الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية الثانويات: زريمش عيسى- غجـــاتي علاوة – أول نوفمبر–شعلال مسعود(ولاية قـ ـ ـ ـ ـالمة)

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي

الشعبة : علوم تجريبية دورة : مـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـــاي 2018

اختبار في مادة: الرياضيات المدة: 03 سا و 30 د

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\,(-2,-1,3)$ ، $B\,(1,3,5)$ ، $C\left(2,-\frac{1}{2},-4\right)$ ، $E\,(1,-1,2)$

والمستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=1+t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

1) أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج قيسا بالراديان للزاوية $\widehat{BAC}$، استنتج أن النقط A , B و C تعين مستوي .

ب) أوجد العددين الحقيقيين ~ و بحيث يكون الشعاع $\vec{n}(\sim,\ ,1)$ ناظميا للمستوي (ABC)، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

2) لتكن $M\,(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (Δ) و f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f\,(t)=EM$

أ) أكتب $f\,(t)$ بدلالة t ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f.

ب) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة EM أصغر مايمكن ؟استنتج المسافة بين E والمستقيم (Δ).

ج) استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة E على المستقيم (Δ).

3) أ) أكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها E وتمس المستقيم (Δ).

ب) أدرس الوضع النسبي للمستوي (ABC) وسطح الكرة (S).

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر النقط $A\,;B$ و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{®}{4}}$ ، $z_B=i\,z_A$ و $z_C=\overline{z_A}$ ($\overline{z_A}$ مرافق z_A)

1) أكتب z_A , z_B على الشكل الجبري .

2) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\dfrac{1+i-z}{-1+i-z}=2e^{i®}$ (E)....

ب) استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة B بواسطة تشابه مباشر S مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة z_{Ω}

(حيث z_{Ω} هي حل المعادلة $\left((E)\right)$ يطلب تعيين عناصره المميزة وكتابة عبارته المركبة .

3) أ) أوجد مركز و نصف قطر الدائرة $(¥)$ المحيطة بالمثلث ABC.

ب) بين أن النقطة H ذات اللاحقة $z_H=-1+3i$ هي مركز الدائرة $(¥')$ صورة الدائرة $(¥)$ بالتحويل S ثم عيّن معادلة ديكارتية للدائرة $(¥')$.

4) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

5) أ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $z=z_C-k\dfrac{z_A}{z_C}$ ، k يمسح $\mathbb{R}^+$

ب) عيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $k\in\mathbb{Z}$, $\arg\left[\left(\dfrac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=®+2k®$

التمرين الثالث:(04 نقاط)

(u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=-\frac{5}{4}$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=(u_n+2)^2-2$

1) أ) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2\prec u_n\prec -1$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

جـ) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

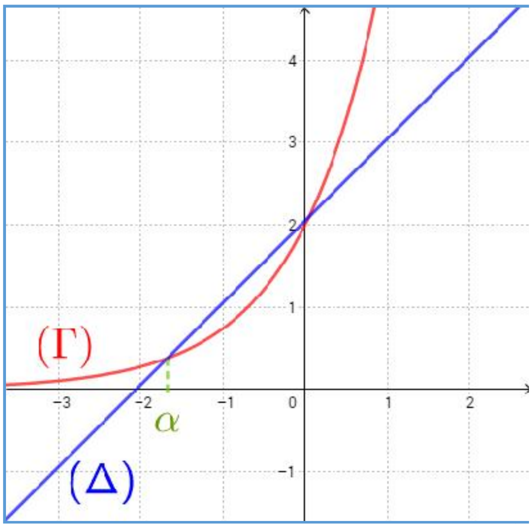
2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\ln(u_n+2)$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد حدها الأول v_0 وأساسها q .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

ب) استنتج بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

(Γ) التمثيل البياني للدالة: $x\to 2e^x$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$.

~ و 0 هما فاصلتا نقطتي تقاطع (Γ) و (Δ) حيث $-1.6\prec \sim \prec -1.5$

1) بقراءة بيانية حدد وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$.

2) g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=-2e^x+x+2$$

*حدد إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني.

1) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$

ج) عين دون حساب: $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(\sim+h)-f(\sim)}{h}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

د) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة: $y=2(ex-3)$ هو مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$ ، أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .

ج) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها حيث: $-2.4\prec \quad \prec -2.3$

3) أنشئ كل من (D) ، (C_f) . نأخذ $f(-3)\approx-22.31$ ، $f(\sim)\approx 4.15$

4) أ) أوجد العددين الحقيقيين a ; b حتى تكون الدالة $x\to(ax+b)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة $x\to(x+3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$

ب) أحسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (D) والمستقيمين الذين معادلتيهما :

$x=1$; $x=n$ حيث n عدد طبيعي $(n\succ1)$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

للشكل في الورقة المرفقة هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x}{2x+1}$

و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\dfrac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) مثل على محور الفواصل الحدود $u_0\,;u_1\,;u_2\,;u_3$ للمتتالية (u_n) دون حسابها .مبرزا خطوط التمثيل .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

2) أ) اثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \prec u_n \prec 1$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n=\dfrac{1-u_n}{2u_n}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0

ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+..+2^n v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times\ldots\times v_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق (علما أن الكرات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس).

1) أحسب احتمالات الأحداث الآتية :

A : " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء ". B : "سحب ثلاث كرات من نفس اللون " .

C :" سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

2) أ) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها .

**أحسب كلا من $P(X=1)$ و $P(X=3)$ ثم استنتج $P(X=2)$.

ب) اللاعب يدفع $50DA$ قبل إجراء السحب، و يكسب $25\,DA$ لكل لون من الألوان المحصل عليها .هل اللعبة مربحة له؟

3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء واحدة .

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من U_2 .

**احسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E)\ldots.\quad z^2+2|z|^2-\dfrac{3}{4}=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) لتكن A , B و C ثلاث نقط من المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$z_A=\dfrac{-1}{2}$ ، $z_B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$

أ) اكتب كلا من العددين z_A+z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بين أن : $z_A+z_B=z_C^{\,2018}.(z_A+z_B)^{1439}$

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه **النقطة** A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ونسبته $k = 2$

أ) أكتب العبارة المركبة للتشابه **المباشر** S.

ب) أوجد لاحقتا النقطتين B' و C' صورتا النقطتين B و C على الترتيب **بالتشابه المباشر** S.

4) بين ان المبدأ O هو **مركز ثقل المثلث** ABC ثم عين مجموعة النقط M **من المستوي التي تحقق** :

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$$

5) **أنشئ النقطة** H **ذات اللاحقة** z_H حيث: $z_H = 1+e^{-\frac{\pi}{3}i}$ **دون حساب** .

<u>التمرين الرابع</u>: (07 نقاط)

I h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x **و المعرفة على المجال** $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

أدرس اتجاه تغير الدالة h ،**استنتج** أنه من أجل كل عدد حقيقي x **من** $\mathbb{R}^*$: $h(x)>0$.

II f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x **و المعرفة على** $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب)أحسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $2x^2 f'(x)=-h(x)$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المستقيم (Δ) **ذا المعادلة** : $y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) **بالنسبة لـ** (Δ) .

3) أ) تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x **من** $\mathbb{R}^*$: $-x\in\mathbb{R}^*$ و $f(x)+f(-x)=0$.ماذا تستنتج ؟ فسر النتيجة بيانيا.

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~**على المجال** $]0.3;0.4[$.

** **استنتج أن المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حلا آخر** يطلب تعيين حصر له .

4)أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلتيهما .

ب) أنشئ (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f) .

ج) ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m **عدد و إشارة حلول المعادلة** : $(E)...f(x)=-\frac{1}{2}x+m$

5)لتكن k **دالة معرفة على.Erreur ! Signet non défini.** $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :

$k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{x+1}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$ ، (C_k) تمثيلها البياني .

بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول **المنحنى (C_f) **إلى المنحنى** (C_k) (الإنشاء غير مطلوب)

6) أ) بين أن الدالة F **المعرفة على** $\mathbb{R}^*$ بـ: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$ هي دالة أصلية لـ f **على** $\mathbb{R}^*$

ب) أوجد الدالة الأصلية للدالة f **والتي تنعدم من أجل** $x=1$.

ج) α عدد حقيقي حيث: $\alpha>1$. **أحسب التكامل التالي**: $A(\alpha)=-\int_1^{\alpha} f(x)dx$ وفسر النتيجة هندسيا.

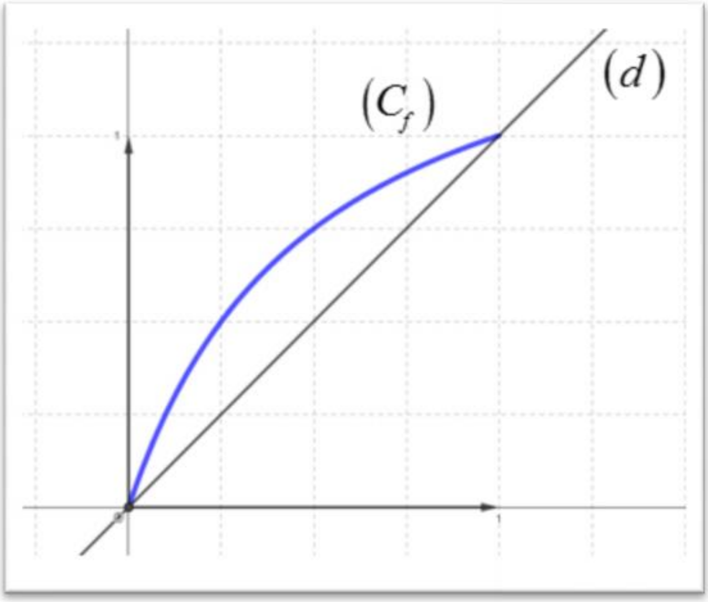
** **أحسب** $\lim_{x\to+\infty} A(\alpha)$.

بالتوفيق في البكالوريا

<u>الملحق : يرجع مع ورقة الإجابة</u>

الإسم واللقب : ....

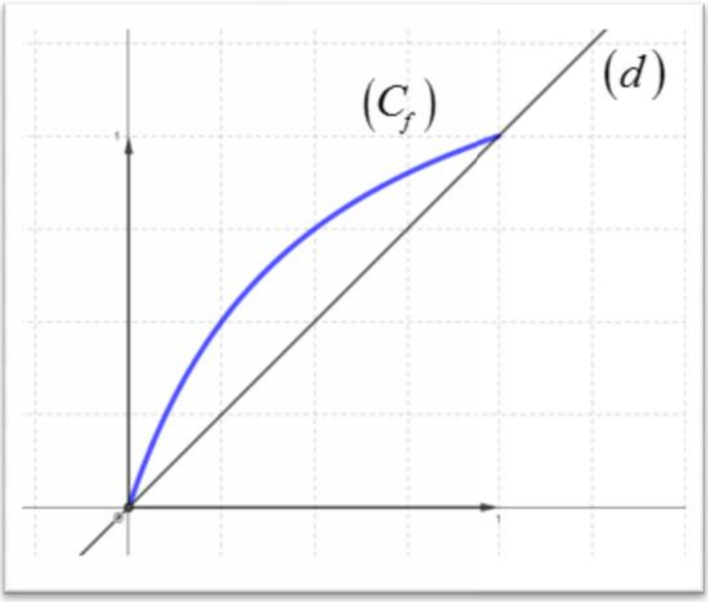
القسم :........................



