الجُمْهُورِيَّةُ الجَزَائِرِيَّةُ الدّيمُقْرَاطِيَّةُ الشَّعْبِيَّةُ

وَزَارَةُ التَّرْبِيَةِ الوَطَنِيَة

مُدِيرِيَة التَّرْبِيَة لِوِلَايَةِ الأَغْوَاطِ ثَانَوِيَّةُ الشَّهِيدِ مُحمَّد بُوسبسي

الاختبار الأوّل في مـــادّة الرياضيات لسنوات الثّالثة علوم تجريبية

الإثنين 04 ديسمبر 2017

ملاحظة

تُمنح نُقْطَةٌ وَاحِدَةٌ عَلَى تَنْظِيمِ وَرَقَةِ الإِجَابَة

السُّؤَالُ النَّظرِي:(نُقْطَةٌ وَاحِدَةٌ)

أجب على سؤال واحد فقط:

❶ f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=2x+3$.

- بـرّر لماذا: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$.

❷ f دالة عددية معرفة و قابلة للإشتقاق على المجموعة D.

إذا كانت f ثابتة على D **فإنّ** الدالة المشتقة للدالة f تنعدم من أجل كل قيمة من D.

- أثبت أن العكس ليس دائما صحيح.

التمرين الأوّل: (07نِقاطٍ): أجب بـ: **صح** أو **خطأ** مع التبرير.

1) إذا كان: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ فإنّ $f(x)=g(x)$.(يمكن التبرير بمثال واحد فقط).

2) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)+2x+1\right]=\dfrac{3}{2}$ تكافئ أنَّ: المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+\dfrac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحى الدالة f.

3) من أجل كل عددان حقيقيان سالبان تماما: a و b: $\ln(a\times b)=\ln(-a)+\ln|b|$.

4) $3\ln\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)+12\ln\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{10}}}}\right)=0$.

5) المعادلة $(x)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^{x}$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}_+^*$.

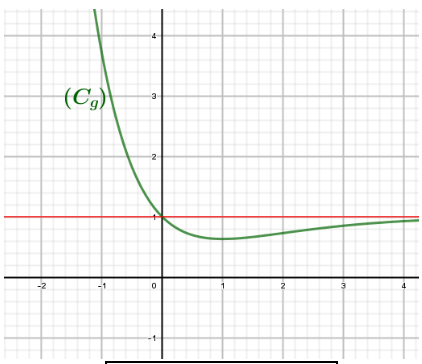
6) $1+3^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{2}{2}}+3^{\frac{3}{2}}+....+3^{\frac{n}{2}}=-\dfrac{1}{2}\left(1-\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)$.حيث $(n\in\mathbb{N})$.

7) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و في **الشكل 01** جدول تغيراتها .

وَ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و في **الشكل 02** تمثيلها البياني .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	4 ↘	2	↗ $+\infty$

الشكل 01



الشكل 02

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=2$

التمرين الثّاني:(03 نقاط)

f وَg دالتان عدديتان معرفتان و **قابلتان للإشتقاق** عند العدد الحقيقي x_0.

بحيث: $f(x_0)=g(x_0)=0$ وَ $g'(x_0)\neq 0$.

1) هل الدّالتان f وَ g مستمرتان عند القيمة x_0 ؟. بــرّر إجابتك.

2) بين أنَّ: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

3) استنتج: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2-x}\right)$.

التمرين الثالث :(08 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـِ: $f(x)=e\ln(x)-x$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها. ثم استنتج إشارة الدالة f على $\mathbb{R}_+^*$.

3) قارن بين العددين: π^e وَ e^π.

4) عين معادلة لِـ T مماس المنحنى C_f في النقطة A ذات الفاصلة $x_0=1$.

- بين أنَّ المعادلة $e\ln x=x-3$ تقبل **حلين فقط** α وَ β حيث $\alpha\in]0;1[$ وَ$\beta\in]8.9;9[$.
- استعمل الجدول أدناه من أجل استنتاج **أحسن** حصر للعدد α سعته 10^{-1}.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	-6,36	-4,57	-3,57	-2,89	-2,38	-1,99	-1,67	-1,41	-1,19	-1

5) أنشئ C_f على المجال $]0;\beta]$ في المعلم السابق.

6) ناقش ***بيانيا*** حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m+1$.

7) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـِ: $g(x)=e\ln(x+1)-x$.

- تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فإنّ $g(x)=f(x+1)+1$.
- اشرح- **دون رسم** - كيفية إنشاء C_g انطلاقا من C_f.

8) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـِ: $h(x)=x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\dfrac{1}{2}x\right)$.

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+^*$ فإنّ: $h'(x)=a\ln x+bx+c$ حيث a, b وَ c أعداد حقيقية يُطلب تعينها.
- أحسب نهاية الدالة h عند أطراف مجال التعريف.
- استنتج إتجاه تغير الدالة h.

الأستاذ : يتمنى النّجاح للجميع

مـــن رام العلـى من غيـر كـد ✵ أضاع العـمـر في طلب المحـــال

بقـدر الكـد تكتسب المعالــي ✵ و من أراد العلـى سـهر الليالي

بسم الله الرّحمن الرّحيم

الحمد لله و الصلاة و السّلام على سيّدنا محمّد

صلّى الله عليه و سلّم

فيما يلي الحل المفصل للإمتحان الأوّل في مادّة الرّياضيات

السُّؤالُ النَّظري: (نُقطَةٌ وَاحِدَةٌ)

السؤال لأوّل:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x)=2x+3$.

التبرير أنّ: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$:

نعلم أنّ: $f: x \mapsto 2x+3$ مستمرة على $\mathbb{R}$. و منه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=f(1)=5$.

و لو كان السؤال : أثبت أنّ: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$.

نلجأ عندئذ الى حساب النهاية بإستعمال التعريف:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=5 \Leftrightarrow \forall \zeta>0;\exists \alpha>0 : |x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)-5|<\zeta.$$

$$|f(x)-5|<\zeta \Leftrightarrow |2x+3-5|<\zeta$$
$$\Leftrightarrow |2x-2|<\zeta$$
$$\Leftrightarrow 2|x-1|<\zeta.$$
$$\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\zeta}{2}$$

بأخذ: $\alpha=\frac{\zeta}{2}$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=5 \Leftrightarrow \forall \zeta>0;\exists \alpha>0 : |x-1|<\alpha=\frac{\zeta}{2} \Rightarrow |f(x)-5|<\zeta.$$

السؤال الثاني:

لدينا: f دالة عددية معرفة و قابلة للإشتقاق على المجموعة D.

إذا كانت f ثابتة على D **فإنّ** الدالة المشتقة للدالة f تنعدم من أجل كل قيمة من D.

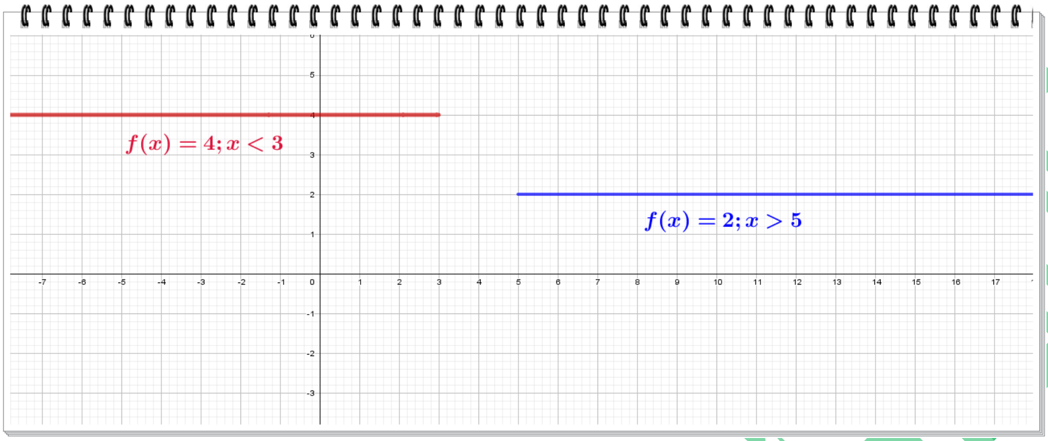
إثبات أن العكس ليس دائماً صحيحا.

تثبت ذلك بمثال مضاد:

لدينا: f دالة عددية معرفة على $D=]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$, كما يلي: $\begin{cases} f(x)=4; x<3 \\ f(x)=2; x>5 \end{cases}$.

