤسسة .

نرمز بـ T للحادثة (اختيار أستاذ) ، وE للحادثة (اختيار تلميذ) ،و A للحادثة (اختيار إداري)

ونرمز بـ H للحادثة (اختيار ذكر) ،و F للحادثة (اختيار أنثى)

1) شكل شجرة الاحتمالات التي تمذج هذه التجربة : .... (1)



2) حساب احتمال أن يكون الشخص المختار أستاذة : $P(TF) = 0{,}09\times0{,}60 = 0{,}054 = \frac{27}{500}$ .... (1)

3) حساب احتمال أن يكون الشخص المختار أنثى :.. (1)

$$P(F) = P(F\cap T)+P(F\cap E)+P(F\cap A) = 0{,}09\times0{,}60+0{,}85\times0{,}65+0{,}06\times0{,}25 = 0{,}6215 = \frac{1243}{2000}$$

4) علما أن الشخص المختار ذكر فما هو احتمال أن يكون تلميذ.................................. (1)

$$P_H(E) = \frac{P(E\cap H)}{P(H)} = \frac{0{,}85\times0{,}35}{1-P(F)} = \frac{0{,}2975}{0{,}3785} = \frac{595}{757}$$

التمرين الثالث (5 نقاط) :

1. حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة ذات المجهولين z_1 , z_2 حيث : $\begin{cases} z_1+\sqrt{3}z_2=-4i.....(1) \\ -\sqrt{3}z_1+z_2=4......(2) \end{cases}$ يكافئ

$\begin{cases} 3z_1+3\sqrt{3}z_2=-12i \\ -3z_1+\sqrt{3}z_2=4\sqrt{3} \end{cases}$ بالجمع نجد $4\sqrt{3}\,z_2=-12i+4\sqrt{3}$ و منه $z_2=-i\sqrt{3}+1$ .... (0,25)

بالتعويض في (1) نجد $z_1=-4i-\sqrt{3}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ و منه $z_1=-i-\sqrt{3}$ .... (0,25)

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ نعتبر النقطتين A ، B التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=-\sqrt{3}-i \quad \text{و} \quad z_B=1-i\sqrt{3}$$

أ) كتابة العددين المركبين z_A و z_B على الشكل الآسي : $z_A=2\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right]=2e^{\frac{7\pi}{6}i}$ .... (0,5)

و $z_B=2\left[\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right]=2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ .... (0,5)

ب) تعيين زاوية الدوران الذي مركزه O و يحول A إلى B : زاويته هي

$$\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=\arg(z_B)-\arg(z_A)=-\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{6}=-\frac{3\pi}{2}$$ .... (0,75)

استنتاج طبيعة المثلث OAB هو مثلث قائم و متساوي الساقين .... (0,75)

ج) بيّن أن $\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)^{2018}=-1$ لدينا $\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=e^{-\frac{3\pi}{2}i}$ و منه $\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)^{2018}=e^{-3027i}=e^{-i\pi}=-1$ .... (0,5)

و منه نجد أن $z_B^{2018}=-z_A^{2018}$ و منه $z_B^{2018}+z_A^{2018}=0$ أي أن $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{2018}+\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2018}=0$ .... (0,5)

4) لتكن النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و M من المستوي ذات اللاحقة z .

- التحقق أن $AB=2\sqrt{2}$ لدينا $z_B-z_A=1+\sqrt{3}+i\left(-\sqrt{3}+1\right)$ و منه

$$AB=\left|z_B-z_A\right|=\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(-\sqrt{3}+1\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$ .... (0,25)

بيّن أن $MA^2+MB^2=2MG^2+4$ لدينا $MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2$ أي أن

$$MA^2+MB^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+GB^2$$

بما أن $GA=GB$ و $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$ و $GA=\sqrt{2}$ نجد

$$MA^2+MB^2=2MG^2+2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+2GA^2$$

و منه $MA^2+MB^2=2MG^2+4$ .... (0,25).

