

القسمة

من كتابة :
الاستاذ : ناعم محمد
أستاذ التعليم الثانوي

و المواقفات في Z

تمارين و حلول مفصلة

3
AS

• تمارين نموذجية
• تمارين من بكالوريات سابقة
• تمارين من الكتاب المدرسي

الشعب :
✓ تقني رياضي
✓ رياضيات

تمارين في الموافقات و القسمة في \mathbb{Z}

للشعب : ثلاثة تقني رياضي ، رياضيات

تذكير

I

بعض الطرائق و القواعد الأساسية

(1) لإيجاد القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$ ؛ نبحث عن علاقة بين $a; b$ مستقلة عن n

مثال

$$b = 5n + 2 ; a = 2n + 3$$

نضع : $d = PGCD(a; b)$ ؛ $d/a; d/b$ ومنه $d/5a - 2b$ إذن $d/11$ فالقيم الممكنة لـ d هي : 1 و 11

(2) لإيجاد قيم n التي من أجلها يأخذ d قيمة معينة نستعمل الموافقات و خواصها

(3) لإيجاد قيم n لما يكون التردد مجهولا نكتب الموافقة على الشكل [الترديد] $\equiv 0$ عدد

مثال

$$\text{حل في } \mathbb{N} \text{ المعادلة : } n + 9 \equiv 0[n + 1]$$

$$n + 9 \equiv 0[n + 1] \text{ معناه : } 8 \equiv 0[n + 1] \text{ ومنه : } n + 1/8 \text{ أي } n + 1 \in D_8 \text{ إذن } n \in \{0; 1; 3; 7\}$$

(4) بواقي القسمة الإقليدية للعدد a^n على b تكون دورية ؛ أي انها تكرر من اجل قيم معينة للعدد n وبما ان

باقي a^0 على b هو 1 ؛ نحسب بواقي قسمة a^n على b حتى نحصل على قيمة للعدد n حيث باقي قسمة

a^n على b هو 1 ويكون الدور حينئذ هو n

مثال

ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7

$$k \in \mathbb{N} \text{ حيث } 4^{3k} \equiv 1[7]; 4^{3k+1} \equiv 4[7]; 4^{3k+2} \equiv 2[7] \text{ إذن } 4^0 \equiv 1[7]; 4^1 \equiv 4[7]; 4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7]$$

$$(5) \text{ حل المعادلة : } ax + by = c$$

تقبل هذه المعادلة حلا إذا فقط إذا كان $PGCD(a; b)$ يقسم c

مثال

المعادلة $7x + 21y = 3$ لا تقبل حلولاً في \mathbb{Z} لأن $PGCD(7; 21) = 7$ لا يقسم 3
لايجاد الحل الخاص نستعمل خوارزمية أقليدس

مثال

لنبحث عن حل خاص للمعادلة $27x + 22y = 1$
 $27 = 22 + 5$ ؛ $5 = 27 - 22$ ؛ $22 = 4(5) + 2$ ؛ ومنه $2 = 22 - 4(5)$ ؛ $5 = 2(2) + 1$ ؛ ومنه $1 = 5 - 2(2)$ ؛
 $1 = 9(27 - 22) - 2(22)$ ومنه $1 = 27(9) + 22(-11)$ وعليه الحل الخاص هو $(x_0; y_0) = (9; -11)$

ملاحظة هامة

إذا كانت الثنائية $(x_0; y_0)$ حلاً خاصاً للمعادلة $ax + by = c$ فإن الثنائية $(nx_0; ny_0)$ حل خاص للمعادلة
 $ax + by = nc$

(6) حل المعادلات المشتملة على $PGCD(a; b)$ و $PPCM(a; b)$
لحل المعادلات التي تشتمل على $m = PPCM(a; b)$ و $d = PGCD(a; b)$ تتبع الخطوات التالية :
* كتابة a و b بدلالة a' و b' أي $d = PGCD(a; b)$ إذن $a = da'$ ؛ $b = db'$ حيث $PGCD(a'; b') = 1$
* إيجاد علاقة بين $m; d; a'; b'$ أي $m \times d = a \times b$ ومنه $m = da'b'$
* تعيين القيم الممكنة لـ a' و b' مع مراعاة الشرط $PGCD(a'; b') = 1$ ثم استنتاج قيم a و b

2 تمارين نموذجية

التمرين 1

a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a = 5n^2 + 7$ ؛ $b = n^2 + 2$
1. بين أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 3
2. بين أن : $PGCD(a; b) = 3$ إذا و فقط إذا كان $n^2 \equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم n $PGCD(a; b)$

👉 الحل المفصل ▼ انقر هنا

[1]

التمرين 2

عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الشروط في كل حالة من الحالات التالية:

$$\begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a; b) = 6 \end{cases} /1$$

$$\begin{cases} PPCM(a; b) = 90 \\ PGCD(a; b) = 18 \end{cases} /2$$

$$a \leq b \text{ مع } PPCM(a; b) - 9PGCD(a; b) = 13 /3$$

[2]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا**التمرين 3**1/ حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $9x - 7y = 3 \dots (1)$ 2/ إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) عين قيم $PGCD(x; y)$ 3/ عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $\begin{cases} m = 1242 \\ d = 3 \end{cases}$ حيث $m = PPCM(a; b)$ و $d = PGCD(a; b)$

[3]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا**التمرين 4** $a; b; n$ أعداد طبيعية حيث : $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ ؛ $b = 2n^2 + n$ 1/ بين أن العدد $2n + 1$ قاسم مشترك للعددين a و b 2/ باستخدام مبرهنة بيزو بين أن : $PGCD(n; n + 1) = 1$ و $PGCD[n; (n + 1)^2] = 1$ 3/ استنتج $PGCD(a; b)$

[4]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا**التمرين 5**

1/ بين أن العدد 251 أولي

2/ حل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008

3/ عين الأعداد الطبيعية $a; b$ بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ علما أن $d = PGCD(a; b)$ و $m = PPCM(a; b)$

[5]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا**التمرين 6** $a; b; n$ أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $a = 11n + 3$ و $b = 13n - 1$ 1/ بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 502/ باستخدام خوارزمية أقليدس عين حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$ ؛ ثم حل في \mathbb{Z} المعادلة : $50x - 11y = 3$ 3/ استنتج قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 50$ 3/ استنتج قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 25$

[6]

👉 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 7

نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $7x + 13y = 119$...

- بين أنه إذا كان $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7؛ ثم استنتج حلول المعادلة (1)
- عين الأعداد الطبيعية غير المدومة $\alpha; \beta; \gamma$ حيث $\alpha\gamma 1^6 + 1\beta 3\beta^8 = 32\gamma\alpha^7$

[7]

🔗 [الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 8

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 8^n على 10
- ما هو باقي قسمة العددين 2^{192} و 8^{341} على 10
- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]$

[8]

🔗 [الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 9

- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7
- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]$
- عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7]$

[9]

🔗 [الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 10

- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $5x - 3y = 2$...
- بين أن المعادلة (1) تقبل حلاً
 - أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن : $x \equiv 1[3]$
 - استنتج حلول المعادلة (1)
 - أ) بين إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (1) فإن : $PGCD(x; y) = PGCD(x; 2)$
ب) استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(x; y)$
ج) عين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق : $PGCD(x; y) = 2$

[10]

🔗 [الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 11

حافلة صغيرة لنقل المسافرين بها 16 راكبا مصنّفون إلى ثلاثة أصناف : مجموعة دفعت 20 دج (صنف a) و مجموعة أخرى دفعت 15 دج (صنف b) ؛ أما المجموعة الثالثة فلم تدفع شيئاً (صنف c) ؛ إذا علمت أن المبلغ الإجمالي

المدفوع هو 285 دج؛ أحسب عدد الركاب من كل صنف

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

[11]