<u>الملحق : يرجع مع ورقة الإجابة</u>

الإسم واللقب : ....

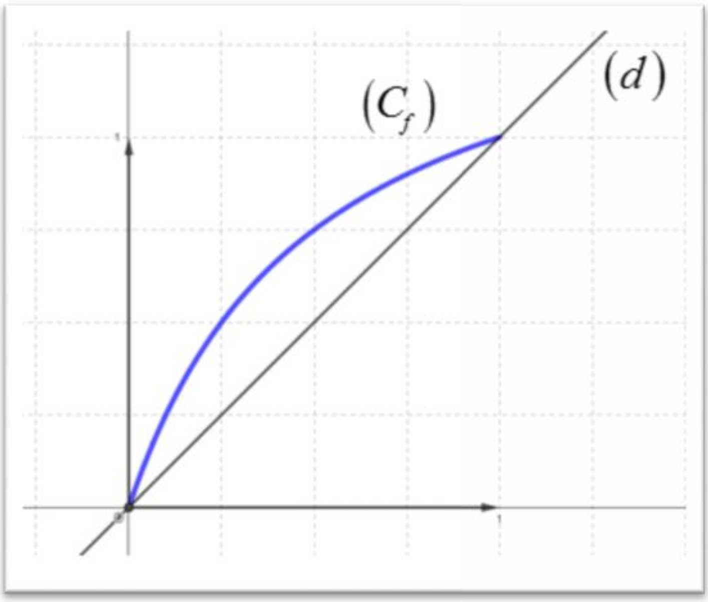
القسم :........................



<u>الملحق : يرجع مع ورقة الإجابة</u>

الإسم واللقب : ....

القسم :........................



2017 / 2018 الشعبة: ع.تجريبية	تصحيح البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات **الموضوع الأول**	الثانويات : زريمش عيسى – غجاتي علاوة ول نوفمبر–هواري بومدين–شعلال مسعود بن يوب محمد–بن مارس العربي

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(4;\frac{1}{2};-7\right)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=3(4)+4\left(\frac{1}{2}\right)+2(-7)=0$

استنتاج قيسا بالراديان للزاوية $\widehat{BAC}$

بما أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان وبالتالي:

$\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$

استنتاج أن A ، B و C **تعين مستوى:** بما أن $B\hat{A}C\neq 0$ و $B\hat{A}C\neq\pi$ فإن A ، B و C ليست على إستقامة واحدة وبالتالي تعين مستوي .

ب) تعيين العددين الحقيقيين α **و** β **بحيث يكون** $\vec{n}(\alpha;\beta;1)$ **ناظميا للمستوى** (ABC) **ثم استنتاج معادلة ديكارتية له**

$\vec{n}(\alpha;\beta;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) يعني $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافيء $\begin{cases}3\alpha+4\beta+2=0...(1)\\ 4\alpha+\frac{1}{2}\beta-7=0...(2)\end{cases}$

(2) يكافيء $-32\alpha-4\beta+56=0$ ....(3) بجمع (1) و (3)

طرفا لطرف نجد: $-29\alpha+58=0$

ومنه: $\alpha=2$ ، $\beta=-2$ اذن: $\vec{n}(2,-2,1)$

استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC):

و $A\in(ABC)$ $2(-2)-2(-1)+3+d=0$ ومنه: $d=-1$

اذن: $(ABC):2x-2y+z-1=0$

2) أ) كتابة $f(t)$ **بدلالة** t **ودراسة إتجاه تغير الدالة** f:

لدينا: $(\Delta):\begin{cases}x=1-t\\ y=1-t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=1+t\end{cases}$ ، $E(1;-1;2)$

$f(t)=EM=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{3t^2-6t+5}$

$f'(t)=\frac{3t-3}{\sqrt{3t^2-6t+5}}$ ، $f'(t)=0$ يكافئ $t=1$ ، $f(1)=\sqrt{2}$

الدالة f متناقصة تماما على $[0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$

ب) استنتاج قيمة العدد الحقيقي t **التي تكون من أجلها المسافة** EM **أصغر مايمكن ؟**

الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند $t=1$ هي: $\sqrt{2}$

ومنه أصغر قيمة للمسافة EM هي $\sqrt{2}$

استنتاج المسافة بين E **والمستقيم** (Δ): $d(E;(\Delta))=\sqrt{2}$

ج) استنتاج إحداثيات H **المسقط العمودي ل** E **على** (Δ): نعوض $t=1$ في عبارة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $H(0;0;2)$

3) أ) كتابة معادلة لسطح الكرة (S) **التي مركزها** E **وتمس المستقيم** (Δ) لدينا

$(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=R^2$

ومنه: $R=d(E;(\Delta))=\sqrt{2}$ $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=2$

ب) دراسة الوضع النسبي للمستوي (ABC) **وسطح الكرة** (S):

$d(E,(ABC))=\frac{|2(1)-2(-1)+2-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{5}{3}\approx 1.66$

بما أن $d(E,(ABC))\succ R\approx 1.41$ فإن $(S)\cap(ABC)=\emptyset$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) كتابة z_A , z_B **على الشكل الجبري:** $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=iz_A$