- تعين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2+MB^2=8$ يكافئ $2MG^2+4=8$

يكافئ $MG^2 = 2$ ....(0,25)

مجموعة النقط هي الدائرة ذات المركز G و نصف القطر $\sqrt{2}$ ....(0,25)

التمرين الرابع (7 نقاط) :

1) حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[-x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}\right] = +\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}\right] = -\infty$ ....$2\times(0,25)$

يبيّن أنّ $x=0$ معادلة مستقيم مقارب بما أن $\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[-x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}\right] = -\infty$ و

$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[-x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}\right] = +\infty$ فهي محققة . ...(0,25)

2) التحقق أن $f(x) = -x + \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$: $f(x) = -x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}$ يعني أن $f(x) = -x + \frac{e^{2x}-1+1}{e^{2x}-1}$ إذن

$f(x) = -x + \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ ....(0,5)

استنتاج أن المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) ; (Δ') معادلتهما على الترتيب $y=-x$ و

$y = -x+1$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x-1] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^{2x}-1}\right] = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\right] = 0$ ....$2\times(0,25)$

3) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f لدينا $f'(x) = -1 - \frac{2e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$ ....(0,25)

و هي سالبة على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ و منه فإن الدالة f

متناقصة على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ....(0,25)

جدول تغيّراتها : ....(0,5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			‖		
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

4) يتبيّن إن $w\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C) لدينا مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة إلى O.........................(0,25)

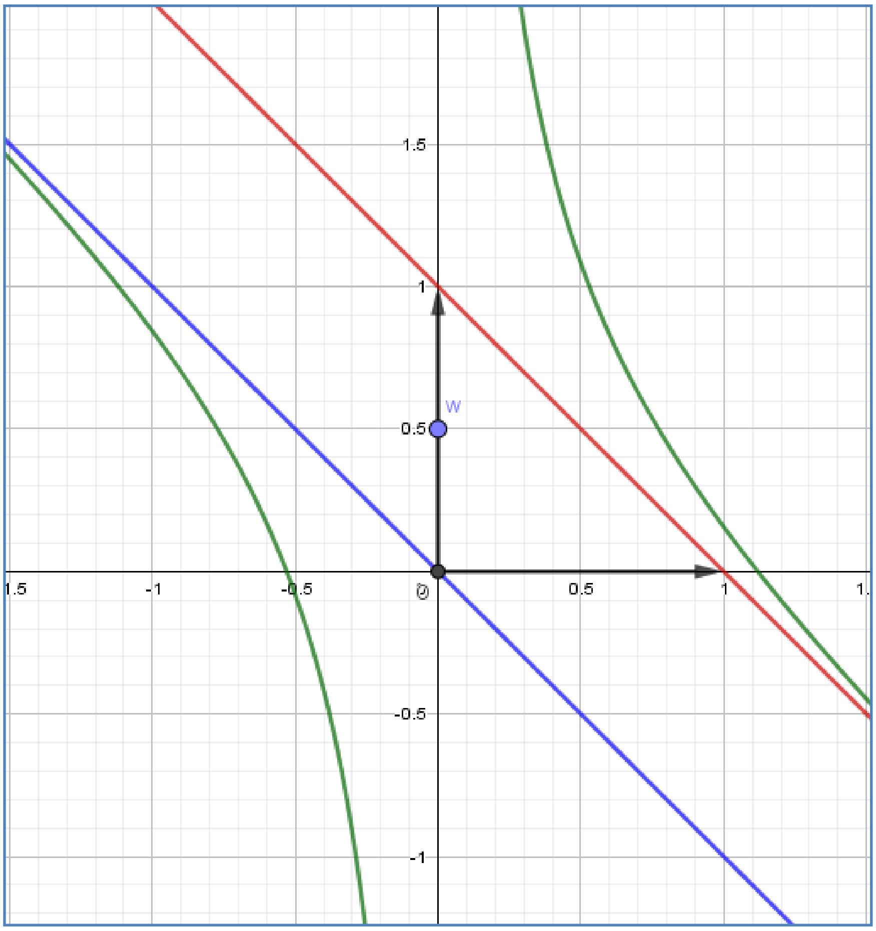
و $f(-x)+f(x)=x+1+\frac{1}{e^{-2x}-1}-x+1+\frac{1}{e^{2x}-1}=2+\frac{e^{2x}}{1-e^{2x}}+\frac{1}{e^{2x}-1}=2+\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}-1}=1$ و منه