نلاحظ أنّ الدّالة f **غير** ثابتة على مجموعة تعريفها لكن من أجل كل عدد حقيقي x من D فإنّ: $f'(x)=0$.

و هذا ما يثبت أن عكس الخاصية غير صحيح.



للتوضيح

خلاصة:

إذا كانت مجموعة تعريف الدالة f عبارة عن مجال. فهذا يعني :

الدالة المشتقة f' منعدمة $\Leftarrow$ الدالة ثـــابتة.

الدالة المشتقة f' منعدمة $\Rightarrow$ الدالة ثـــابتة.

أما إذا كانت مجموعة التعريف عبارة عن إتحاد مجالين غير متقاطعين فإننا لا نضمن الاستلزام التالي:

الدالة المشتقة f' منعدمة $\Leftarrow$ الدالة ثـــابتة.

التمرين الأوّل: (07 نقاط) : **الاجابة** بـ : صح أو خطأ مع التبرير.

1) إذا كان: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ فإنَّ $f(x)=g(x)$. خطأ

التبرير بمثال: $f(x)=x+1$ ، $g(x)=x+8$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ لكن $f(x)\neq g(x)$.

2) $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)+2x+1\right]=\frac{3}{2}$ تكافئ أنَّ: المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحى الدالة f. صحيح.

التبرير :

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)+2x+1\right]=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)+2x+1-\frac{3}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)+2x+1-\frac{3}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)+2x-\frac{1}{2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(-2x+\frac{1}{2}\right)\right]=0$$

و هذا: يكافئ أنَّ: المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+\frac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحى الدالة f بجوار $+\infty$.

3) من أجل كل عددين حقيقيين سالبين تماما a وَ b لدينا : $\ln(a\times b)=\ln(-a)+\ln|b|$. صحيح.

التبرير :

بما أنَّ: $a<0$ فإنّ $-a>0$. وَ بما أنَّ: $b<0$ فإنّ $|b|=-b>0$.

وَ من أجل a وَ b عددان حقيقيان سالبان تماما فإنَّ: $a\times b>0$.

$\ln(-a)+\ln|b|=\ln((-a)(-b))=\ln(a\times b)$.

4) $3\ln\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)+12\ln\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{10}}}}\right)=0$. صحيح.

التبرير:

$$3\ln\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}\right)+12\ln\left(\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^{10}}}}\right)=3\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}+12\ln\left(\left(\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)^{10}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=3\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}+12\ln\left(\left(\left(\left(3-2\sqrt{2}\right)^{10}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$=3\times\frac{1}{3}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+12\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)^{\left(10\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}\right)}$$

$$=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+12\times\frac{10}{120}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)+\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$=\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$=\ln\left(9-8\right)$$

$$=\ln\left(1\right)$$

$$=0$$

1) المعادلة $(x)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^{x}$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}_+^*$. صحيح.

التبرير: المعادلة معرّفة على: $\mathbb{R}_+^*$.

$$(x)^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^{x}\Leftrightarrow\ln\left((x)^{\sqrt{x}}\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x}\right)^{x}\right]$$

$$\Leftrightarrow\ln\left((x)^{\sqrt{x}}\right)=\ln\left[\left(\sqrt{x}\right)^{x}\right]$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln(x)=x\ln\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln(x)=\frac{1}{2}x\ln x$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln x=0$$

$$\Leftrightarrow\ln(x)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\ln(x)=0\right)\vee\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)=0$$

و لدينا:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=\frac{1}{2}x\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}x^{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^{2}-x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{4}x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x=0\right)\vee\left(x=4\right)$$

و لدينا أيضاً: $\ln(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

2018-2017

ثانوية الشهيد محمّد بوسبسي بالأغواط

الحل المفصل للإمتحان الأوّل في مادة الرياضيات

شعبة: علوم تجريبية

الموسم الأول

بما أنَّ: $0 \notin \mathbb{R}_+^*$ فإنَّ مجموعة حلول المعادلة $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$ على $\mathbb{R}_+^*$ هي: $S = \{1;4\}$.