$z_A=1+i$, $z_B=-1+i$

2) أ) نحل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E) **ذات المجهول** z :

(E) يكافئ $\frac{1+i-z}{-1+i-z}=2(-1)$ يكافئ $3z=-1+3i$

ومنه: $z=\frac{-1}{3}+i$ اذن: $S=\left\{\frac{-1}{3}+i\right\}$

استنتاج أن A **هي صورة** B **بواسطة تشابه مباشر** S **مركزه النقطة** Ω **لاحقتها** $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$: من (E) نستنتج

$\frac{z_A-z_\Omega}{z_B-z_\Omega}=2e^{i\pi}$

ومنه: $z_A=2e^{i\pi}z_B+(1-2e^{i\pi})z_\Omega$ العبارة من الشكل $z'=ke^{i\theta}z+(1-ke^{i\theta})z_\Omega$ معناه $S(B)=A$ حيث S تشابه مباشر نسبته $k=2$ وزاويته $\theta=\pi$ ومركزه النقطة الصامدة Ω لاحقتها $z_\Omega=\frac{-1}{3}+i$. عبارته المركبة : $z'=-2z-1+3i$

حالة خاصة: S هو تحاك مركزه النقطة Ω ونسبته $K=-2$

3) أ) إيجاد مركز و نصف قطر الدائرة (Γ) **المحيطة بالمثلث** ABC: بما أن $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$

ب) نبين أن النقطة H ذات اللاحقة $z_H=-1+3i$ هي مركز الدائرة $(¥')$ صورة الدائرة $(¥)$ بالتحويل S ثم تعيّين معادلة ديكارتية للدائرة $(¥')$: لدينا: $(¥')$ نصف قطرها $r'=2\sqrt{2}$

ومركزها H حيث $S(O)=H$ أي: $z_H=-2z_O-1+3i$

ومنه: $z_H=-1+3i$ ، $(¥'):(x+1)^2+(y-3)^2=8$

4) تعيّين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا موجبا: $\frac{z_A}{z_C}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{®}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{-®}{4}}}=e^{i\frac{®}{2}}$

$\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n=e^{in\frac{®}{2}}$ عددحقيقي موجبيكافئ $\frac{n®}{2}=2k®$

ومنه: $n=4k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

5) أ) تعيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث: $z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}$ ، k يمسح $\mathbb{R}^+$:

$$z=z_C-k\frac{z_A}{z_C}=1-i-k\left(e^{i\frac{®}{2}}\right)=1-i+k\left(-e^{i\frac{®}{2}}\right)$$

$$=1-i+ke^{i\left(®+\frac{®}{2}\right)}=1-i+ke^{i\frac{3®}{2}}$$

ومنه: (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة C موازي لحامل محور التراتيب شعاع توجيهه لاحقته $e^{i\frac{3®}{2}}=-i$.

ب) تعيّن (Γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:

$(1)....\arg\left[\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)^2\right]=®+2k®$ ، (1) $k\in\mathbb{Z}$ يكافئ

$2\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=®+2k®$ يكافئ $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_B-z}\right)=\frac{®}{2}+k®$

ومنه: (Γ') هي دائرة قطرها $[AB]$ ماعدا النقطتين $A;B$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) أ) نبين بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $-2\prec U_n\prec-1$

لتكن الخاصية $P(n)$: $n\in\mathbb{N}$: $-2\prec U_n\prec-1$

من أجل $n=0$: $-2\prec U_0\prec-1$ محققة لأن $U_0=\frac{-5}{4}$

ومنه: $P(0)$ صحيحة.

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $-2\prec U_{n+1}\prec-1$ أي نبين: $-2\prec(U_n+2)^2-2\prec-1$

$-2\prec U_n\prec-1$ يكافئ $0\prec U_n+2\prec1$ يكافئ

ومنه: $-2\prec(U_n+2)^2-2\prec-1$ ومنه: $-2\prec U_{n+1}\prec-1$

إذن $P(n+1)$ صحيحة ومن و وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

ب) نبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما: ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n=u_n^2+3u_n+2=(u_n+1)(u_n+2)$

و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{®}{2}$ و $=2$ قائم في

ABC المثلث اذن $AB=AC$

ومتقايس الضلعين.مركز الدائرة $(¥)$ هو منتصف الوتر $[BC]$

هو المبدأ O لأن $\frac{z_B+z_C}{2}=0$ و نصف قطرها $r=\frac{BC}{2}=\sqrt{2}$

بما أن: $-2\prec u_n\prec-1$ فإن $u_n+1\prec0;u_n+2\succ0$

ومنه: $u_{n+1}-u_n\prec0$ نستنتج أن (u_n) متناقصة تماما

جـ) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حساب نهايتها:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد -2 فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(u_n+2)^2-2\right]$ يكافئ $l=(l+2)^2-2$ نجد:

$l^2+3l+2=0$ ، $\Delta=1$ ، $l=-2$ مقبول أو $l=-1$ مرفوض لأنها

متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بـ-2 اذن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$

2) أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حدها الاول v_0 وأساسها q: (v_n) م.هـ تكافئ من اجل كل عدد طبيعي n

يوجد $q\in\mathbb{R}$ حيث $v_{n+1}=q.v_n$ ، لدينا:

$$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+2)=\ln(u_n+2)^2=2\ln(u_n+2)$$

ومنه: $v_{n+1}=2v_n$. إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$

وحدها الأول $v_0=\ln(u_0+2)=\ln\frac{3}{4}$

ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n:

$v_n=v_0q^n=\left(\ln\frac{3}{4}\right)\times2^n$ و $v_n=\ln(u_n+2)$ يكافئ $e^{v_n}=u_n+2$

ومنه: $u_n=e^{v_n}-2=e^{\left(\ln\frac{3}{4}\right)2^n}-2$

3) أ) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

$$S_n=v_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]=\ln\left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}\right]=\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})$$

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})=-\infty$

ب) استنتاج بدلالة n الجداء P_n لدينا: $u_n=e^{u_n}-2$

ومنه: $u_n+2=e^{v_n}$ ، $P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)$

$$P_n=(u_0+2)\times(u_1+2)\times...\times(u_n+2)=e^{v_0}\times e^{v_1}\times.....\times e^{v_n}$$

$$=e^{v_0+v_1+...+v_n}=e^{S_n}=e^{\left(\ln\frac{4}{3}\right)(1-2^{n+1})}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$g(x)=-2e^x+x+2$ ، $(\Delta):y=x+2$ ، $(I\ (\Gamma):y=2e^x$

1) بقراءة بيانية تحدد وضعية (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α		0	$+\infty$
الوضعية	فوق	$(\Gamma)\cap(\Delta)=\{E'(\alpha;2e^{\alpha})\}$	تحت	$(\Gamma)\cap(\Delta)=\{E(0;2)\}$	فوق

II) 1) أ) حساب: $f(x)=2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{0}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[2(ex-3)+(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{+\infty}\right]=-\infty$$

ب) نبين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة f':

$$f'(x)=2e+(-x-2)e^{-x+1}=-(2e^{x}+x+2)e^{-x+1}$$

$$=-g(x)e^{-x+1}$$

ج) تعيين دون حساب: لدينا $f'(\sim)=-g(\sim)e^{-\sim+1}=0$

ومنه: $\lim_{h\to0}\frac{f(\sim+h)-f(\sim)}{h}=f'(\sim)=0$

تفسير النتيجة هندسيا: المنحنى (C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة $\sim$ مماسا أفقيا معادلته: $y=f(\sim)$

د) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x)=-g(x)e^{-x+1}$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$ لأن: $e^{-x+1}\succ0$.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على $[\sim;0]$ ومتزايدة تماما على المجالين $]-\infty;\sim]$ و $[0;+\infty[$

x	$-\infty$		B		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	2.15	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ) نبين أن $(D): y=2(ex-3)$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)e^{-x+1}\nearrow^{0}\right]=0$

ومنه: $(D): y=2(ex-3)$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

****دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D):**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y=(x+3)e^{-x+1}$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		تحت	$(C_f)\cap(D)=\{F(-3;-22.31)\}$	فوق	

ب) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها

f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$: $f''(x)=(x+1)e^{-x+1}$

$f''(x)$ انعدمت مغيرة إشارتها عند -1 ومنه: $\mu(-1;3.34)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

ج) نبين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلها $\sim$ حيث: $-2.4\prec\sim\prec-2.3$،

لدينا: $f(-2.3)\approx0.47$ ، $f(-2.4)\approx-1.07$

2) تحديد إشارة $g(x)$ حسب قيم x: لدينا

$$g(x)=-2e^{x}+x+2=-(2e^{x}-(x+2))$$

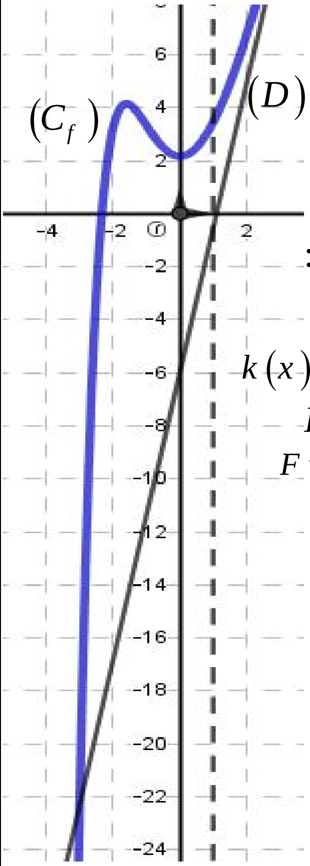
إشارة $g(x)$ تتعلق بوضعية (Γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما أن f معرفة ومستمرة ورتيبة تماما(متزايدة تماما) على $]-2.4;-2.3[$ و $f(-2.4).f(-2.3)\prec0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها حيث $f(\ )=0$

3) إنشاء كل من (D)، (C_f):

$f(\sim)\approx4.15$، $f(-3)\approx-22.31$



4) أ) إيجاد a ; b حتى تكون الدالة $x\to(ax+b)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة: $x\to(x+3)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$، لتكن

$k(x)=(x+3)e^{-x+1}$، $F(x)=(ax+b)e^{-x+1}$

F دالة اصلية للدالة k على $\mathbb{R}$ معناه F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $F'(x)=g(x)$

لدينا: F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$F'(x)=(-ax+a-b)e^{-x+1}$$

