مثال 01:

1) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n+3\equiv 5[11]$.

2) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n\equiv 2[5]$.

الحل :

1) $n+3\equiv 5[11]$ تكافؤ $n+3-5\equiv 5-5[11]$ أي $n-2\equiv 0[11]$ ومنه $n\equiv 2[11]$.

إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $n+3\equiv 5[11]$ هي من الشكل $n=2+11k$ حيث k عدد صحيح.

2) لدينا $3n\equiv 2[5]$ و $2\equiv 2[5]$ فحسب الخاصية 6 من الجدول السابق فإن $2\times 3n\equiv 2\times 2[5]$ أي $6n\equiv 4[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$ إذن مجموعة الأعداد الصحيحة n بحيث $3n\equiv 2[5]$ هي من الشكل $n=4+5k$ حيث k عدد صحيح.

ملاحظة يمكن استعمال الجدول :

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$3n\equiv$	0	3	1	4	2	[5]

مثال 02 :

بين أنه من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5

الحل :

$n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5 **معناه** $n(n^4-1)\equiv 0[5]$. **نستعمل الجدول التالي :**

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^4-1\equiv$	-1	0	0	0	0	[5]
$n(n^4-1)\equiv$	0	0	0	0	0	[5]

إذن من أجل كل عدد صحيح n فإن $n(n^4-1)$ يقبل القسمة على 5

مثال :

أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب) استنتج باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

الحل :

أ) $5\equiv 5[7]$, $5^2\equiv 4[7]$, $5^3\equiv 6[7]$, $5^4\equiv 2[7]$, $5^5\equiv 3[7]$, $5^6\equiv 1[7]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 6 . نقسم الأس n على الدور 6 فنجد $n=6k+r$ حيث $0\leq r<6$

من أجل كل عدد طبيعي k نلخص في الجدول التالي

إذا كان $r =$	فإن $n=6k+r$	وبالتالي باقي قسمة العدد 5^n على 7 هو.
0	$n=6k$	**1**
1	$n=6k+1$	**5**
2	$n=6k+2$	**4**
3	$n=6k+3$	**6**
4	$n=6k+4$	**2**
5	$n=6k+5$	**3**

ب) باقي قسمة العدد 5^{2013} على 7

نقسم الأس 2013 على الدور 6 فنجد $2013 = 6\times 335 + \underline{3}$ من الشكل $6k+3$ وبالتالي من الجدول السابق مباشرة نجد $5^{2013} \equiv 6[7]$.

استعد للبكالوريا : تمارين محلولة

التمرين رقم 01 :

1) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 .

ب) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{10} على 11 .

ج) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^{2009}+2009$ على 11 .

2) p عدد طبيعي . نعتبر من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، العدد A_n حيث $A_n=2^n+p$
و نرمز d_n إلى $PGCD$ لـ A_n و A_{n+1} .

أ) بيّن أن d_n يقسم 2^n .

ب) عيّن شفعية A_n بدلالة شفعية p .

ج) عيّن شفعية d_n بدلالة شفعية p .

استنتج $PGCD$ للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$.

التمرين رقم 02 :

1) أكتب مجموعة الأعداد الصحيحة التي تقسم العدد 6 .

2) عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n-4$ يقسم 6 .

3)عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n-4$ يقسم $n+2$.

4)عيّن الأعداد الصحيحة n حيث $n+1$ يقسم $3n-4$.

التمرين رقم 03 :

1) تحقق أن 7 يقسم الأعداد : 2^6-1 ؛ 3^6-1 ؛ 4^6-1 و 5^6-1 .

2) ليكن n عدد طبيعي . نعتبر العدد A_n حيث $A_n=2^n+3^n+4^n+5^n$. بيّن أن $A_{n+6}\equiv A_n[7]$.

3) ليكن n عدد طبيعي ، q و r حاصل وباقي قسمة n على 6 .

أ) بيّن أن A_n و A_r لهما نفس باقي قسمتهما على 7 .

ب) عيّن قيم r التي من أجلها يكون $A_r\equiv 0[7]$. استنتج قيم n التي من أجلها يكون A_n يقبل القسمة على 7 .

4) ليكن $B_n=100^n+101^n+102^n+103^n$.

أ) بيّن أن B_n-A_n مضاعف للعدد 7 .