محققة...(0,25)

إثبات أنّ المنحنى (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث. $1<\alpha<1{,}2$ لدينا $f(1{,}2)=-0{,}1$ و $f(1)=0{,}15$ و الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $]0\ ;+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $1<\alpha<1{,}2$ أي أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل

في نقطة وحيدة فاصلتها من المجال $]0\ ;+\infty[$..(0,5)

5) إنشاء (C) :..(1)



6) المناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $(1-m)\left(e^{2x}-1\right)+1=0$ يكافئ $(1-m)=-\frac{1}{e^{2x}-1}$ يعني أن $(1-m)=-x+1-f(x)$ و منه $f(x)=-x+m$ حلولها هي فواصل نقاط تقاطع (C) و المستقيم $(\Delta_m):y=-x+m$

المناقشة :..(1)

لما $m \in]-\infty;0[$ نلاحظ أن (C) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .

لما $m \in [0; 1]$ نلاحظ أن (C) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $m \in]1;+\infty[$ نلاحظ أن (C) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها موجبة و من للمعادلة حل وحيد موجب .

7) إثبات أن مساحة الحيز بالمنحى (C) وحامل محور الفواصل والمستقيمين $x = 4 \;;\; x = 2$.

هي $A = \left(6 - \frac{1}{2}\ln\left(e^4+1\right)\right)(u.a)$:

أي أن $A = -\int_2^4 f(t)dt = -\int_2^4 \left(-t + \frac{e^{2t}}{1-e^{2t}}\right)dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2t}-1\right)\right]_2^4$

و منه $A = 8 - \frac{1}{2}\ln\left(e^8-1\right) - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(e^4-1\right) = 6 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^8-1}{e^4-1}\right)$

$A = \left[6 - \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\left(e^4-1\right)\left(e^4+1\right)}{e^4-1}\right]\right]u.a = \left[6 - \frac{1}{2}\ln\left(e^4+1\right)\right]u.a$ و هو المطلوب ....(1)

التصحيح المفصل للموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط) :

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ ب : $f(x)=\dfrac{2x}{2x+1}$.

دراسة اتجاه تغير الدالة f : . $f'(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2}$ و منه f متزايدة على $[0;+\infty[$ .... (0,25)

II - لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1}=f(u_n)$

1) البرهان بالتراجع أنه و من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<\dfrac{1}{2}$

لدينا $0<u_0<\dfrac{1}{2}$ محققة لأن $u_0=\dfrac{1}{4}$.. (0,25)

نفرض أن $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ و لنبرهن أن $0<u_{n+1}<\dfrac{1}{2}$

$0<u_n<\dfrac{1}{2}$ و f دالة متناقصة على المجال $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ و منه $f(0)<f(u_n)<f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ أي أن

$0<u_{n+1}<\dfrac{1}{2}$.إذن من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ .... (0,5)

2) التحقق أن : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$ لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n}{2u_n+1}-u_n$ أي أن

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n-2u_n^2-u_n}{2u_n+1}=\frac{u_n-2u_n^2}{2u_n+1}=\frac{u_n(1-2u_n)}{2u_n+1}$$ .... (0,25)

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) بما $0<u_n<\dfrac{1}{2}$ فإن الفرق $u_{n+1}-u_n$ موجب إذن المتتالية متزايدة .... (0,25)

و هي محدودة من الأعلى فهي متقاربة .... (0,25)

3) نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على N : $v_n=\dfrac{2^n\times u_n}{2u_n-1}$

أ - يبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و يطلب تعيين حدها الأول v_0 لدينا

$$v_{n+1}=\frac{2^{n+1}\times u_{n+1}}{2u_{n+1}-1}=\frac{2^{n+1}\left(\dfrac{2u_n}{2u_n+1}\right)}{2\left(\dfrac{2u_n}{2u_n+1}\right)-1}=\frac{2^{n+2}u_n}{4u_n-2u_n-1}=4\frac{2^nu_n}{2u_n-1}=4v_n$$

و منه محققة......... (0,5)

و حدها الأول $v_0=\dfrac{2^0\times u_0}{2u_0-1}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}$ .... (0,25)

