القسم : 3 تقني رياضي　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　معطى يوم :

واجب منزلي رقم (　)

يعاد يوم :

التمرين الأول :

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ ب : $g(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

2) احسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

II) f الدالة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) أ – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب – بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب للمنحني (C_f) .

ج – عين نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ) ؛ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1,+\infty[$ فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

ج – انشيء المستقيم (Δ) و المنحني (C_f) .

4) بين أنه من أجل كل x من المجال $[0,4]$ يكون $f(x)$ ينتمي إلى $[0,4]$.

III) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=4$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1) أ / باستعمل المنحني (C_f) والمستقيم $(\Delta):y=x$. علم على محور الفواصل الحدود u_0 , u_1 , u_2 و u_3 .

ب / برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $u_n\in[0,4]$.

ج / ادرس رتابة المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

د / نرمزب ℓ لنهايتها ؛ عين قيمة ℓ .

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3}n+1$

1) أحسب الحدود u_2 , u_3 , u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) .ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أ / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq1$: $u_n\leq n+3$. ثم استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل .

ب / بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq1$ فإن : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج / هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك ثم أحسب نهايتها إن أمكن .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل $n\geq1$ ب : $v_n=u_n-n$.

أ / برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها .

ب / اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ مرة أخرى .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq1$:

$$S_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1 v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2+.....+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n \quad , \quad S'_n=u_1+u_2+.......+u_n \text{ و } T_n=\frac{S'_n}{n^2}$$

- أحسب المجموعين S_n و S'_n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.