ب) **هل العدد** B_{2006} يقبل القسمة على 7 ؟.

التمرين رقم 04:

1)أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.

2) بين أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a , b , c فإن المساواة التالية دوما صحيحة

$PGCD(a,b)=PGCD(bc-a,b)$.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 فإن المساواة التالية دوما صحيحة

$PGCD(3n^3-11n,n+3)=PGCD(48,n+3)$.

4) أ) عين جميع القواسم الطبيعية للعدد 48.

ب) استنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث : $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ يكون عددا طبيعيا.

التمرين رقم 05 :

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_1) ذات المجهول (x,y) : $11x+8y=79$

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حل للمعادلة (E_1) فإن $y\equiv 3[11]$.

ب) حل المعادلة (E_1).

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_2) ذات المجهول (y,z) : $3y+11z=372$

أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (y,z) حل للمعادلة (E_2) فإن $z\equiv 0[3]$.

ب) حل المعادلة (E_2).

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_3) ذات المجهول (x,z) : $3x-8z=-249$

4) السعر الكلي لـ 41 قطعة حديدة ، موزعة في ثلاث علب هو $480DA$.

سعر كل قطعة من العلبة الأولى هو $48DA$

سعر كل قطعة من العلبة الثانية هو $36DA$

سعر كل قطعة من العلبة الثالثة هو $4DA$

عين عدد القطع في كل علبة .

التمرين رقم 06 :

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $5x-3y=2$

2) A عدد طبيعي يكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس x ويُكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس y حيث $x\leq 12$ و $y\leq 20$ عين القيم الممكنة للعددين x و y ثم أكتب A في النظام ذي الأساس 10 .

التمرين رقم 07:

c عدد أولي بحيث يكون $11c+1$ مربعا تاما. عين c

التمرين رقم 08:

n عدد طبيعي

1) بين أن $PGCD(n^2+5n+7\ ,\ n+1)=PGCD(n+1\ ,\ 3)$

2) استنتج قيم n الطبيعية التي من أجلها يكون n^2+5n+7 و $n+1$ أوليين فيما بينهما.

التمرين رقم 09:

1) بين انه من أجل كل $(a,b,q)\in\mathbb{Z}^3$: $PGCD(a,b)=PGCD(b,a-bq)$

2) بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$ ، $PGCD(5n^3-n,n+2)=PGCD(n+2,38)$

3) عين مجموعة قيم n الصحيحة بحيث $(n+2)$ يقسم $(5n^3-n)$.

التمرين رقم 10 :

N عدد طبيعي .

1) أعط في جدول البواقي الممكنة لـ N بترديد 9 ثم لـ N^2 بترديد 9

2) نفرض أنه يوجد عددان طبيعيان a و b بحيث : $a^2-250507=b^2$. عين البواقي الممكنة لـ $a^2-250507$ بترديد 9 واستنتج البواقي الممكنة لـ a^2 بترديد 9 .

3) بين أن البواقي الممكنة لـ a بترديد 9 هي فقط 1 و 8 .

التمرين رقم 11:

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 13.

2) استنتج أن العدد $5-1981^{1981}$ يقبل القسمة على 13

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 فإن العدد $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13

حلول استعد للبكالوريا

حل التمرين رقم 01 :

(1

أ) $2009=11\times182+7$ ومنه باقي القسمة الإقليدية للعدد 2009 على 11 هو 7 ونكتب $2009\equiv7[11]$

ب) $2^{10}\equiv2^{5\times2}[11]$ تكافئ $2^{10}\equiv\left(2^5\right)^2[11]$ أي $2^{10}\equiv(32)^2[11]$ ونكتب كذلك $2^{10}\equiv(-1)^2[11]$ أي $2^{10}\equiv1[11]$.

ج) $2^{2009}\equiv\left(2^{10}\right)^{200}\times\left(2^9\right)[11]$ ومنه $2^{2009}\equiv(1)(-5)[4]$ وبالتالي $2^{2009}+2009\equiv-5+7[11]$

إذن $2^{2009}+2009\equiv2[11]$

2) أ) d_n يقسم A_n و A_{n+1} فهو يقسم الفرق

$$A_{n+1}-A_n=2^{n+1}+p-2^n-p=2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$$

إذن d_n يقسم 2^n.