ب كتابة v_n بدلالة n : $v_n = -\frac{4^n}{2}$ ....(0,25)

و $v_n = \frac{2^n \times u_n}{2u_n - 1}$ و منه نجد $2u_n v_n - v_n = 2^n u_n$ و منه $2u_n v_n - 2^n u_n = v_n$ و منه

$u_n(2v_n - 2^n) = v_n$ إذن $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 2^n}$ بالتعويض نجد

$u_n = \frac{\left(-\frac{4^n}{2}\right)}{2\left(-\frac{4^n}{2}\right) - 2^n} = \frac{-2^{2n-1}}{-2^{2n} - 2^n} = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n} + 2^n}$ ثم استنتج : $u_n = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n} + 2^n}$ ....(0,5)

.

ج-أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$: $\frac{1}{2} = \frac{2^n\left(\frac{1}{2}\right)}{2^n\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)}\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}$ ....(0,25)

د-حساب بدلالة المجموع : $S_n = \frac{u_0}{2u_0 - 1} + \frac{u_1}{2u_1 - 1} + \dots + \frac{u_n}{2u_n - 1}$ لدينا $v_n = \frac{2^n \times u_n}{2u_n - 1}$

و منه $\frac{v_n}{2^n} = \frac{u_n}{2u_n - 1}$ نضع $w_n = \frac{v_n}{2^n}$ و (w_n) متتالية هندسية أساسها هو $4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ و حدها الأول

$w_0 = v_0 = -\frac{1}{2}$ و منه $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

إذن $S_n = w_0\left[\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right] = \frac{1}{2}\left(1 - 2^{n+1}\right)$ .... (0,5) .

التمرين الثاني (4 نقاط) :

1. تعيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) هو

$$\begin{cases} x = -k + 1 \\ y = -k + 2 \quad : \quad k \in \Re \\ z = k + 3 \end{cases}$$ ....(0,5)

2. تعيين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

و لتكن $H(-t+1;-t+2;t+3)$ لدينا $\overrightarrow{CH}(-t+2;-t+5;t+1)$ عمودي على $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ نحسب الجداء السلمي نجد $t-2+t-5+t+1=0$ و منه $3t=6$ إذن $t=2$ و منه $H(-1;0;5)$........................(0,5)

استنتاج بعد النقطة C عن المستقيم (AB) و هو $CH=\sqrt{0^2+3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ لأن $\overrightarrow{CH}(0\,;3\,;3)$ ....(0,25)

.

3. (Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=2t \\ y=3+2t \quad : t\in R \\ z=-4-2t \end{cases}$

أ - التحقق أنّ (Δ) يوازي (AB)

بما $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و شعاع توجيه المستقيم (Δ)هو $\vec{v}(2;2;-2)$ شعاعان مرتبطان خطياَ لأن $\frac{2}{-1}=\frac{2}{-1}=\frac{-2}{1}$ فإن المستقيمان متوازيان..(0,5)

تبين أن النقطة $D(2;5;-6)$ تنتمي إلى (Δ) يعني أن $\begin{cases} 2=2t \\ 5=3+2t \\ -6=-4-2t \end{cases}$

تقبل حل وحيد أي أن $t=1$ محققة ....(0,25)

و D لا تنتمي إلى المستقيم (AB) يعني أن $\begin{cases} 2=-t+1 \\ 5=-t+2 \\ -6=t+3 \end{cases}$ لا تقبل حلول أي أن $\begin{cases} t=-1 \\ t=-3 \\ t=-9 \end{cases}$ إذن D لا تنتمي المستقيم (AB) ....(0,25)

ب - كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل كل من المستقيمين (Δ) و (AB) : و هو المستوي المعين بالنقط A , B , D نفرض أن شعاعه الناظمي هو $\vec{n}(a;b;c)$ هو عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}(-1;-1;1)$ و $\overrightarrow{AD}(1;3;-9)$ أي أن $\begin{cases} -a-b+c=0 \\ a+3b-9c=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} 2b-8c=0 \\ -a+3b-9c=0 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} b=4c \\ c=1 \\ a+3(4)-9(1)=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} a=-3 \\ b=4 \\ c=1 \end{cases}$ إذن $\vec{n}(-3;4;1)$ المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي من الشكل $-3x+4y+z+d=0$ بتعويض إحداثيات $A(1;2;3)$ نجد $-3(1)+4(2)+(3)+d=0$ نجد $d=-8$