بالمطابقة نجد:

$$-a=1;a-b=3$$

ومنه: $a=-1;b=4$

$$F(x)=(-x+4)e^{-x+1}$$

ب) حساب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (D) والمستقيمين الذين معادلتيهما: $x=1$; $x=n$ $(n\succ1)$

$$I_n=\int_1^n[f(x)-y]dx=\int_1^n(x+3)e^{-x+1}dx$$

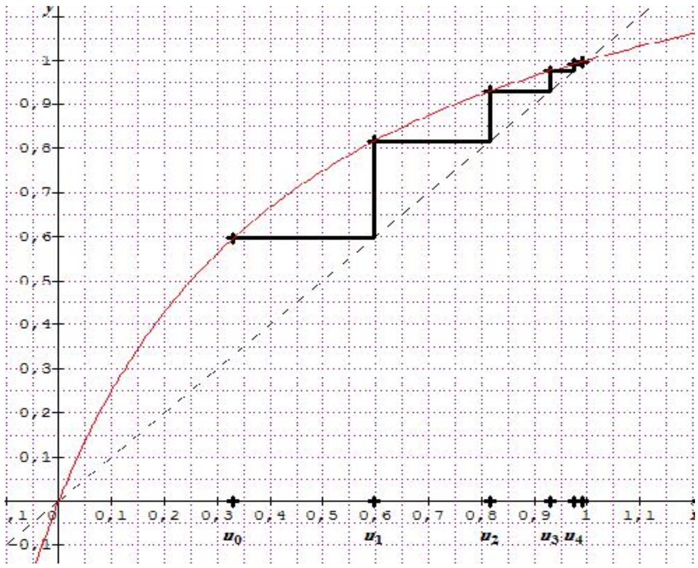
$$=\left[(-x-4)e^{-x+1}\right]_1^n=-(n+4)e^{-n+1}+5(u.a)$$

حساب: $\lim_{n\to+\infty} I_n=\lim_{n\to+\infty}\left[-(n+4)e^{-n+1}+5\right]=5$

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0\,;u_1\,;u_2\,;u_3$:



ب) وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) و تقاربها:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة

2) أ) إثبات من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec 1$

نبرهن بالبرهان بالتراجع

من أجل $n=0$: $0\prec u_0\prec 1$ محققة لأن: $u_0=\frac{1}{3}$

نفرض أنه من أجل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec 1$ صحيحة

ونبرهن أن: $0\prec u_{n+1}\prec 1$

لدينا: $0\prec u_n\prec 1$ و $f(0)=0\ ;\ f(1)=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

بما أن f متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0)\prec f(u_n)\prec f(1)$

ومنه: $0\prec u_{n+1}\prec 1$.

من و نستنتج حسب البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\prec u_n\prec 1$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n^2+2u_n}{2u_n+1}=\frac{-2u_n(u_n-1)}{2u_n+1}$

بما أن: $0\prec u_n\prec 1$ فإن $u_n-1\prec 0$، ومنه: $u_{n+1}-u_n\succ 0$

نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي ℓ

لأنها: محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.

حساب: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3u_n}{2u_n+1}$ يكافئ $\ell=\frac{3\ell}{2\ell+1}$ يكافئ $\frac{-2\ell(\ell-1)}{2\ell+1}=0$

ومنه $\ell=0$ (مرفوض) أو $\ell=1$ (مقبول محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما)، ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

3) أ) نبين أن (v_n) متتالية هندسية:

لدينا:

$$v_{n+1}=\frac{1-u_{n+1}}{2u_{n+1}}=\frac{1-\frac{3u_n}{2u_n+1}}{2\left(\frac{3u_n}{2u_n+1}\right)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1-u_n}{2u_n}\right)=\frac{1}{3}v_n$$ ومنه

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0=\frac{1-u_0}{2u_0}=1$

ب) كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n: $v_n=v_0q^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا $u_n=\frac{1}{2v_n+1}$ ومنه $u_n=\frac{1}{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n:

$$S_n=v_0+2v_1+2^2v_2+\ldots+2^nv_n$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

هومجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$

وأساسها $\frac{2}{3}$ ومنه: $S_n=1\left[\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]=3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\ldots v_n$$
$$=v_0\times(v_0q)\times(v_0q^2)\times\ldots\times(v_0q^n)$$
$$=(v_0)^{n+1}\times q^{0+1+2+\ldots+n}=(1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عدد الحالات الممكنة: $C_9^3=84$

1) حساب احتمال الأحداث:

$p(A)=\frac{C_3^2\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{6}{84}\approx 0.07$ ، $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}\approx 0.06$

الحدث C : سحب كرة بيضاء على الأقل

الحدث $\overline{C}$: عدم سحب كرة بيضاء

ط1: $p(C)=1-p(\overline{C})=1-\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx 0.88$

ط2: $p(C)=\frac{C_4^1\times C_5^2+C_4^2\times C_5^1+C_4^3\times C_5^0}{C_9^3}=\frac{74}{84}\approx 0.88$

2) أ) حساب $p(X=1)$ و $p(X=3)$ ثم استنتاج $p(X=1)$

قيم المتغير العشوائي X هي: $3\,;2\,;1$

$X=1$: "سحب 3 كرات بلون واحد"

$p(X=1)=p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$

"سحب 3 كرات بثلاث ألوان مختلفة": $X=3$

$p(X=3)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_2^1}{C_9^3}=\frac{24}{84}$

"سحب 3 كرات بلونين مختلفين": $X=2$

$(R;R;\bar{R})$ أو $(N;N;\bar{N})$ أو $(B;B;\bar{B})$

ط1: $p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_5^1+C_3^2\times C_6^1+C_2^2\times C_7^1}{C_9^3}=\frac{55}{84}$

ط2: $p(X=2)=1-[p(X=3)+p(X=1)]=\frac{55}{84}$

ب) ليكن Y متغير عشوائي يمثل الربح الصافي الذي يحققه اللاعب قيمه : $-25\,;0\,;+25$ ،

$$E(Y)=-25\left(\frac{5}{84}\right)+0\left(\frac{55}{84}\right)+25\left(\frac{24}{84}\right)=\frac{475}{84}\approx 5.65$$