ب) لدينا $n>0$ ، 2^n زوجي ومنه $A_n=2^n+p$ له نفس الشفعية مثل p .

ج) A_n و A_{n+1} لهما نفس الشفعية (مثل p):

- إذا كان p فرديا فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه كذلك $PGCD$ فردي.
- إذا كان p زوجيا فإن A_n و A_{n+1} كذلك ومنه كذلك $PGCD$ زوجي .

حسب ماسبق $PGCD$ للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$ هو فردي لأن 2009 فردي. هذا من جهة ومن جهة أخرى $PGCD$ يقسم 2^{2009} . مجموعة القواسم الموجبة للعدد 2^{2009} هي $D_{2^{2009}}=\{1,2,2^2,2^3,.......,2^{2009}\}$.

$PGCD$ للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$ هو القاسم الوحيد الفردي لـ 2^{2009} هو إذن **1**.

حل التمرين رقم 02 :

1) $S_1=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;6\}$

2) إذا كان $(n-4)\in S_1$ فإن $n\in\{-2;1;2;3;5;6;7;10\}$

3) $n+2=(n-4)+6$ و منه $n-4$ يقسم $n+2$ إذا وفقط إذا كان $n-4$ يقسم 6 .

أي $n\in\{-2;1;2;3;5;6;7;10\}$.

4) $3n-4=3(n+1)-7$ و منه $n+1$ يقسم $3n-4$ إذا وفقط إذا كان $n+1$ يقسم 7 .

أي $(n+1)\in\{-7;-1;7\}$ و منه $n\in\{-8;-2;0;6\}$.

حل التمرين رقم 03 :

(1

- $2^6-1=63=7\times9$ ومنه 2^6-1 يقبل القسمة على 7 .
- $3^6-1=728=7\times104$ ومنه 3^6-1 يقبل القسمة على 7 .
- $4^6-1=4095=7\times585$ ومنه 4^6-1 يقبل القسمة على 7 .
- $5^6-1=15624=7\times2232$ ومنه 5^6-1 يقبل القسمة على 7 .

(2 $A_{n+6}-A_n=\left(2^{n+6}+3^{n+6}+4^{n+6}+5^{n+6}\right)-\left(2^n+3^n+4^n+5^n\right)$

$$A_{n+6}-A_n=2^{n+6}+3^{n+6}+4^{n+6}+5^{n+6}-2^n-3^n-4^n-5^n$$

$$A_{n+6}-A_n=2^{n+6}-2^n+3^{n+6}-3^n+4^{n+6}+5^{n+6}-3^n-4^n-5^n$$

$$A_{n+6}-A_n=2^n\left(2^6-1\right)+3^n\left(3^6-1\right)+4^n\left(4^6-1\right)+5^n\left(5^6-1\right)$$

بما أن $5^6-1\equiv0[7]\ ;\ 4^6-1\equiv0[7]\ ;\ 3^6-1\equiv0[7]\ ;\ 2^6-1\equiv0[7]$ فإن $A_{n+6}-A_n\equiv0[7]$ أي $A_{n+6}\equiv A_n[7]$

3) أ) لدينا $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n = 2^{6q+r} + 3^{6q+r} + 4^{6q+r} + 5^{6q+r}$ أو بعبارة أخرى

$A_n = 2^{6q} \times 2^r + 3^{6q} \times 3^r + 4^{6q} \times 4^r + 5^{6q} \times 5^r$ ولدينا مما سبق

$2^6 \equiv 1[7] \;;\; 3^6 \equiv 1[7] \;;\; 4^6 \equiv 1[7] \;;\; 5^6 \equiv 1[7]$ ومنه

$2^{6q} \equiv 1[7] \;;\; 3^{6q} \equiv 1[7] \;;\; 4^{6q} \equiv 1[7] \;;\; 5^{6q} \equiv 1[7]$ إذن

$A_n \equiv 2^r + 3^r + 4^r + 5^r[7]$ أي $A_n \equiv A_r[7]$ ومنه A_n و A_r لهما نفس باقي القسمة على 7 .

ب) تعيّين قيم r التي من أجلها يكون $A_r \equiv 0[7]$.