و منه المعادلة هي $-3x+4y+z-8=0$..(0,5)

4 - كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) الذي مركزه النقطة $E(2;1;0)$ و تمس المستوي (P) هو الذي نصف قطره المسافة بين $E(2;1;0)$ و (P) : $d(E;P)=\frac{|-3(2)+4(1)+(0)-8|}{\sqrt{9+16+1}}=\frac{10}{\sqrt{26}}$ ....(0,5)

و منه المعادلة الديكارتية لسطح هي $\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2+z^2=\frac{100}{26}$ يعني أن

$x^2+y^2+z^2-4x-2y-\frac{115}{13}=0$ .... (0,5)

التمرين الثالث (5 نقاط) :

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\left(1+\sqrt{2}\right)z+2\left(2+\sqrt{2}\right)=0$ المميز $\Delta=-4$

و الحلين هما $z_1=1-i$ و $z_2=1+\sqrt{2}+i$ .... $2\times(0,25)$.

1) يبيّن أن $z_B\times z_C=\sqrt{2}\,z_A$ لدينا

$z_B\times z_C=\left(1-i\right)\left(1+\sqrt{2}+i\right)=1+\sqrt{2}+i-i-i\sqrt{2}+1=2+\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و

$\sqrt{2}z_C=\sqrt{2}+2+i\sqrt{2}$ و منه $z_B\times z_C=\sqrt{2}\,z_A$ محققة. .... (0,5)

استنتاج أن $\arg(z_A)=\frac{1}{2}\arg(z_B)+\pi k\ : k\in Z$ لدينا $z_B\times z_C=\sqrt{2}\,z_A$ و $z_C=\overline{z_A}$ و منه

$\arg(z_A)=\arg(z_B\times z_C)+2\pi k : k\in Z$ و $\arg(z_C)=-\arg(z_A)$ و منه

$\arg(z_A)=\arg(z_B)-\arg(z_A)+2\pi k : k\in Z$ أي أن $2\arg(z_A)=\arg(z_B)+2\pi k : k\in Z$ إذن

$\arg(z_A)=\frac{1}{2}\arg(z_B)+\pi k : k\in Z$ .... (0,5)

2) إيجاد عمدة العدد المركب z_B : $z_B=1-i$ و منه $z_B=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$ و منه

$\arg(z_B)=-\frac{\pi}{4}$ .... (0,25)

استنتاج أن $\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ هو عمدة للعدد المركب z_A : $\arg(z_A)=\frac{1}{2}\arg(z_B)+\pi k : k\in Z$ و منه

$\arg(z_A)=-\frac{\pi}{8}+\pi k : k\in Z$ و بما أن العدد المركب z_A جزئه الحقيقي موجب و جزئه التخيلي سالب فإن

$\arg(z_A)=-\frac{\pi}{8}+2\pi k : k\in Z$ و هو المطلوب. .... (0,25)

3) كتابة z_A ; z_B على الشكل الآسي $\left|z_A\right|=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$; $\left|z_B\right|=\sqrt{2}$ و منه

$z_A=\sqrt{4+2\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{8}i}$; $z_B=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$ .... $2\times(0,5)$

استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$: لدينا $z_A=1+\sqrt{2}-i$ و

$z_A=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

بالمطابقة نجد $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ و منه $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ .... (0,5)

و $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ و منه $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ .... (0,5)

4) من اجل كل نقطة M لاحقتها z تختلف عن z_A و z_B نعرف العدد المركب L حيث : $L=\frac{z-z_C}{z-z_A}$

أ - القسير هندسيا عمدة العدد المركب L : $\arg(L)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MC}\right)$ .... (0,25) .