التمرين 12

1. عين الأعداد الصحيحة x حيث : $7x \equiv -19[9]$
2. استنتج في مجموعة الأعداد الصحيحة حلول المعادلة : $7x - 9y = -19 \dots (1)$
3. من بين حلول المعادلة (1) عين تلك التي تحقق : $x \equiv 0[y]$
4. نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب $2\alpha 5^7$ في نظام العد ذي الأساس 7؛ ويكتب $1\beta 3^9$ في نظام العد ذي الأساس 9
عين α و β ؛ ثم أكتب العدد n في النظام العشري

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

[12]

3 تمارين من بكالوريات سابقة

التمرين 13

- x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : $11x + 7y = 1$
1. أ) عين $(x_0; y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق : $x_0 + y_0 = -1$
ب) استنتج حلول المعادلة (E)

2. a و b عددان صحيحان و S العدد الذي يحقق :

$$\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$$

- أ) بين أن $(a; -b)$ حل للمعادلة (E)
ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77
3. n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 و باقي قسمته على 7 هو 2
- عين أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$

🔗 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

[13]

التمرين 14

- 1) أ) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$
ب) عين الثنائيات $(a; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $(b - a)(b + a) = 24$
ج) استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$
- 2) α و β عددان صحيحان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha = \overline{10141}^5$ ؛ $\beta = \overline{3403}^5$
أ) أكتب العددين α و β في النظام العشري

$$\begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a - \beta b = 9 \end{cases} \text{ (ب) عين الثنائية } (a; b) \text{ من الأعداد الطبيعية حيث :}$$

(3) أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434 ؛ ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478
 (ب) حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2013x - 1434y = 27$

[14]

[الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 15

اجب بصحيح أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حلولاً في \mathbb{Z}^2
2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون $3421^7 + 1562^7 = 5413^7$
3. باقي القسمة الإقليدية للعدد $3^{2011} + 3 + \dots + 1$ على 7 هو 6

[15]

[الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 16

1. n عدد طبيعي ؛ نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث : $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$

أ) بين أن : $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$

ب) ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\beta; 10)$

ج) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases} \text{ (ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي } n \text{ التي تحقق الجملة التالية :}$$

[16]

[الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 17

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح

1/ بين أن العدد 153 حل للجملة (S)

2/ إذا كان x_0 حلاً لـ (S) ؛ بين أن : (x حل لـ (S)) يكافئ $\left(\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases} \right)$

3/ حل الجملة (S)

4/ يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ؛ فإذا استعمل علبة تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ؛ وإذا استعمل علبة تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب ؛ إذا علمت أن عدد الكتب محصور بين 500 و 600 كتاب ؛ ماهو عدد هذه الكتب ؟

[17]

[الحل المفصل](#) ▼ انقر هنا

التمرين 18

تعتبر المعادلة : $(E) 13x - 7y = -1$... حيث x, y عدداً صحيحان

(1) حل المعادلة (E)

(2) عين الأعداد الصحيحة النسبية a حيث :
$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases}$$

(3) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13

(4) ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في النظام ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}^9$ حيث α و β عدداً طبيعياً ؛ $\alpha \neq 0$ ؛

- عين α و β حتى يكون b قابلاً للقسمة على 91

[18]

🔗 الحل المفصل ▼ انقر هنا

التمرين 19

(1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3 - 2014^{2037} + 42 \times 138^{2015}$ على 13

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$ ؛

[19]

ب) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv 0 [13]$

التمرين 20

1/ أ) أنشر $(n+3)(3n^2 - 9n + 16)$ حيث $n \in \mathbb{N}$

◀ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3n^3 - 11n + 48$ يقبل القسمة على $n+3$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

2/ برهن أنه من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a, b, c يكون : $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

3/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 : $PGCD(3n^3 - 11n; n+3) = PGCD(48; n+3)$

4/ أ) عين القواسم الطبيعية للعدد 48

ب) استنتج الأعداد الطبيعية n بحيث يكون الكسر $A = \frac{3n^3 - 11n}{n+3}$ عدداً طبيعياً

[20]

🔗 الحل المفصل ▼ انقر هنا

التمرين 21

(1) أ) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7

- (2) أ) بين أن 89 عدد أولي
 ب) عين القواسم الطبيعية للعدد 7832
 ج) بين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما
 (3) x و y عددان طبيعيان غير معدومين قاسماهما المشترك هو 2
 - عين x و y علما أن :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$

 (4) a, b, c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c
 أ) باستعمال مبرهنة بيزو؛ برهن أن a أولي مع $b \times c$
 ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع؛ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن :

$$PGCD(a; b^n) = 1$$

 ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1954^{1962} و 1962^{1954}

[21]

📖 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

4 تمارين من الكتاب المدرسي

التمرين 22

التمرين 54 صفحة 59

- 1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0
 2/ استنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p العددين n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

[22]

📖 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 23

التمرين 55 صفحة 59

- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $n^7 - n$ يقبل القسمة على 14

[23]

📖 **الحل المفصل** ▼ انقر هنا

التمرين 24

التمرين 96 صفحة 62

- 1/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$
 في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية : $PGCD(a, b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2; b^2) = 1$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2/ تحقق من أن : $PGCD(k; k+1) = 1$

برهن أن : $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$ من أجل k عدد طبيعي غير معدوم

3/ عين $PGCD(2k+1; 2k+3)$ من أجل k عدد طبيعي

4/ أحسب $PGCD(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ من أجل $k \in \mathbb{N}$

استنتج حسب قيم العدد الطبيعي $(S_n; S_{n+1})$

[24]

التمرين 25

التمرين 99 صفحة 63

تقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p

نعتبر ، في المجموعة \mathbb{N}^* ، المعادلة E ذات المجهولين x و y التالية : $x^2 + y^2 = p^2$ حيث p أولي

1/ نضع $p = 2$ بين أن المعادلة E لا تقبل حلول

2/ نفرض أن $p \neq 2$ و $(x; y)$ حل للمعادلة E

أ - برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي والآخر فردي

ب - برهن أن p لا يقسم x ولا y

ج - برهن أن $PGCD(x^2; y^2)$ يقسم p^2

د - استنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما

3/ نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p = u^2 + v^2$ مع u و v عددين طبيعيين غير معدومين

أ - تحقق أن $(|u^2 - v^2|; 2uv)$ هي حل للمعادلة E

ب - أعط حلا للمعادلة E في حالة $p = 5$ ثم في حالة $p = 13$

4/ في كل حالة من الحالتين التاليتين بين أن p ليس مجموع مربعين وأن المعادلة E لا تقبل حلول

أ - $p = 3$. ب - $p = 7$

[25]

الحل المفصل ▼ انقر هنا

التمرين 26

التمرين 32 صفحة 79

حل في \mathbb{Z} كل من الجملتين التاليتين : أ . $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$. ب . $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$

[26]

الحل المفصل ▼ انقر هنا

التمرين 93 صفحة 83

- 1/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7
 2/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1}$ قابلاً للقسمة على 7
 3/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $U_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
 4. أحسب بدلالة n المجموع $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ قابلاً للقسمة على 7 ؟
 ما هي قيم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلاً للقسمة على 7 ؟

[27]

5 تمرين حول التشفير

نعرف التشفير التآلفي بـ $y = ax + b$ [28] ؛ حيث x هو الرقم المناسب للحرف قبل التشفير و y الرقم المناسب للحرف بعد التشفير ؛ a, b عدنان طبيعيان محصوران بين 0 و 27 و نفرض في هذا التمرين أن a أولي ؛ نرقم الحروف حسب الجدول التالي :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر	ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف	ق	ك	ل	م	ن	هـ	و	ي
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