- إذا كان $r = 0$ فإن $A_0 = 2^0 + 3^0 + 4^0 + 5^0 = 4$ ومنه $A_0 \equiv 4[7]$.
- إذا كان $r = 1$ فإن $A_1 = 2^1 + 3^1 + 4^1 + 5^1 = 14 = 2 \times 7$ ومنه $A_1 \equiv 0[7]$.
- إذا كان $r = 2$ فإن $A_2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 54 = 7 \times 7 + 5$ ومنه $A_2 \equiv 5[7]$.
- إذا كان $r = 3$ فإن $A_3 = 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 224 = 7 \times 32$ ومنه $A_3 \equiv 0[7]$.
- إذا كان $r = 4$ فإن $A_4 = 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^5 = 978 = 7 \times 139 + 5$ ومنه $A_4 \equiv 5[7]$.
- إذا كان $r = 5$ فإن $A_5 = 2^5 + 3^5 + 4^5 + 5^5 = 4424 = 7 \times 632$ ومنه $A_5 \equiv 0[7]$.

إذن $A_r \equiv 0[7]$ تكافؤ $r = 1$ أو $r = 3$ أو $r = 5$

لدينا $A_n \equiv A_r[7]$ ومنه A_n يقبل القسمة على 7 يكافؤ $A_n \equiv 0[7]$ إذن $n \in \{6q+1 \,;\, 6q+3 \,;\, 6q+5\}$

$B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$

أ) لدينا $100 \equiv 2[7] \;;\; 101 \equiv 3[7] \;;\; 102 \equiv 4[7] \;;\; 103 \equiv 5[7]$ ومنه

$100^n \equiv 2^n[7] \;;\; 101^n \equiv 3^n[7] \;;\; 102^n \equiv 4^n[7] \;;\; 103^n \equiv 5^n[7]$ ونستنتج أن

$B_n \equiv 2^n + 3^n + 4^n + 5^n[7]$ أي $B_n \equiv A_n[7]$ ومنه $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 .

ب) لدينا $B_n - A_n$ مضاعف للعدد 7 معناه $B_n - A_n = 7k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. B_n يقبل القسمة على 7 معناه $B_n = 7k'$ حيث $k' \in \mathbb{N}$ تكافؤ $A_n = 7(k' - k)$ أي A_n يقبل القسمة على 7 ومنه B_n يقبل القسمة على 7 وهذا يكافؤ باقي قسمة العدد الطبيعي n على 6 هو عدد فردي ، ولكن $2006 = 6 \times 334 + 2$ ومنه الباقي عدد زوجي وبالتالي B_{2006} لا يقبل القسمة على 7.

حل التمرين رقم 04:

1)أ) نأخذ القسمة الإقليدية للعدد $3n^3 - 11n + 48$ على $n + 3$ فنجد

$3n^3 - 11n + 48 = (n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ ومنه العدد $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n + 3$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد صحيح.

تبيان أن $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم ، ندرس إشارة كثير الحدود $3x^2-9x+16$. المميز
$\Delta=81-4(16)(3)=-111$ ، $\Delta<0$ ومنه كثير الحدود $3x^2-9x+16$ ليس له جذور في $\mathbb{R}$ وله نفس
إشارة معامل x^2 أي

موجب تماما ونستنتج أن العدد $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم.

2) نبين $PGCD\left(a,b\right)=PGCD\left(bc-a,b\right)$ ، a , b , c أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان d هو قاسم مشترك للعددين a و b فإن d يقسم bc ويقسم $bc-a$ وبالتالي d هو قاسم مشترك للعددين $bc-a$ و b.
- ليكن d هو قاسم مشترك للعددين $bc-a$ و b.

d يقسم b فإن d يقسم bc وبما أن d يقسم $bc-a$ نستنتج أن

d يقسم $bc-\left(bc-a\right)=a$ ومنه d هو قاسم مشترك للعددين a و b .

بيّنا إذن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b تساوي مجموعة القواسم المشتركة للعددين $bc-a$ و b

ومنه $PGCD\left(a,b\right)=PGCD\left(bc-a,b\right)$.

3) نبين $PGCD\left(3n^3-11,n+3\right)=PGCD\left(48,n+3\right)$.

نضع $a=3n^3-11n$ و $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ فإن a , b , c أعداد طبيعية غير معدومة. نستعمل السؤال السابق

لد ينا $bc-a=\left(n+3\right)\left(3n^2-9n+16\right)-\left(3n^3-11n\right)=48$

إذن $PGCD\left(3n^3-11n,n+3\right)=PGCD\left(48,n+3\right)$ حيث $n\geq 2$.