2) حساب المجموع : $1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{2}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} + ... + 3^{\frac{n}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

$$1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{2}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} + ... + 3^{\frac{n}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^0 + \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^1 + \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^3 + ... + \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^n.$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^0 + \left(\sqrt{3}\right)^1 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^3 + ... + \left(\sqrt{3}\right)^n$$

$$= 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^0 + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^1 + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^3 + ... + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^n$$

و هي مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية حدها الأوَّل $U_0 = 1$ و أساسها $q = \sqrt{3}$.

نضع: $S_n = 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^0 + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^1 + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^2 + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^3 + ... + 1 \times \left(\sqrt{3}\right)^n$.

$$S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)\left(1 + \left(\sqrt{3}\right)\right)}{\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)\right)\left(1 + \left(\sqrt{3}\right)\right)}$$

$$= \frac{\left(1 - \left(\sqrt{3}\right)^{n+1}\right)\left(1 + \left(\sqrt{3}\right)\right)}{-2}$$

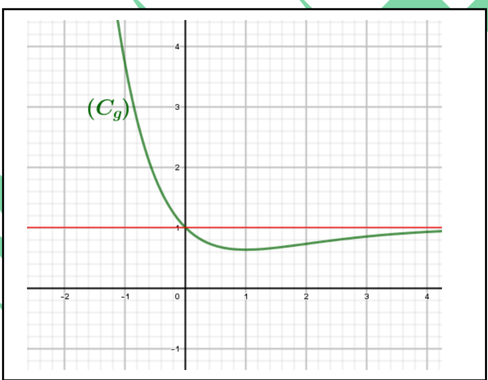
$$= -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}^{\,n+1}\right)\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

3) لدينا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و جدول تغيراتها في الشكل 01.

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و تمثيلها البياني في الشكل 02.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	4 ↘	2	↗ $+\infty$

الشكل 01



الشكل 02

خطأ

التبرير:

من الشكلين 01 و 02 نستنتج أنّ:

1) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$. لأنّ الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$. لأنّ $y = 1$ هي معادلة لمستقيم مقارب لـ: C_g بجوار $+\infty$.

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(g(x)) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 1.$$

إذن: $\lim_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) \neq \lim_{x \to +\infty} (g \circ f)(x)$.

التمرين الثّاني:(04 نقاط)

f وَ g دالتان عدديتان معرفتان و **قابلتان للإشتقاق** عند العدد الحقيقي x_0.

بحيث: $f(x_0) = g(x_0) = 0$ وَ $g'(x_0) \neq 0$.

1) هل الدّالتان f وَ g مستمرتان عند القيمة x_0 ؟. مع تبرير الإجابة:

الجواب: نعم , f وَ g دالتان مستمرتان عند العدد الحقيقي x_0. **لأنهما** قابلتان للإشتقاق عند العدد الحقيقي x_0.

2) إثبات أنّ: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$:

بما أنّ f قابلة للإشتقاق عند العدد الحقيقي x_0 فإنَّ: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

بما أنّ g قابلة للإشتقاق عند العدد الحقيقي x_0 فإنَّ: $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left[\dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\right] = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

$$\lim_{x\to x_0} \dfrac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-0}{g(x)-0} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

3) استنتاج: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2-x}$.

نضع: $f(x)=\sin(x)+\cos(x)-1$ و $g(x)=x^2-x$.

و منه: $f'(x)=\cos(x)-\sin(x)$. و $g'(x)=2x-1$.

الدالتان f و g قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا ما يلي:

$g'(0)=-1$	$f'(0)=1$	$g(0)=0$	$f(0)=0$

حسب السؤال السابق:

$$\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)+\cos(x)-1}{x^2-x}.$$

$$= \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \dfrac{1}{-1}$$

$$= -1$$

التمرين الثّاني: (08 نقاط)

لدينا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـِ: $f(x)=e\ln(x)-x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف:

لدينا: $D_f=]0;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e\ln(x)-x\right)$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e\frac{\ln(x)}{x}-1\right)\right)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}0}\left(e\ln(x)-x\right)=-\infty$.

2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $f(x)=e\ln(x)-x$.

و منه: $f'(x)=\frac{e}{x}-1=\frac{e-x}{x}$.

- إشارة الدالة المشتقة:

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e-x}{x}=0$.

$\Leftrightarrow e-x=0$

$\Leftrightarrow x=e$.