نفرض أن الحرف (ث) يحول إلى الحرف (ذ) و الحرف (ص) يحول إلى الحرف (خ)

$$1/ \text{بين أن : } \begin{cases} 3a + b \equiv 8 [28] \\ 13a + b \equiv 6 [28] \end{cases}$$

$$2/ \text{بين أن } 5a = 14k - 1 \text{ ؛ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$3/ \text{بين أن } a \equiv 11 [14]$$

ب) استنتج قيمة a و قيمة b

ج) تحقق أن a و 28 أوليان فيما بينهما (يجب أن يتحقق هذا الشرط لكي لا يحول حرفان مختلفان إلى نفس الحرف)

4/ حل تشفير الجملة التالية : شكجرتظيئه طق جفجرلو ثكثلشن ثكثقتو

[28]

👉 الحل المفصل ▼ انقر هنا

6 الحلول المفصلة للتمارين

حل التمرين 1 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$b = n^2 + 2 , a = 5n^2 + 7$$

$$1/ \text{ } d \mid a \text{ و } d \mid b \text{ و منه : } d \mid 5b - a \text{ أي } d \mid 5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \text{ إذن } d \mid 3$$

$$\begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} : PGCD(a; b) = 3 / 2$$

حسب خواص الموافقات فإن: $4n^2 + 5 \equiv [3]$ ومنه $n^2 + 2 \equiv 0[3]$ و عليه: $n^2 \equiv 1[3]$

1/3 قيم $PGCD(a; b)$ حسب قيم n

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

إذا كان: $n = 3k$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فإن: $PGCD(a; b) = 1$
 إذا كان: $n = 3k + 1$ أو $n = 3k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فإن: $PGCD(a; b) = 3$

حل التمرين 2 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ نضع: $PGCD(a, b) = d$ ومنه يوجد عددان طبيعيان غير معدومين a', b' حيث: $a = da'$ و $b = db'$ مع a', b' أوليان فيما بينهما

من معطيات التمرين يمكن أن نكتب $6a' \times 6b' = 360$ أي: $a' \times b' = 10$ مع $PGCD(a'; b') = 1$

إذن: $(a'; b') \in \{(1; 10); (10; 1); (2; 5); (5; 2)\}$ ومنه: $(a; b) \in \{(6; 60); (60; 6); (12; 30); (30; 12)\}$

2/ نضع: $PPCM(a; b) = m$; $PGCD(a, b) = d$; نعلم أن: $d \times m = ab$ و $a = a'd$ و $b = db'$ مع $PGCD(a'; b') = 1$

و عليه: $m = da'b'$ إذن $a'b' = \frac{m}{d}$ و منه $a'b' = 5$ مع $PGCD(a'; b') = 1$ إذن: $(a'; b') \in \{(1; 5); (5; 1)\}$

ومنه: $(a; b) \in \{(18; 90); (90; 18)\}$

3/ لدينا: $PPCM(a; b) - 9PGCD(a; b) = 13$ ومنه $m - 9d = 13$ ومنه $da'b' - 9d = 13$ إذن $d(a'b' - 9) = 13$ ومنه $d \mid 13$ إذن $d \in \{1; 13\}$

$d = 1$ ينتج عنه $a'b' - 9 = 13$ أي $a'b' = 22$ إذن $(a'; b') \in \{(1; 22); (2; 11)\}$ و عليه $(a; b) \in \{(1; 22); (2; 11)\}$

$d = 13$ ينتج عنه $a'b' = 10$ ومنه $(a'; b') \in \{(1; 10); (2; 5)\}$ ومنه $(a; b) \in \{(13; 130); (26; 65)\}$

حل التمرين 3 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ لدينا: $9(-2) - 7(-3) = 3$ إذن $(x_0; y_0) = (-2; -3)$

لدينا $\begin{cases} 9x - 7y = 3 \\ 9(-2) - 7(-3) = 3 \end{cases}$ ومنه بالطرح طرفاً لطرف بين المعادلتين السابقتين نجد: $9(x+2) = 7(y+3)$

لدينا $\begin{cases} 7 \mid 9(x+2) \\ pgcd(7; 9) = 1 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة غوص $7 \mid (x+2)$ ومنه $x+2 = 7k; k \in \mathbb{Z}$ أي: $x = 7k - 2$

لدينا: $9(x+2) = 7(y+3)$ ومنه $9(7k) = 7(y+3)$ و عليه: $y = 9k - 3; k \in \mathbb{Z}$

حلول المعادلة (1) هي $k \in \mathbb{Z}$ $S = \{(7k - 2; 9k - 3)\}$

2/ نضع: $PGCD(x; y) = d$

$d \mid x$ و $d \mid y$ ومنه $d \mid 9x - 7y$ إذن $d \mid 3$ ومنه $d \in \{1; 3\}$

3/ لدينا: $m = 1242$ و $d = 3$ حيث $PPCM(x; y) = m$ و $PGCD(x; y) = 3$ إذن $xy = 3726$ ومنه $(7k - 2)(9k - 3) = 3726$

$3(9k - 3) = 3726$ إذن $63k^2 - 39k - 3726 = 0$ و عليه: $21k^2 - 13k - 1240 = 0$; هذه المعادلة حلها الصحيح

هو $k = 8$ ومنه $(x; y) = (54; 69)$

حل التمرين 4 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1. $a = (2n+1)(n^2+2n+1)$ و $b = (2n+1)n$ ومنه $2n+1$ قاسم مشترك ل a و b

2. لدينا $(n+1) - n = 1$ إذن حسب بيزو $PGCD(n+1; n) = 1$

$(n+1)^2 - n(n+1) = 1$ إذن حسب بيزو $PGCD(n; (n+1)^2) = 1$

3. $PGCD(a; b) = (2n+1)PGCD(n; (n+1)^2) = 2n+1$ لأن: $PGCD(n; (n+1)^2) = 1$

حل التمرين 5 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $\sqrt{251} \approx 15.84$ و العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2, 3, 5, 7, 11, 13 إذن هو عدد أولي

2/ $2008 = 2^3 \times 251$ ومنه الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2

3. نضع: $PGCD(a; b) = d$; $a = da'$ و $b = db'$ مع $PGCD(a'; b') = 1$; $md = ab$ ومنه $m = \frac{ab}{d}$ إذن $m = da'b'$

لدينا $m^3 + 35d^3 = 2008$ ومنه $(da'b')^3 + 35d^3 = 2008$ وعليه $d^3 \mid 2008$: $d \in \{1, 2\}$ مما سبق نجد

$d = 1$; $(a'b')^3 + 35 = 2008$ إذن $a'b' = \sqrt[3]{1973}$ غير ممكن لأن $a'; b'$ عددان صحيحان

$d = 2$; $a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$ ومنه $(a', b') \in \{(1; 6); (6; 1); (2; 3); (3; 2)\}$

$(a', b') \in \{(2; 12); (12; 2); (4; 6); (6; 4)\}$

حل التمرين 6 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $d \mid a$ و $d \mid b$ ومنه $d \mid 13a - 11b$ إذن $d \mid 50$

2/ $50 = 11(4) + 6$ ومنه $6 = 50 - 11(4)$ ، $11 = 6 + 5$ ، ومنه $11 = 6 + 5$ ، $5 = 11 - 6$ ، $6 = 5 + 1$ ، ومنه $6 = 5 + 1$

$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11$ ، $1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11$ ، ومنه $1 = 2(50) - 11(9)$ ومنه $1 = 2(50 - 11(4)) - 11$ ومنه $1 = 2(50) - 11(9)$ ومنه

$(x_0; y_0) = (2; 9)$

3/ $1 = 50(2) - 11(9)$ ومنه $3 = 50(6) - 11(27)$

ومنه $\begin{cases} 50x - 11y = 3 \\ 50(6) - 11(27) = 3 \end{cases}$ لدينا $50(x-6) = 11(y-27)$ ، $PGCD(11; 50) = 1$ حسب