ب - تعيين (E) مجموعة النقط M لاحقتها z بحيث يكون L تخيلي صرف يعني أن

$$\arg(L)=\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in Z$$

و منه مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AC]$ ما عدا النقطتين A ; C .... (0,25)

التمرين الرابع (7 نقاط) :

I - تعيّين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(1;3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل يعني أن $f(1)=3$ أي أن $2+a=3$ و منه $a=1$ و لدينا $f'(x)=\frac{b-a-b\ln x}{x^2}$ و

$f'(1)=0$ منه $b-1=0$ إذن $b=1$ .... $2\times(0,25)$

II - نضع $a=b=1$ و منه $f(x)=2+\frac{1+\ln x}{x}$

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[2+\frac{1+\ln x}{x}\right]=-\infty$ .... (0,25)

ولأن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[\frac{\ln x}{x}\right]=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2+\frac{1+\ln x}{x}\right]=2$ .... (0,25)

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\ln x}{x}\right]=0$

القسّير الهندسي للنتيجتين هو أن $y=2$ و $x=0$ معادلتي مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) .... $2\times(0,25)$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f لدينا $f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$ .... (0,25)

إشارتها عكس إشارة $\ln(x)$ و منه الدالة f متزايدة على المجال $]0;1]$ .... (0,25)

و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$ .... (0,25)

جدول تغيّراتها : .... (0,5)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	2

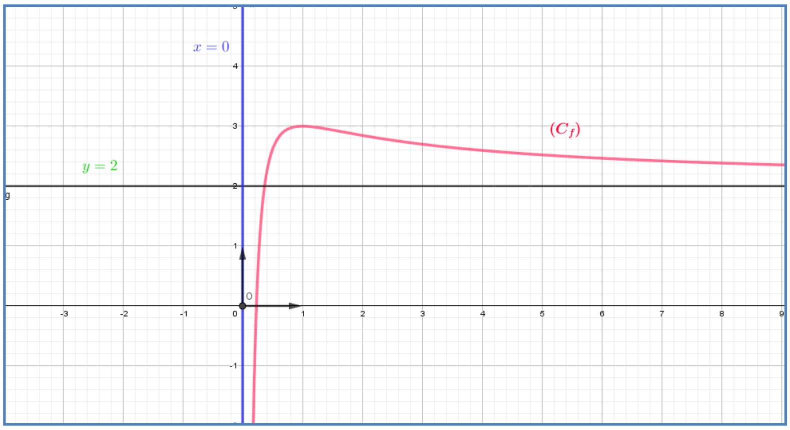
3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}23<\alpha<0{,}24$ لدينا $f(0{,}23)=-0{,}04$ و $f(0{,}24)=0{,}22$ و الدالة متزايدة تماما على $[0{,}23\,;\,0{,}24]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة تقبل حلا وحيدا α يحقق ما سبق..(0,5)

4) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2$ لدينا الفرق $f(x)-y=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$

إشارته : $1+\ln(x)$......................................(0,5)

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
إشارة $1+\ln(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع تحت (d)	يتقاطع (C_f) و (d)	(C_f) يقع فوق (d)	

5) إنشاء (d) و (C_f) :...(1)



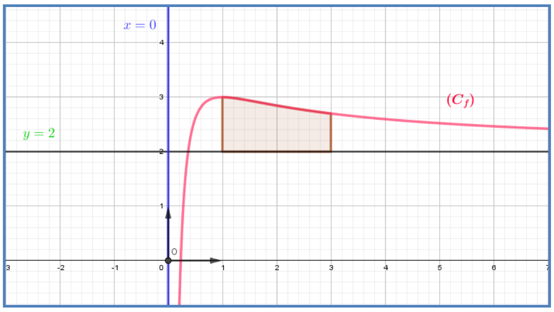
6) إيجاد دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $f(x)=2+\dfrac{1+\ln x}{x}$

أي أن $f(x)=2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ و دالتها الأصلية هي F حيث $F(x)=2x+\ln(x)+\dfrac{1}{2}[\ln(x)]^2$

7) بيّن أنّ مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها

$x=3\ ;\ x=1\ ;\ y=2$

تساوي $6.8\ \mathrm{cm}^2$



المساحة هي..(0,25)

$$A=4\int_1^3[f(x)-2]dx=4\left[\ln(x)+\frac{1}{2}[\ln(x)]^2\right]_1^3=4\left(\ln(3)+\frac{[\ln(3)]^2}{2}\right)\approx 6{,}8\,cm^2$$

انتهى الموضوع الثاني