بما أن : $E(Y)\succ 0$ فإن اللعبة مربحة لهذا اللاعب

3) حساب احتمال أن تكون الكرتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات المسحوبة من لها نفس اللون:

ليكن الحدث F: سحب كرتان من U_2 بيضاوين

لدينا: $p(B)=\frac{C_4^3+C_3^3}{C_9^3}=\frac{5}{84}$ ، $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}$

$$p(B\cap F)=\frac{C_4^3}{84}\times\frac{C_5^2}{C_6^2}+\frac{C_3^3}{84}\times\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{41}{1260}$$

ومنه: $p_B(F)=\frac{p(B\cap F)}{p(B)}=\frac{\frac{41}{1260}}{\frac{5}{84}}=\frac{41}{75}\approx 0.55$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E): $z^2+2|z|^2-\frac{3}{4}=0$

ليكن $z=x+iy$ حيث: $x\,;y$ عددان حقيقيان

(E) تكافئ $(x+iy)^2+2(x^2+y^2)-\frac{3}{4}=0$ تكافئ $3x^2+y^2-\frac{3}{4}+2xyi=0$ تكافئ

$$\begin{cases}3x^2+y^2-\frac{3}{4}=0 \ldots(1)\\ 2xy=0 \qquad \ldots(2)\end{cases}$$

(2) تكافئ $x=0$ أو $y=0$ ثم بالتعويض في المعادلة (1)

من أجل: $x=0$ يكون: $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

من أجل: $y=0$ يكون: $x=\frac{1}{2}$ أو $y=-\frac{1}{2}$

2) أ) كتابة كلا من العددين z_A+z_B و z_C على الشكل الأسي

$z_C=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\left(\frac{-®}{3}\right)}$ ، $z_A+z_B=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2®}{3}}$

ب) نبين أن : $z_C^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=z_A+z_B$

$z_C^{2018}.(z_A+z_B)^{1439}=\left(-(z_A+z_B)\right)^{2018}(z_A+z_B)^{1439}$

$=(z_A+z_B)^{3457}=e^{i\left(\frac{2\times 3457®}{3}\right)}=e^{i\left(\frac{6912+2®}{3}\right)}=e^{i\left(2304+\frac{2®}{3}\right)}$

$=e^{i\left(\frac{2®}{3}\right)}=z_A+z_B$

3) أ) كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر $S\left(A;2;\frac{®}{2}\right)$:

$z'-z_A=2e^{i\frac{®}{2}}(z-z_A)$ ومنه: $z'=2iz-\frac{1}{2}+i$

ب) إيجاد لاحقة النقطتين B' و C' صورتا النقطتين B و C على الترتيب بالتشابه المباشر S:

$z_{C'}=\sqrt{3}-\frac{1}{2}+2i$ ، $z_{B'}=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}+i$

4) نبين ان المبدأ O هو مركز ثقل المثلث ABC: لاحقة مركز ثقل المثلث ABC هي: $z_O=0=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$

نعين (») مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$\left(\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right)\left(\vec{MA}-\vec{MB}\right)=0$ ،

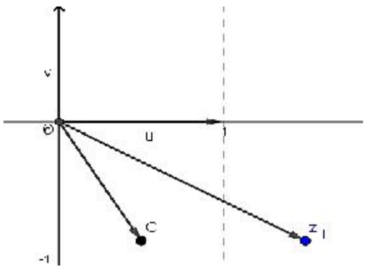
$M\in(»)$ معناه $3\vec{MO}\left(\vec{MA}-\left(\vec{MA}+\vec{AB}\right)\right)=0$

معناه $\vec{OM}.\vec{AB}=0$

ومنه: (») هي مستقيم يشمل المبدأ وشعاع الناظمي $\vec{AB}$

لاحقته: $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ معادلته $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

4) إنشاء النقطة H ذات اللاحقة $z_H=1+e^{-\frac{®}{3}i}$ دون حساب:



لدينا: لاحقة للشعاع $\vec{u}$ هي 1.

لاحقة للشعاع $\vec{OC}$ هي $e^{i\frac{-®}{3}}$

ومنه: $\vec{OH}=\vec{u}+\vec{OC}$ ،

الشعاع $\vec{OH}$ هو محصلة الشعاعين $\vec{OC}$ و $\vec{u}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=x^2-\ln x^2$

دراسة اتجاه تغير الدالة h : h قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$ حيث

$h'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x}$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	‖	−	0	+	
x		−		−	‖	+		+	
$h'(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	

الدالة h متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $]0;1]$ ومتزايدة تماما

ومنه: $S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,;\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

لدينا: $\lim_{|x|\to+\infty} h(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0} h(x)=+\infty$ و $h(-1)=h(1)=1$

إذن: من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x)\succ0$

II) f معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)$

1) أ) حساب:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{2\ln|x|}{x}\right)^{\nearrow0}-x^{\nearrow+\infty}-\left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow0}\right)=-\infty$$

و $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\ln|x|}{-x}\right)^{\nearrow0}-x^{\nearrow-\infty}-\left(\frac{2}{x}\right)^{\nearrow0}\right)=+\infty$$

ب) حساب: $\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow+\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=+\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)^{\nearrow-\infty}\left(-\ln(x^2)^{\nearrow-\infty}-x^2-2\right)=-\infty$$

تفسّير النتيجة بيانيا: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$

2) أ) نبين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $2x^2f'(x)=-h(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[-\frac{\frac{2x.x}{x^2}-1.\ln(x^2)}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}\right]=\frac{-2+\ln(x^2)-x^2+2}{2x^2}$$