مبرهنة غوص فإن: $11 \mid (x-6)$ ومنه $x = 11k + 6$; $k \in \mathbb{Z}$

$50(x-6) = 11(y-27)$ ومنه $50(11k) = 11(y-27)$ ومنه $y = 50k + 27$; $k \in \mathbb{Z}$

حلول المعادلة $50x - 11y = 3$ هي $S = \{(11k + 6; 50k + 27)\}$

3/ $PGCD(a; b) = 50$ ومنه $a \equiv 0[50]$ و $b \equiv 0[50]$ ومنه $11n + 3 \equiv 0[50]$ و $13n - 1 \equiv 0[50]$ ومنه $11n \equiv 13n - 1$ ومنه $11n \equiv 13n - 1$

$47[50]$ و $13n \equiv 1[50]$ ومنه $n \equiv 27[50]$ إذن $n = 50l + 27$; $l \in \mathbb{N}$

4/ $PGCD(a; b) = 25$ إذن $\begin{cases} a \equiv 0[25] \\ b \equiv 0[25] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[25] \\ 13n - 1 \equiv 0[25] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11n \equiv 22[25] \\ 13n \equiv 1[25] \\ n \neq 50l + 27 \end{cases}$

$$\text{ومنه } 25l' + 25 \neq 50l + 27 \text{ ومنه } 25l' \neq 50l + 25 \text{ إذن } \begin{cases} n \equiv 2[25] \\ n \neq 50l + 27 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[25] \\ 13n - 1 \equiv 0[25] \end{cases} \text{ ومنه } l' \neq 2l + 1 \text{ زوجي}$$

$$n = 50\alpha + 2 ; \alpha \in \mathbb{N}$$

حل التمرين 7 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$/1 \quad 7x + 13y = 119 \text{ ومنه } 13y = 119 - 7x \text{ ومنه } 13y = 7(17 - x) \text{ إذن } 13y \equiv 0[7] \text{ ومنه } y = 0[7] \text{ ، إذن } y \text{ مضاعف لـ } 7 \text{ أي } y = 7k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7x + 13y = 1197 \text{ ومنه } 7x = 119 - 13(7k) \text{ إذن } x = -13k + 17 \text{ وعليه حلول المعادلة } 7x + 13y = 119 \text{ هي}$$

$$S = \{(-13k + 17; 7k)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$/2 \quad \overline{\alpha\gamma}^6 + \overline{1\beta}^3 = \overline{32\gamma\alpha}^7 \text{ ومنه}$$

$$5(7\alpha + 13\beta) - 118 = \gamma \text{ ومنه } 1 + 6\gamma + \alpha 6^2 + \beta + 24 + \beta 8^2 + 8^3 = \alpha + 7\gamma + 2 \times 7^2 + 3 \times 7^3$$

$$\gamma = 118 \text{ ومنه } \gamma \equiv 0[5] \text{ ومنه } \gamma = 5 \text{ (لأن } 0 < \gamma < 6 \text{)}$$

$$5(7\alpha + 13\beta) - 118 = 5 \text{ ومنه } 7\alpha + 13\beta = 119 \text{ حسب ما سبق نجد } (\alpha; \beta) = (-13k + 17, 7k)$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} 0 < \alpha < 6 \\ 0 < \beta < 8 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 0 < -13k + 17 < 6 \\ 0 < 7k < 8 \end{cases} \text{ إذن } k = 1 \text{ وعليه } \alpha = 4; \beta = 7; \gamma = 5$$

حل التمرين 8 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$/1 \quad 8^5 \equiv 8[10]; 8^6 \equiv 4[10]; 8^7 \equiv 2[10] ; 8^0 \equiv 1[10]; 8^1 \equiv 8[10]; 8^2 \equiv 4[10]; 8^3 \equiv 2[10]; 8^4 \equiv 6[10] \quad 8^8 \equiv 6[10]$$

نستنج أن البواقي دورية باستثناء 1 : إذن البواقي كما يلي :

$k \in \mathbb{Z}^*$	$4k + 3$	$4k + 2$	$4k + 1$	$4k$	$n =$
[10]	2	4	8	6	$8^n \equiv$

$$/2 \quad 8^{341} = 8^{4(85)+1} \text{ ومنه } 8^{341} \equiv 8[10]$$

$$2 \equiv -8[10] \text{ ومنه } 2^{192} \equiv (-8)^{192} [10] \text{ ومنه } 2^{192} \equiv (8)^{4(48)} [10] \text{ ومنه } 2^{192} \equiv 6[10]$$

$$/3 \quad 8^{4n} \equiv 6[10] \text{ ومنه } 3 \times 8^{4n} \equiv 18[10] \text{ أي } 3 \times 8^{4n} \equiv 8[10] ; 3 \times 8^{4n} \equiv 8[10] \text{ ومنه } 2^{12n+9} \equiv 2^3(4n+3)[10]$$

$$\text{ومنه } 2^{12n+9} \equiv 2[10] \text{ ومنه } 2^{12n+9} \equiv 8^{4n+3} [10]$$

$$\text{كما سبق : } 3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 8 + 2[10] \text{ إذن } 3 \times 8^{4n} + 2^{12n+9} \equiv 0[10]$$

حل التمرين 9 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$/1 \quad 5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7] ; 5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[10]; 5^4 \equiv 2[7]$$

$k \in \mathbb{Z}^*$	$6k + 5$	$6k + 4$	$6k + 3$	$6k + 2$	$6k + 1$	$6k$	$n =$
[7]	3	2	6	4	5	1	$5^n \equiv$

ومنه :

$$/2 \quad 19 \equiv 5[7] \text{ ومنه } 19^{6n+3} \equiv 19^{6n+3} [7] \text{ ومنه } 19^{6n+3} \equiv 6[7]$$

$$26 \equiv 5[7] \text{ ومنه } 26^{6n+4} \equiv 5^{6n+3} [7] \text{ ومنه } 26^{6n+4} \equiv 2[7]$$

$$54 \equiv 5[7] \text{ ومنه } 54^{6n+1} \equiv [7] \text{ ومنه } 54^{6n+1} \equiv 5[7]$$

$$19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 6 + 2 + 5 + 1[7] \text{ ومنه } 19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 54^{6n+1} + 1 \equiv 0[7]$$

$$/3 \quad 19^{6n+3} + 26^{6n+4} + 4n^2 + 4 \equiv 0[7] \text{ ومنه } 8 + 4n^2 + 4 \equiv 0[7] \text{ ومنه } 12 + 4n^2 \equiv 0[7] \text{ ومنه } 4(n^2 + 3) \equiv 0[7]$$

ومنه $n^2 \equiv 4[7]$ لأن 7 أولي مع 4 ومنه $n^2 \equiv 4[7]$

[7]	6	5	4	3	2	1	0	$n \equiv$
[7]	1	4	2	2	4	1	0	$n^2 \equiv$

$n^2 \equiv 4[7]$ من أجل $n \equiv 2[7]$ أو $n \equiv 5[7]$ ومنه $n = 7k + 2$ أو $n = 7k + 5$ حيث $k \in \mathbb{N}$

حل التمرين 10 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ لدينا $PGCD(5;3) = 1$ و $1 \mid 2$ ومنه المعادلة (1) تقبل على الأقل حلاً

2/ $5x - 3y = 2$ ومنه $2x - 2 = 3y - 3x$ ومنه $2(x - 1) = 3(y - x)$

ومنه $3 \mid (x - 1)$ حسب مبرهنة غوص ومنه $x - 1 \equiv 0[3]$ إذن $x \equiv 1[3]$

3/ $5x - 3y = 2$ ومنه $3y = 5x - 2$ ومنه $3y = 5(3k + 1) - 2$ ومنه $y = 5k + 1$

حلول المعادلة (1) هي $S = \{(3k + 1; 5k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$