4) أ) القواسم الطبيعية للعدد 48 هي $D_{48}=\{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$.

ب) ليكن $n\geq 2$. حتى يكون $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا يجب أن يكون $3n^3-11n$ يقبل القسمة على $n+3$

أي $3n^3-11n$ مضاعف $n+3$ أو $PGCD\left(3n^3-11n,n+3\right)=n+3$.

وجدنا سابقا $PGCD\left(3n^3-11n,n+3\right)=PGCD\left(48,n+3\right)$ ومنه $PGCD\left(48,n+3\right)=48$ أي

$n+3$ من قواسم 48 و $n+3\geq 5$

$\left(n+3\right)\in\{\ ,6,8,12,16,24,48\}$ وبالتالي $n\in\{3,5,9,13,21,45\}$.

ندرس الحالتين الخاصتين $n=1$, $n=0$

من أجل $n=0$ فإن $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}\in\mathbb{N}$.

من أجل $n=1$ فإن $\dfrac{3n^3-11n}{n+3}\notin\mathbb{N}$.

وأخيرا مجموعة قيم n الطبيعية حتى يكون $\frac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا هي $n\in\{0,3,5,9,13,21,45\}$.

حل التمرين رقم 05:

1) **أ)** لدينا $11x+8y=79$ ومنه $8y-79=-11x$ إذن 11 يقسم $8y-79$ أي $8y-79\equiv 0[11]$
$8y-79\equiv 0[11]$ تكافئ $8y\equiv 79[11]$ أي $8y\equiv 2[11]$ تكافئ $56y\equiv 14[11]$ أي $y\equiv 3[11]$.

ب) $y\equiv 3[11]$ تكافئ $y=3+11k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ وبعد التعويض بـ $y=3+11k$ في المعادلة $11x+8y=79$ نجد $x=5-8k$. وأخيرامجموعة حلول المعادلة $11x+8y=79$ هي $S=\{(5-8k\,,3+11k)\,,k\in\mathbb{Z}\}$.

2) أ) $3y+11z=372$ تكافئ $11z=372-3y=3(124-y)$ تكافئ 3 تقسم $11z$. بما أن 3 اولي مع 11 فإن 3 يقسم z أي $z\equiv 0[3]$.

ب) $z\equiv 0[3]$ تكافئ $z=3k'$ حيث $k'\in\mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $3y+11z=372$ فنجد $y=124-11k'$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $3y+11z=372$ هي $S'=\{(124-11k'\,,3k')\,,k'\in\mathbb{Z}\}$

3) $3x-8z=-249$ تكافئ $3x+249=8z$ تكافئ $3(x+83)=8z$ تكافئ 3 يقسم $8z$ وبما أن 3 و 8 أوليان فيما بينهما فإن 3 يقسم z أي $z=3k''$ حيث $k''\in\mathbb{Z}$ نعوض في المعادلة $3x+249=8z$ فنجد $x=-83+8k''$

وأخيرا مجموعة حلول المعادلة $3x+249=8z$ هي $S''=\{(-83+8k''\,,3k'')\,,k''\in\mathbb{Z}\}$

ليكن x عدد قطع العلبة الأولى و y عدد قطع العلبة الثانية و z عدد قطع العلبة الثالثة .

إذن $x+y+z=41.......(1)$ و $48x+36y+4z=480$ أي $12x+9y+z=120.......(2)$

لديناإذن $\begin{cases} x+y+z=41.......(1)\\ 12x+9y+z=120.......(2)\end{cases}$ نستخرج من **(1)** : $z=41-x-y$ ونعوضها في (2)

فنجد $12x+9y+41-x-y=120$ أي $11x+8y=79$ وهي المعادلة (E_1) ى فيكون $x=5-8k$ و $y=3+11k$

بما أن x يمثل عدد من القطع فهو موجب إذن هذا يؤدي إلى $k=0$ فنحصل على $x=5$ و $y=3$ و $z=41-5-3=33$

حل التمرين رقم 06 :

1) $5x-3y=2$ تكافئ $5x-2=3y$ تكافئ $5x-2\equiv 0[3]$ تكافئ $5x\equiv 2[3]$ تكافئ $2\times 5x\equiv 2\times 2[3]$
أي $10x\equiv 4[3]$

ومنه $x\equiv 1[3]$ تكافئ $x=1+3k$ حيث k عدد صحيح. نعوض مباشرة في المعادلة $5x-3y=2$ فنجد
$y=1+5k$

وأخيرا $S=\{(1+3k\ ;1+5k)/k\in\mathbb{Z}\}$.