ومنه: $2x^2f'(x)=-(x^2-\ln(x^2))=-h(x)$ ، $f'(x)=\frac{-h(x)}{2x^2}$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)\prec0$ ومنه:

الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0;+\infty[$ ، $]-\infty;0[$

x	$-\infty$	-1	B	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	‖	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty \searrow$	$3/2$	$\searrow C \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow 0$	$\searrow -3/2$	$\searrow -\infty$

ج) نبين أن $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ **مستقيم مقارب للمنحنى** (C_f) **:**

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{2}\left[-\frac{2\ln|x|}{x}-\frac{2}{x}\right]=0$$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

دراسة وضعية (C_f) **بالنسبة لـ** (Δ) : ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{-\ln x^2-2}{x}\right]$$

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$ يكافئ $-\ln x^2-2=0$ و $x\neq0$

على المجالين $[1;+\infty[$ ، $[-1;0[$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}\approx-0.37$		0	$\frac{1}{e}\approx0.37$		$+\infty$
$-\ln x^2-2$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
x	$-$		$-$	‖	$+$		$+$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-1}{e};0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)	$(C_f)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{1}{e};-0.18\right)\right\}$	(C_f) تحت (Δ)

3) أ) التحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $f(x)+f(-x)=0$ و $-x\in\mathbb{R}^*$:

إذا كان $x\in\mathbb{R}^*$ فإن $-x\in\mathbb{R}^*$ و

$$f(x)+f(-x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x^2)}{x}-x-\frac{2}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+x-\frac{2}{-x}\right)=0$$

نستنتج أن الدالة f فردية .

تفسير النتيجة بيانيا: النقطة O مركز تناظر للمنحنى (C_f).

ب) نبين أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا ~ على المجال** $]0.3;0.4[$

لدينا: الدالة f معرفة ومستمرة (قابلة للإشتقاق) و رتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]0.3;0.4[$

و $f(0.4)\times f(0.3)\prec0$ ، $f(0.4)\approx-0.41\ ;\ f(0.3)\approx0.53$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا

~ على $]0.3;0.4[$ حيث $f(\sim)=0$

إستنتاج أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا آخر** يطلب تعيين **حصرا له:** بما أن النقطة O مركز تناظر لـ (C_f) و المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا ~ على $]0.3;0.4[$ فإن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها ~ ويقطعه كذلك في نظيرتها فاصلتها بالنسبة للنقطة O حيث $0.3\prec\sim\prec0.4$ و عليه يكون $-0.4\prec\ \ \prec-0.3$

4) أ) نبين أن المنحنى (C_f) **يقبل مماسين** (T_1) و (T_2) **يوازيان المستقيم** (Δ) **يطلب كتابة معادلتيهما:** $f'(x_0)=\frac{-1}{2}$

$\frac{-(x_0^2-\ln(x_0^2))}{2x_0^2}=\frac{-1}{2}$ يكافئ $\ln(x_0^2)=0$ ومنه: $x_0=1$ أو $x_0=-1$

ومنه: $(T_1): y=\frac{-1}{2}x+1$ ، $(T_2): y=\frac{-1}{2}x-1$

ب) إنشاء (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f) :

ج) مناقشة بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة (E) **:** هي تعيين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث: $(\Delta_m): y=-\frac{1}{2}x+m$

يكافئ $\ln x^2=-2$ يكافئ $x^2=e^{-2}$ يكافئ $x=\frac{1}{e}$ أو $x=-\frac{1}{e}$

m	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
عدد و إشارة حلول (E)	حل وحيد سالب	حل مضاعف موجب + حل سالب	حلين موجبين + حل سالب	حلين مختلفين في الإشارة	حل موجب + حلان سالبان	حل موجب + حل مضاعف سالب	حل وحيد موجب

5) نبين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_k)

$$D_k=\mathbb{R}-\{-1\}\text{ ، }k(x)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x+1)^2}{(x+1)}-(x+1)-\frac{2}{(x+1)}\right)+2$$

بما أن: $k(x)=f(x+1)+2$ فإن (C_k) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{V}=-\vec{i}+2\vec{j}$

6) أ) نبين ان الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

لدينا: $F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)$

تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$ إذا كانت الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $F'(x)=f(x)$

لدينا: الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{4}.2\ln(x^2).\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{\ln(x^2)}{x}-\frac{2}{x}\right)=f(x)$$

ومنه: F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

ب) إيجاد الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$:

بما أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$ فإنها تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}^*$ من الشكل: $x\to F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي.

$F(1)+c=0$ يكافئ $c=\frac{1}{4}$ ومنه الدالة الاصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل $x=1$ هي الدالة:

$$x\to\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)+\frac{1}{4}$$

ج) حسب التكامل: $A(\alpha)=-\int_1^{\alpha}f(x)dx$ حيث $\alpha\succ1$

$$A(\alpha)=-\int_1^{\alpha}f(x)dx=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{-1}{2}x^2-\frac{1}{4}\left[\ln(x^2)\right]^2-2\ln|x|\right)\right]_1^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{8}\left[\ln(\alpha^2)\right]^2+\ln\alpha-\frac{1}{4}\quad(u.a)$$

تفسير النتيجة هندسيا: $A(\alpha)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x=1\,;x=\alpha\,;y=0$

$$\lim_{x\to+\infty}A(\alpha)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{1}{8}\left[\ln(\alpha^2)\right]^2+\ln\alpha-\frac{1}{4}\right)=+\infty$$

بالتوفيق في البكالوريا