4/ نضع : $PGCD(x; y) = d$ و $PGCD(x; 2) = d'$

إذن $d \mid PGCD(x; 2)$ ومنه $d \mid d'$

ومنه $d' \mid PGCD(x; y)$ ومنه $d' \mid d$

إذن $d = d'$

(ب) من السؤال السابق $d \mid 2$ ومنه $d \in \{1; 2\}$

(ج) $PGCD(x; y) = 2$ ومنه $\begin{cases} x \equiv 0[2] \\ y \equiv 0[2] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3k + 1 \equiv 0[2] \\ 5k + 1 \equiv 0[2] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k \equiv 1[2] \\ k \equiv 1[2] \end{cases}$ ومنه $k = 2\ell + 1$

حلول المعادلة (1) بحيث $PGCD(x; y) = 2$ هي $S = \{(6\ell + 4; 10\ell + 6)\}; \ell \in \mathbb{Z}$

حل التمرين 11 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

يمكن تربيض المشكلة كما يلي : $a + b + c = 16$ و $20a + 15 = 285$ من هذه المعادلة الأخيرة نجد : $4a + 3b = 57$

إذن : $4a = 57 - 3b$ و عليه $3(19 - b) = 4a$ ومنه $3 \mid 4a$ و عليه $3 \mid a$ وذلك حسب غوص كون (3 أولي مع 4)

ومنه $a = 3k; k \in \mathbb{N}$

$3b = -4a + 57$ ومنه $b = -4k + 19$ ؛ ومنه $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3k > 0 \\ -4k + 19 > 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} k > 0 \\ k < 4.75 \end{cases}$ ومنه $k \in \{1; 2; 3; 4\}$

◀ $k = 1$: $a = 3; b = 15$ (مرفوضة)

◀ $k = 2$: $a = 6; b = 11$ (مرفوضة)

◀ $k = 3$: $a = 9; b = 7; c = 0$ (مرفوضة)

◀ $k = 4$: $a = 12; b = 3; c = 1$

حل التمرين 12 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $7x \equiv -19[9]$ إذن : $7x \equiv 8[9]$ ومنه $28x \equiv 32[9]$ ومنه $x \equiv 5[9]$ وعليه : $x = 9k + 5; k \in \mathbb{Z}$

2/ $7x - 9y = -19$ ومنه $7x = 9y - 19$ ومنه $7x \equiv -19[9]$ ومنه حسب السؤال السابق ينتج : $x = 9k + 5; k \in \mathbb{Z}$

$9y = 7x + 19$ ومنه $9y = 7(9k + 5) + 19$ ومنه $9y = 63k + 54$ ومنه $9y = 7k + 6$; $k \in \mathbb{Z}$

إذن حلول المعادلة (1) هي $k \in \mathbb{Z}$ $S = \{(9k + 5; 7k + 6)\}$

3/ $y \setminus x$ ومنه $(9k + 5) \setminus (7k + 6)$ ومنه $(7k + 6) \setminus 9(7k + 6) - 7(9k + 5)$ ومنه $(7k + 6) \setminus 19$ ومنه $7k + 6 \in$

$\{-19; -1; 19; 1\}$ ومنه $7k \in \{-25; -7; -5; 13\}$ ومنه $k = -1$ وعليه $(x; y) = (-4; -1)$

4/ $n = \sqrt[2]{\alpha^5} = \sqrt[1]{\beta^3}$ ومنه $2(7)^2 + 7\alpha + 5 = 9^2 + 9\beta + 3$ ومنه $7\alpha - 9\beta - 19$ ومنه $(\alpha; \beta) = (9k + 5; 7k + 6)$

ومنه $\begin{cases} 0 \leq 9k + 5 < 7 \\ 0 \leq 7k + 6 < 9 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 0 \leq \alpha < 7 \\ 0 \leq \beta < 9 \end{cases}$ ومنه $k = 0$ إذن : $\alpha = 5; \beta = 6; n = 138$

حل التمرين 13 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ أ) $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = -1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 11x_0 + 7y_0 = 1 \\ 7x_0 + 7y_0 = -7 \end{cases}$ ومنه $4x_0 = 8$ ومنه $x_0 = 2$ وعليه $y_0 = -3$ إذن : $(x_0; y_0) = (2; -3)$

ب) $\begin{cases} 11x + 7y = 1 \\ 11(2) + 7(-3) = 1 \end{cases}$ ومنه $11(x - 2) = 7(-y - 3)$

ومنه حسب غوص $7 \setminus x - 2$ ومنه $x = 7k + 2$ ومنه $11(x - 2) = 7(-y - 3)$ ومنه $-y - 3 = 11k$

$PGCD(7; 11) = 1$ ومنه $y = -11k - 3$

$S_E = \{(7k + 2; -11k - 3)\}$; $k \in \mathbb{Z}$

2/ أ) $\begin{cases} S = 11a + 1 \\ S = 7b + 2 \end{cases}$ ومنه $11a + 1 = 7b + 2$ ومنه $11a + 7(-b) = 1$ ومنه الثنائية $(a; -b)$ هل للمعادلة (E)

ب) $S = 11a + 1 = 11(7k + 2) + 1 = 77k + 23$ ومنه باقي قسمة S على 77 هو 23

3/ $\begin{cases} n = 11\alpha + 1 \\ n = 7\beta + 2 \end{cases}$ ومنه $k \in \mathbb{N}$ $n = 77k + 23$

$n < 2013$ ومنه $77k + 23 < 2013$ ومنه $k < 25.8$ ومنه $k = 25$ إذن $n = 1948$

حل التمرين 14 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ أ) $2n + 27 \equiv 0[n + 1]$ إذن $2n + 2 + 25 \equiv 0[n + 1]$ ؛ لدينا $2n + 2 \equiv 0[n + 1]$ ومنه $25 \equiv 0[n + 1]$ إذن $n + 1 \in D_{25}$

ومنه $n + 1 \in \{1; 5; 25\}$ وعليه : $n \in \{0; 4; 24\}$

ب) الثنائية (a, b) هي ثنائية طبيعية ومنه $a + b > b - a$ ؛ لدينا $(a + b)(b - a) = 24$ ومنه $a + b \setminus 24$

$\begin{cases} a + b = 24 \\ b - a = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a + b = 12 \\ b - a = 2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a + b = 8 \\ b - a = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} a + b = 6 \\ b - a = 4 \end{cases}$

ومنه : nonsolutions nonsolutions

$$(a; b) \in \{(1; 5); (5; 7)\} : \text{إذن } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} a = 5 \\ b = 7 \end{cases}$$

$$b^2 = a^2 + (\sqrt{24})^2 \text{ ومنه } (a+b)(a-b) = 24 \text{ (ج)}$$

لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$ ؛ نرسم مثلثاً قائماً طول وتره b أي 5 أو 7 و طول أحد ضلعيه القائمين a أي 1 أو 5 على الترتيب ويكون طول الضلع الثاني القائم هو $\sqrt{24}$

$$\beta = 3403^5 \text{ و } \alpha = 10141^5 / 2$$

$$\alpha = 10141^5 \text{ (أ) ومنه } \alpha = 1 + 4(5) + (5)^2 + (5)^4 \text{ ومنه } \alpha = 671 \text{ ومنه } \beta = 3403^5 \text{ ومنه } \beta = 3 + 4(5)^2 + 3(5)^3 \text{ ومنه } \beta = 478$$

$$(a; b) = (5; 7) \text{ ومنه } \begin{cases} (a; b) \in \{(1; 5); (5; 7)\} \\ \alpha a + \beta b = 9 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b^2 - a^2 = 24 \\ \alpha a + \beta b = 9 \end{cases} \text{ (ب)}$$

$$2013 = 1434 + 579 = 579 \times 2 + 276 \text{ (أ) /3}$$

$$276 = 27 \times 10 + 6 ; 579 = 276 \times 2 + 27$$

$$PGCD(2013; 1434) = 3 \text{ ومنه } 6 = 3 \times 2 + 0 ; 27 = 6 \times 4 + 3$$

$$PGCD(671; 478) = 1 \text{ ومنه } PGCD(671 \times 3; 478 \times 3) = 3 \text{ ومنه } PGCD(2013; 1434) = 3$$