2) $A=5+5x=7+3y$ أي $5x-3y=2$ وحسب السؤال السابق وجدنا $x=1+3k$ و $y=1+5k$

لدينا $\begin{cases}5<x\leq 12\\7<y\leq 20\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}5<1+3k\leq 12\\7<1+5k\leq 20\end{cases}$ **تكافئ** $\begin{cases}4<3k\leq 11\\6<5k\leq 19\end{cases}$ **تكافئ** $\begin{cases}\frac{4}{3}<k\leq\frac{11}{3}\\\frac{6}{5}<k\leq\frac{19}{5}\end{cases}$ **ومنه** $k=2$ **أو**
$k=3$.

من أجل $k=2$ **نجد** $x=1+3(2)=7$ **و** $y=1+5(2)=11$ **ومنه** $A=5+5(7)=40$.

من أجل $k=3$ **نجد** $x=1+3(3)=10$ **و** $y=1+5(3)=16$ **ومنه** $A=5+5(10)=55$

حل التمرين رقم 07 :

نفرض ان $11c+1=a^2$ وهذا يكافئ $11c=(a-1)(a+1)$.

بما أن 11 أولي نستنتج أن 11 يقسم $a-1$ أو 11 يقسم $a+1$.

الحالة الأولى : 11 يقسم $a-1$ ومنه $a=1+11k$ حيث $k\in\mathbb{N}$. وبالتالي
$11c=(a-1)(a+1)=11k(2+11k)$ ومنه $c=k(2+11k)$. نستنتج أن k تقسم c وبما أن c أولي يكون لدينا $k=1$ أو $k=c$.

- إذا كان $k=1$ فإن $c=1(2+11)=13$ أي $c=13$ وهي قيمة مقبولة لأن $11c+1=11\times 13+1=144=12^2$ و هو مربع تام .
- إذا كان $k=c$ فإن $c=c(2+11c)$ أي $c=-\frac{1}{11}$ وهي قيمة مرفوضة لأن c عدد طبيعي أولي .

الحالة الثانية : 11 يقسم $a+1$ ومنه $a=-1+11k'$ حيث $k'\in\mathbb{N}$. وبالتالي
$11c=(a-1)(a+1)=(-2+11k')(11k')$ ومنه $c=k'(-2+11k')$. نستنتج أن k' تقسم c وبما أن c أولي يكون لدينا $k'=1$ أو $k'=c$.

- إذا كان $k'=1$ فإن $c=9$ وهي قيمة مرفوضة لأن c أولي (9 غير أولي) رغم أن $11\times 9+1=100=10^2$.
- إذا كان $k'=c$ فإن أي $c=\dfrac{3}{11}$ وهي قيمة مرفوضة لأن c عدد طبيعي أولي .

وأخيرا توجد قيمة وحيدة هي $c=13$ التي تحقق : c عدد أولي بحيث يكون $11c+1$ مربعا تاما.

حل التمرين رقم 08 :

1) يكفي أن نبين أنه يوجد عددان صحيحان a و b بحيث $n^2+5n+7=(n+1)(an+b)+3$

$n^2+5n+7=(n+1)(an+b)+3=an^2+(a+b)n+(b+3)$ بالمطابقة نجد $\begin{cases} a=1 \\ a+b=5 \\ b+3=7 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$

إذن $n^2+5n+7=(n+1)(n+4)+3$ من أجل كل عدد طبيعي n . ومنه

$PGCD\left(n^2+5n+7\ ,\ n+1\right)=PGCD\left(n+1\ ,\ 3\right)$

2) يكون n^2+5n+7 و $n+1$ أوليين فيما بينهما تكافئ $PGCD\left(n^2+5n+7\ ,\ n+1\right)=1$ وحسب ما سبق $PGCD\left(n+1\ ,\ 3\right)=1$ أي $n+1$ و 3 أوليان فيما بينهما وبالتالي $n+1$ لا يقبل القسمة على 3، إذن $n+1\equiv 1[3]$ أو $n+1\equiv 2[3]$ وهذا يكافئ $n\equiv 0[3]$ أو $n\equiv 1[3]$ أي $n=3k$ او $n=3k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}$

حل التمرين رقم 09:

1) نضع $d=PGCD\left(a\ ,b\right)$. إذا كان d يقسم a ويقسم b فإنه يقسم b و $\left(a-bq\right)$

وبالعكس إذا كان d يقسم b و $\left(a-bq\right)$ فإن d يقسم $\left(a-bq\right)+bq=a$.