بما أنَّ: $x\in\mathbb{R}_+^*$ فإنّ إشارة f' من إشارة $x-e$.

x	$-\infty$	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

- جدول التغيرات:

x	0		e		$-\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(e)=0$	$\searrow$	$-\infty$

- إشارة الدالة f: من جدول التغيرات نلاحظ أنَّ: $\forall x\in\mathbb{R}_+^*: f(x)\leq 0$.

3) المقارنة بين العددين: π^{e} و e^{π} .

نعلم أنّ: $e<\pi$ و منه : $f(e)>f(\pi)$ لأنّ الدالة f متناقصة على المجال $[e;+\infty[$.

و منه: $e\ln(e)-e>e\ln(\pi)-\pi$.

و منه: $0>e\ln(\pi)-\pi$.

و منه: $\pi>e\ln(\pi)$.

و منه: $\pi>\ln(\pi)^{e}$.

و منه: $e^{\pi}>e^{\ln(\pi)^{e}}$.

و منه: $e^{\pi}>\pi^{e}$.

4) تعيين معادلة للمماس T في النقطة A ذات الفاصلة $x_0=1$:

$$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=(e-1)(x-1)-1$$
$$=(e-1)x-e+1-1.$$
$$=(e-1)x-e$$

إثبات أنّ المعادلة $e\ln x=x-3$ تقبل حلين فقط α و β حيث $\alpha\in]0;1[$ و $\beta\in]8.5;9[$:

$e\ln x=x-3 \Leftrightarrow e\ln x-x=3$.

$\Leftrightarrow f(x)=3$.

من جدول التغيرات يمكن أن نستنتج أنّ:

f مستمرة و رتيبة (متزايدة تماما) على $]0;e[$ و بالتالي على المجال $]0;1[$.

ولدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$. و $f(1)=-1$.

أي: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty<-3<f(1)=-1$.

إذن:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=3$ أي $e\ln x-x=3$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha\in]0;1[$.

من الجدول أدناه نستنتج أنّ أحسن حصر للعدد α هو : $]0.3;0.4[$.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
f(x)	-6,36	-4,57	-3,57	-2,89	-2,38	-1,99	-1,67	-1,41	-1,19	-1

من جدول التغيرات يمكن أن نستنتج أنَّ:

f مستمرة و رتيبة (متناقصة تماما) على $]e;+\infty[$ و بالتالي على المجال $]8.9;9[$.

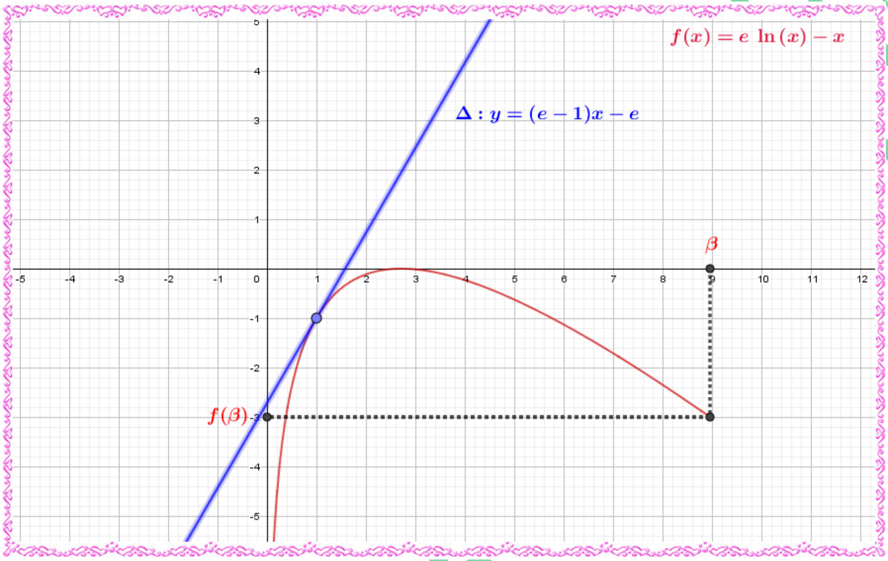
ولدينا : $f(8.5)=-2.68$. وَ $f(3)=-3.03$.

أي: $f(8.5)=-2.68<-3<f(3)=-3.03$.

إذن:

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x)=3$ أي $e\ln x-x=3$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $\beta\in]8.9;9[$.