(ب) $2013x - 1434y = 27$ ومنه $671x - 478y = 9$ ؛ ومنه الحل الخاص لهذه المعادلة الأخيرة هي الثنائية $(x_0; y_0) = (5; 7)$

$$\text{ومنه حسب مرهنة } \begin{cases} 478 \setminus 671(x-5) \\ PGCD(671; 478) = 1 \end{cases} \text{ لدينا } 671(x-5) = 478(y-7) \text{ ومنه } \begin{cases} 671x - 478y = 9 \\ 671(5) - 478(7) = 9 \end{cases}$$

$$\text{غوص فإن: } 478 \setminus x-5 \text{ ومنه } k \in \mathbb{Z} ; x = 478k + 5 ; 671(478k) = 478(y-7) \text{ ومنه } y = 671k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(478k + 5; 671k + 7)\} ; k \in \mathbb{Z} \text{ هي حلول المعادلة } 2013x - 1434y = 27$$

حل التمرين 15 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$1/ \text{صحيح لأن: } PGCD(21; 14) = 7 \text{ و } 7 \text{ يقسم } 40$$

$$2/ \text{خطأ لأن: } 3421^7 + 1562^7 = 1240 + 632 = 1872$$

$$5413^7 = 1921$$

$$3/ \text{خطأ لأن } 3^0 \equiv 1[7]; 3^1 \equiv 3[7]; 3^2 \equiv 2[7]; 3^3 \equiv 6[7]; 3^4 \equiv 4[7]; 3^5 \equiv 5[7]; 3^6 \equiv 1[7] \text{ ومنه } 3^6 \equiv 1[7]$$

$$3^{6k+3} \equiv 6[7]; 3^{6k+4} \equiv 4[7]; 3^{6k+5} \equiv 5[7]; 3^{6k} \equiv 1[7]; 3^{6k+1} \equiv 3[7]; 3^{6k+2} \equiv 2[7]$$

$$3^{6k} + 3^{6k+1} + 3^{6k+2} + 3^{6k+3} + 3^{6k+4} + 3^{6k+5} \equiv 0[7]$$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2009} + 3^{2010} + 3^{2011} \equiv \underbrace{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{6(334)+5}}_{\equiv 0[7]} + \underbrace{3^{6(335)}}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{3^{6(335)+1}}_{\equiv 3[7]}[7]$$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011} \equiv 4[7]$$

حل التمرين 16 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$\alpha = (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10$$

$$\begin{array}{r|l} 2n^3 - 14n + 2 & n + 3 \\ -2n^3 - 6n^2 & 2n^2 - 6n + 4 \\ \hline -6n^2 - 14n + 2 & \\ 6n^2 + 18n & /1 \\ 4n + 2 & \\ -4n - 12 & \\ \hline -10 & \end{array}$$

أ) نضع : $PGCD(\alpha; \beta) = d$ و $PGCD(\beta; 10) = d'$

$$\left\{ \begin{array}{l} d \mid 10 \\ d \mid \beta \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d \mid (2n^2 - 6n + 4)\beta \\ d \mid \beta \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d \mid \alpha \\ d \mid \beta \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d' \mid \alpha \\ d' \mid \beta \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d' \mid (2n^2 - 6n + 4)\beta - 10 \\ d' \mid \beta \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} d' \mid 10 \\ d' \mid \beta \end{array} \right\}$$

$$PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10) : \text{ إذن } d = d'$$

ب) $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$ ومنه $d \in D_{10}$ ومنه $d \in \{1; 2; 5; 10\}$

ج) $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ إذن $PGCD(10; \beta) = 5$ ومنه $\beta = 5k$ (مع k عدد طبيعي فردي) ومنه $\beta = 5(2\ell + 1)$

$$n + 3 = 10\ell + 5 \text{ إذن } n = 10\ell + 2 ; \ell \in \mathbb{N}$$

$$2) \text{ أ) } 4^3 \equiv 9[11]; 4^4 \equiv 3[11]; 4^5 \equiv 1[11] ; 4^0 \equiv 1[11]; 4^1 \equiv 4[11]; 4^2 \equiv 5[11] \text{ ومنه}$$

$$4^{5k+3} \equiv 9[11]; 4^{5k+4} \equiv 3[11] ; 4^{5k} \equiv 1[11]; 4^{5k+1} \equiv 4[11]; 4^{5k+2} \equiv 5[11]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4^{5(2\ell+2)} + 4^{5(2\ell)+2} + 10\ell + 2 \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{array} \right\} \text{ ب)}$$

$$4^{5(2\ell+2)} + 4^{5(2\ell)+2} + 10\ell + 2 \equiv 0[11] \text{ ومنه } 4^{5(2\ell+2)} \equiv 1[11] \text{ ومنه } 4^{5(2\ell)+2} \equiv 5[11]$$

$$\ell \equiv -3[11] \text{ ومنه } \ell \equiv 8[11] \text{ ومنه } \ell = 11m + 8 \text{ ومنه } n = 10(11m + 8) + 2$$

$$n = 110m + 82 ; m \in \mathbb{N} \text{ إذن}$$

حل التمرين 17 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

$$1) \left\{ \begin{array}{l} 153 \equiv 3[15] \\ 153 \equiv 6[7] \end{array} \right\} \text{ ومنه العدد } 153 \text{ هي حل للجمللة (S)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{array} \right\} \text{ إذن } \left\{ \begin{array}{l} \text{حل } x \text{ ل}S \\ \text{حل } x_0 \text{ ل}S \end{array} \right. /2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv x_0[15] \\ x \equiv x_0[7] \\ x_0 \equiv 3[15] \\ x_0 \equiv 6[7] \end{array} \right\} \text{ ومنه حسب خواص الموافقات نجد : } \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \\ \text{حل } x_0 \text{ ل}S \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{array} \right. \text{ ومنه } x \text{ حل للجملـة (S)}$$

مما سبق (x حل للجملـة (S) تكافئى $\left(\begin{array}{l} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{array} \right)$

$$\text{ ومنه } x - 153 \equiv 0[105] \text{ تكافئى } x \equiv 48[105] \text{ تكافئى } \left\{ \begin{array}{l} x - 153 \equiv 0[15] \\ x - 153 \equiv 0[7] \end{array} \right. \text{ حل لـ (S) تكافئى } \\ x = 105k + 48 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} x = 105k + 48 \\ 500 \leq x \leq 600 \end{array} \right. \text{ إذن } \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \\ 500 \leq x \leq 600 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} x = 15\alpha + 3 \\ x = 7\beta + 6 \\ 500 \leq x \leq 600 \end{array} \right. /4 \\ 452 \leq 105k \leq 552 \text{ ومنه } 4.3 \leq k \leq 5.3 \text{ ومنه } k = 5 \\ \text{ وعليه } \boxed{x = 573} \text{ إذن عدد الكتب هو } 573$$