2) $PGCD\left(5n^3-n,n+2\right)=PGCD\left(n+2,38\right)$ هي العلاقة السابقة مع $a=5n^3-n$ و $b=n+2$ و $q=5n^2-10n+19$.

3) $\left(n+2\right)$ يقسم $\left(5n^3-n\right)$ تكافئ $\left(n+2\right)$ تقسم 38 تكافئ

$\left(n+2\right)\in\left\{-1\ ,-2\ ,-19\ ,-38\ ,1\ ,2\ ,19\ ,38\right\}$ أي

$n\in\left\{-40\ ,-21\ ,-4\ ,-3\ ,-1\ ,0\ ,17\ ,36\right\}$.

حل التمرين رقم 10:

1) جدول البواقي الممكنة لـ N بترديد 9 و لـ N^2 بترديد 9

$N \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$[9]$
$N^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	4	1	$[9]$

2) $a^2 - 250507 = b^2$ هو مربع تام ، فحسب الجدول السابق البواقي الممكنة لـ $a^2 - 250507$ بترديد 9 هي $0 , 1 , 4 , 7$ إذن

$a^2 - 250507 \equiv 0[9]$ أو $a^2 - 250507 \equiv 1[9]$ أو $a^2 - 250507 \equiv 4[9]$ أو $a^2 - 250507 \equiv 7[9]$

ولكن $250507 \equiv 1[9]$ وبالتالي $a^2 \equiv 1[9]$ أو $a^2 \equiv 2[9]$ أو $a^2 \equiv 5[9]$ أو $a^2 \equiv 8[9]$

3) حسب الجدول السابق المربع لا يمكن أن يوافق بترديد 9 الأعداد $2 , 5 , 8$ تبقى فقط الحالة الصحيحة

$a^2 \equiv 1[9]$ والتي توافق $a \equiv 1[9]$ و $a \equiv 8[9]$.

حل التمرين رقم 11:

1) بواقي قسمة العدد 5^n على 13 :

$5^0 \equiv 1[13]$, $5^1 \equiv 5[13]$, $5^2 \equiv 12[13]$, $5^3 \equiv 8[13]$, $5^4 \equiv 1[13]$

الموافقة تشكل متتالية دورية ودورها 4 . نكتب $n = 4k + r$ حيث $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$

إذا كان $r =$	فإن $n = 4k + r$	باقي قسمة 5^n على 13 هو
0	$n = 4k$	1
1	$n = 4k+1$	5
2	$n = 4k+2$	12
3	$n = 4k+3$	8

2) لدينا $1981 \equiv 5[13]$ ومنه $1981^{1981} \equiv 5^{1981}[13]$. نقسم الأس 1981 على الدور 4 فنجد $1981 = 4 \times 495 + 1$ من الشكل $4k+1$ وبالتالي $5^{1981} \equiv 5[13]$ أي $1981^{1981} \equiv 5[13]$ وأخيرا $1981^{1981} - 5 \equiv 0[13]$ أي العدد $1981^{1981} - 5$ يقبل القسمة على 13

3) نلاحظ أن $31 \equiv 5[13]$ ومنه $31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13]$ ومن الجدول نجد $31^{4n+1} \equiv 5[13]$

و $18\equiv 5[13]$ ومنه $18^{4n-1}\equiv 5^{4n-1}[13]$ نستعمل الدورية فنجد $5^{4n-1}\equiv 5^{4n-1+4}[13]$ أي
$5^{4n-1}\equiv 5^{4n+3}[13]$ ومنه $5^{4n-1}\equiv 8[13]$ وبالتالي $31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv 5+8[13]$ أي $31^{4n+1}+18^{4n-1}\equiv 0[13]$
وأخيرا العدد $31^{4n+1}+18^{4n-1}$ يقبل القسمة على 13 .