5) إنشاء C_f و المماس T على المجال $]0;\beta]$ في المعلم السابق:



6) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=m+1$:

أي نبحث عن عدد و فواصل النقاط المشتركة بين C_f و $\Delta_m: y=m+1$.

عدد و إشارة الحلول المطلوبة	قيم m
يوجد حل وحيد موجب تماما	لما $m+1\in]-\infty;f(\beta)[$ أي: $m<f(\beta)-1$
يوجد حلان موجبان تماما أحدهما β . و الآخر α.	لما $m+1=f(\beta)$ أي: $m=f(\beta)-1$.
يوجد حلان موجبان تماما أحدهما .	لما $f(\beta)<m+1<0$ أي: $f(\beta)-1<m<-1$
يوجد حل مضاعف هو e	لما $m+1=0$ أي: $m=-1$.
لا توجد حلول.	لما $m+1>0$ أي: $m>-1$.

و بما أنَّ: $f(\beta)=-3$ و ذلك حسب مبرهنة القيم المتوسطة يصبح الجدول السابق كما يلي:

عدد و إشارة الحلول المطلوبة	قيم m
يوجد حل وحيد موجب تماما	لما $m+1\in]-\infty;-3[$ أي: $m<-4$
يوجد حلان موجبان تماما أحدهما β . و الآخر α.	لما $m+1=-3$ أي: $m=-4$.
يوجد حلان موجبان تماما أحدهما .	لما $-3<m+1<0$ أي: $-4<m<-1$
يوجد حل مضاعف هو e	لما $m+1=0$ أي: $m=-1$.
لا توجد حلول.	لما $m+1>0$ أي: $m>-1$.

7) لدينا: الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـِ: $g(x)=e\ln(x+1)-x$.

التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$ فإنّ $g(x)=f(x+1)+1$.

$$f(x+1)+1=e\ln(x+1)-(x+1)+1$$
$$=e\ln(x+1)-x-1+1$$
$$=e\ln(x+1)-x.$$
$$=g(x)$$

شرح كيفية إنشاء C_g انطلاقا من C_f:

الطريقة الأولى:

لدينا: $g(x)=f(x+1)+1$ و منه نستنتج أن C_g هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1;1)$.

الطريقة الثانية:

لدينا: $g(x)=f(x+1)+1 \Leftrightarrow f(x+1)=g(x)-1$.

نضع: $y=g(x)$ وَ $y'=f(x')$.

و منه C_g هو صورة C_f بالتحويل المعرف تحليليا كما يلي $\begin{cases}x'=x+1\\y'=y-1\end{cases}$.

$\begin{cases}x'=x+1\\y'=y-1\end{cases}$ هذه الكتابة التحليلية هي لإنسحاب شعاعه $\vec{u}(1;-1)$.

إذن: أن C_g هو صورة C_f بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-1;1)$.

8) **لدينا:** h معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـِ: $h(x)=x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)$.

إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+^*$ فإنّ: $h'(x)=a\ln x+bx+c$ حيث a, b وَ c أعداد حقيقية يُطلب تعينها.

لدينا: $h(x)=x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)$.

ومنه: $h'(x)=1\times\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)+\left(e\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\right)x$.

$$=e\ln x-e-\frac{1}{2}x+e-\frac{1}{2}x$$
$$=e\ln x-x$$.

$h'(x)=a\ln x+bx+c \Leftrightarrow a\ln x+bx+c=e\ln x-x+0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=e\\ b=-1\\ c=0\end{cases}$$.

إذن: $h'(x)=e\ln x-x=f(x)$.

حساب نهاية الدالة h عند أطراف مجال التعريف:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e\frac{\ln(x)}{x}-\frac{e}{x}-\frac{1}{2}\right)$$.
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}h(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)\right)$$.
$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(x\left(e\left(\ln(x)-1\right)-\frac{1}{2}x\right)\right)$$
$$=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(e\left(x\ln(x)\right)-ex-\frac{1}{2}x^2\right)$$.
$$=0$$

استنتاج إتجاه تغير الدالة h :

بما أنَّ $h'(x)=f(x)$ وَ $f(x)\le 0$ على المجال $]0;+\infty[$. فـإنَّ: $h(x)$ متناقصة على المجال $]0;+\infty[$.