حل التمرين 18 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$13(x-1) = 7(y-2) \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 13x - 7y = -1 \\ 13(1) - 7(2) = -1 \end{array} \right. /1$$

$$x = 7k + 1 \quad k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } 7 \nmid x-1 \text{ غوص } \left\{ \begin{array}{l} 7 \nmid 13(x-1) \\ PGCD(7; 13) = 1 \end{array} \right.$$

$$13(7k) = 7(y-2) \text{ ومنه } k \in \mathbb{Z} \text{ } y = 13k + 2 \text{ ؛ حلول المعادلة (E) هي}$$

$$\boxed{S = \{(7k + 1; 13k + 2)\}; k \in \mathbb{Z}}$$

$$\text{ ومنه } 13\beta - 7\alpha = -1 \text{ ومنه } (\beta; \alpha) = (7k + 1; 13k + 2) \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} a = 7\alpha - 1 \\ a = 13\beta \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{array} \right. /2 \\ a = 91k + 13 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$9^{3k} \equiv 1[7]; 9^{3k+1} \equiv 2[7]; 9^{3k+2} \equiv 4[7] ; k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه } 9^3 \equiv 1[7] ; 9^0 \equiv 1[7]; 9^1 \equiv 2[7]; 9^2 \equiv 4[7] /3$$

$$b = \overline{\alpha 00\beta 086}^9 = 6 + 8(9) + \beta(9)^3 + \alpha(9)^6 /4$$

$$\text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\alpha(9)^6}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{\beta(9)^3}_{\equiv 1[7]} + \underbrace{78}_{\equiv 1[7]} \equiv 0[7] \\ \underbrace{\alpha(9)^6}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{\beta(9)^3}_{\equiv 1[13]} + \underbrace{78}_{\equiv 1[13]} \equiv 0[13] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} b \equiv 0[7] \\ b \equiv 0[13] \end{array} \right. \text{ ينتج عنه } b \equiv 0[91]$$

$$\alpha + \beta = 13 \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 91k + 13 \\ 0 < \alpha + \beta < 18 \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta \equiv -1[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta + 1 \equiv 0[7] \\ \alpha + \beta \equiv 0[13] \end{array} \right.$$

$$\text{ ؛ حيث } (\alpha < 9 ; \beta < 9) \text{ ؛ ومنه } \boxed{(\alpha; \beta) \in \{(5; 8); (8; 5); (6; 7); (7; 6)\}}$$

حل التمرين 20 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

$$n + 3 \nmid 3n^3 - 11n + 48 \text{ ومنه } (n+3)(3n^2 - 9n + 16) = 3n^3 - 11n + 48 \text{ (أ) /1}$$

(ب) مميّز ثلاثي الحدود $3x^2 - 9x + 16$ هو $\Delta = -111$ (وهو عدد سالب) وبالتالي $3x^2 - 9x + 16 > 0$ مهما كان x

من \mathbb{R} ومنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^2 - 9n + 16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

12 / نضع $PGCD(a; b) = d$ و $PGCD(bc - a; b) = d'$

$$d \mid d' \text{ ومنه } \begin{cases} d \mid bc - a \\ d \mid b \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases}$$

$$d' \mid d \text{ ومنه } d' \mid a \text{ ومنه } \begin{cases} d' \mid bc - a \\ d' \mid bc \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d' \mid bc - a \\ d' \mid b \end{cases}$$

كما سبق: أي $d = d'$ $PGCD(a; b) = PGCD(bc - a; b)$

13 / من أجل $a = 48; b = n + 3; c = 3n^2 - 9n + 16$ وحسب السؤال السابق نجد

$$PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = PGCD(48; n + 3)$$

$$D_{48} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\} \quad (أ)$$

(ب) لدينا $n + 3 \in \mathbb{N}$ ؛ الشرط اللازم لكي يكون A عدد طبيعي هو $3n^3 - 11n \geq 0$ ؛ هذا الشرط محقق من أجل

$$n \geq 2 \text{ أو } n = 0$$

من أجل $n = 0$ ؛ $A = 0$ ومنه $A \in \mathbb{N}$

من أجل $n \geq 2$ يكون $A \in \mathbb{N}$ إذا فقط إذا كان $n + 3 \mid 3n^3 - 11n$ أي $PGCD(3n^3 - 11n; n + 3) = n + 3$

حسب السؤال السابق نستنتج أن: $PGCD(48; n + 3) = n + 3$ ومنه $n + 3 \mid 48$ ومنه $n + 3 \in D_{48}$ أي $n + 3 \in$

$$\{6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

وبالتالي: $n \in \{3; 5; 9; 13; 21; 45\}$ ؛ قيم n حتى يكون A طبيعي هي $n \in \{0; 3; 5; 9; 13; 21; 45\}$

حل التمرين 21 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1 / (أ) $2^0 \equiv 1[7]; 2^1 \equiv 2[7]; 2^2 \equiv 4[7]; 2^3 \equiv 1[10]$

$k \in \mathbb{Z}$	$3k + 2$	$3k + 1$	$3k$	$n =$
[7]	4	2	1	$2^n \equiv$

ومنه:

(ب) $1962 \equiv 2[7]$ ؛ ومنه $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ ؛ ومنه $1962^{1954} \equiv 2^{1954} \equiv 2[7]$ إذن $1954 = 3 \times 651 + 1$ ؛ $1954 \equiv 1[7]$ ؛ $1962^{1954} \equiv 2^{1954} \equiv 2[7]$

$1[7]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[7]$ ؛ $2015 \equiv 6[7]$ ؛ $2015 \equiv -1[7]$ ؛ $6 \equiv -1[7]$ ؛ ومنه $2015^{53} \equiv -1[7]$ لأن 53 عدد فردي ومنه

$$1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53} \equiv 2 - 1 - 1[7] \equiv 0[7] \text{ إذن}$$

12 / (أ) $\sqrt{89} \approx 9.4$ ؛ و 89 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

(ب) لدينا $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$ ومنه عدد القواسم الطبيعية للعدد 89 هو $(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$ وهي

$$\begin{cases} 2^0 \times 11 \times 89 = 979 \\ 2^1 \times 11 \times 89 = 1958 \\ 2^2 \times 11 \times 89 = 3916 \\ 2^3 \times 11 \times 89 = 7832 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2^0 \times 11^0 \times 89 = 89 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89 = 178 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89 = 356 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89 = 712 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2^0 \times 11 \times 89^0 = 11 \\ 2^1 \times 11 \times 89^0 = 22 \\ 2^2 \times 11 \times 89^0 = 44 \\ 2^3 \times 11 \times 89^0 = 88 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2^0 \times 11^0 \times 89^0 = 1 \\ 2^1 \times 11^0 \times 89^0 = 2 \\ 2^2 \times 11^0 \times 89^0 = 4 \\ 2^3 \times 11^0 \times 89^0 = 8 \end{cases}$$

$$D_{7832} = \{1; 2; 4; 8; 11; 22; 44; 88; 89; 178; 356; 712; 979; 1958; 3916; 7832\}$$

(ج) نضع $d = PGCD(981; 977)$ ؛ ومنه d يقسم $981 - 977$ أي d يقسم 4 إذن $d \in \{1; 2; 4\}$ ؛ لكن 2 و 4 لا

يقسمان العددين 977 و 981 ومنه $PGCD(977; 981) = 1$ فهما إذن أوليان فيما بينهما

$$\begin{cases} 4x'^2 - 4y'^2 = 31328 \\ 2x - 2y \equiv 8[22] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x = 2x' \\ y = 2y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases} \text{ ومنه } PGCD(x; y) = 2 ; \begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases} \quad /3$$

$$7832 \text{ ومنه } \begin{cases} (x' + y')(x' - y') = 31328 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$\begin{cases} x' + y' = 1958 \text{ و } x' - y' = 4 \\ x' + y' = 22 \text{ و } x' - y' = 356 \end{cases} \text{ وباقي قسمة } x' - y' \text{ على } 11 \text{ هو } 4 \text{ ومنه}$$

$$\text{ من هذه الجملة نجد } \begin{cases} x' - y' = 4 \\ x' + y' = 1958 \end{cases} \text{ و } x' = 981 \text{ و } y' = 977 ; \text{ و هذه الجملة نجد } \begin{cases} x' - y' = 356 \\ x' + y' = 22 \end{cases} \text{ ، مو هذه الجملة نجد}$$

$$x' = 189 \text{ و } y' = -167 \text{ ، (مرفوض لأنّ الحلين طبيعيين)}$$

$$\text{ بالتعويض نجد } y = 977 \times 2 = 1954 \text{ و } x = 981 \times 2 = 1962$$

1/4 أ) حسب مبرهنة بيزو لدينا أولي مع b معناه يوجد عدنان صحيحان α و β بحيث $\alpha a + \beta b = 1 \dots (1)$ ،

أولي مع c معناه يوجد عدنان صحيحان α' و β' بحيث $\alpha' a + \beta' c = 1 \dots (2)$

$$\text{ بضرب (1) في (2) نجد } (\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = 1 \text{ أي } \alpha \alpha' a^2 + \alpha \alpha \beta' c + \beta b \alpha' a + \beta b \beta' c = 1$$

$$\text{ ومنه } (\alpha \alpha' a + \alpha \beta' c + \beta b \alpha') a + \beta \beta' b c = 1 \text{ ومنه } a \text{ و } bc \text{ أوليان فيما بينهما}$$

ب) التحقق $PGCD(a; b) = 1$ محققة ؛ نفرض أن $PGCD(a; b^n) = 1$ و نبرهن أن $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$

$PGCD(a; b) = 1$ و $PGCD(a; b^n) = 1$ ؛ فحسب ما سبق $PGCD(a; b \times b^n) = 1$ و منه $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$

$$1) \text{ ومنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ } PGCD(a; b^n) = 1$$

$$\text{ ج) } PGCD(1954; 1962) = 2 PGCD(977; 981) \text{ ومنه } PGCD(1954^{1962}; 1962^{1954}) = 2^{1954} PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954})$$

لدينا $PGCD(977; 981) = 1$ فحسب ب) $PGCD(977^{1962}; 981^{1954}) = 1$ و لدينا $PGCD(2; 981) = 1$ فحسب

$$\text{ ب) أيضاً } PGCD(2^8; 981^{1954}) = 1 \text{ ومنه حسب أ) } PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954}) = 1$$

$$PGCD(1954^{1962}; 1962^{1954}) = 2^{1954}$$

حل التمرين 22 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

1/ رقم آحاد $n^5 - n$ هو 0 معناه $n^5 - n$ يقبل القسمة على 10 ؛ من قواسم 10 هناك قاسمين أوليين هما 2 و 5

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1) \text{ ؛ العدد } n(n+1) \text{ هو جداء عددين طبيعيين متتابعين فهو إذن}$$

عدد زوجي أي مضاعف للعدد 2 ؛ إذن $n^5 - n$ مضاعف للعدد 2

إذا كان n مضاعف للعدد 5 فإن $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5

إذا كان n ليس مضاعف لـ 5 فإن بواقي قسمته على 5 هي 1 أو 2 ؛ أو 3 ؛ أو 4

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 1 فإن $n-1$ مضاعف للعدد 5 ومنه $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو 4 فإن $n+1$ مضاعف للعدد 5 ومنه $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5

إذا كان باقي قسمة n على 5 هو r حيث $r \in \{2; 3\}$ ومنه $n = 5k + r$ إذن $n^2 = 25k^2 + 10k \times r + r^2$ ؛ ومنه

$$n^2 + 1 = 25k^2 + 10k \times r + r^2 + 1$$

$r \in \{2; 3\}$ ومنه $n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5$ أو $n^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10$ ومنه $n^2 + 1$ مضاعف لـ 5 إذن $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5
 في كل الحالات $n^5 - n$ مضاعف للعدد 5 و مضاعف للعدد 2 إذن فهو مضاعف للعدد 10 و بالتالي رقم آحاده 0
 1/2 n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد معناه رقم آحاد العدد $n^{p+5} - n^{p+1}$ هو 0
 لدينا $n^{p+5} - n^{p+1} = n^p(n^5 - n)$ ؛ مما سبق $n^5 - n$ رقم آحده 0 ومنه $n^{p+5} - n^{p+1}$ رقم آحده هو 0 ومنه n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

حل التمرين 23 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

لإثبات أن $n^7 - n$ يقبل القسمة على 14 يكفي أن تثبت أنه يقبل القسمة على 2 و 7 لأنهما أوليان فيما بينهما
 لدينا $n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n-1)(n^2 + n + 1)(n^3 + 1)$
 العدد $n(n-1)$ هو عدد زوجي لأنه جداء عددين طبيعيين متتابعين ومنه العدد $n^7 - n$ يقبل القسمة على 2؛ يمكن
 أن تثبت أن العدد $n^7 - n$ يقبل القسمة على 7 وذلك بتمييز الحالات
 $n = 7k; n = 7k + 1; n = 7k + 2; n = 7k + 3; n = 7k + 4; n = 7k + 5; n = 7k + 6$
 بما أن العدد $n^7 - n$ يقبل القسمة على 2 و 7 فهو يقبل القسمة على 14 فهو مضاعف لـ 14

حل التمرين 25 ▲ للعودة إلى التمرين انقر هنا

1/ $p = 2$ المعادلة E تصبح $x^2 + y^2 = 4$ ومنه $y^2 = 4 - x^2$ ومنه $y^2 = (2-x)(2+x)$ وعليه $2-x > 0$ و $x+2 > 0$
 لأن $y \in \mathbb{N}^*$ ومنه $x < 2$ و $x \in \mathbb{N}^*$ إذن $x = 1$
 المعادلة E تصبح $y^2 = 3$ وهذه المعادلة الأخيرة لا تقبل حلولاً في \mathbb{N}^* ؛ وعليه المعادلة E لا تقبل حلولاً في \mathbb{N}^* من أجل $p = 2$
 1/2 أ) نفرض $p \neq 2$ و $(x; y)$ حل لـ E
 نفرض أن x و y زوجيان أي $x = 2\ell$ و $y = 2\ell'$ حيث $\ell; \ell' \in \mathbb{N}$ عددان طبيعيين؛ ومنه $4\ell^2 + 4\ell'^2 = p^2$ ومنه $2(2\ell^2 + 2\ell'^2) = p^2$ ومنه 2 يقسم p^2 ومنه 2 يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي و $p \neq 2$
 نفرض أن x و y فرديان أي $x = 2\ell + 1$ و $y = 2\ell' + 1$ حيث $\ell; \ell' \in \mathbb{N}$ عددان طبيعيين؛ ومنه $2(2\ell^2 + 2\ell + 2\ell'^2 + 2\ell' + 1) = p^2$ ومنه 2 يقسم p^2 ومنه 2 يقسم p وهذا تناقض لأن p أولي و $p \neq 2$ ومنه x و y من شفتين مختلفتان
 ب) نفرض أن p يقسم x ومنه $x = pk$ حيث $k \in \mathbb{N}$ ومنه $y^2 = p^2(1 - k^2)$ ، ومنه $1 \geq k$ وعليه $k = 0$ أو $k = 1$
 من أجل $k = 0$ نجد $x = 0$ ؛ من أجل $k = 1$ نجد $y = 0$ ؛ لكن العددين x و y عددان طبيعيين غير معدومين
 نصل إلى نفس النتائج إذا افترضنا أن p يقسم y ؛ وعليه p لا يقسم x ولا يقسم y
 ج) نضع $PGCD(x^2; y^2) = d$ ؛ $d \mid x^2$ و $d \mid y^2$ ومنه $d \mid x^2 + y^2$ ومنه $d \mid p^2$ ومنه $d \in \{1; p; p^2\}$
 د) بما أن p لا يقسم x ولا يقسم y ومنه $d \neq p$ و $d \neq p^2$ ومنه $d = 1$ ؛ إذن x و y أوليان فيما بينهما
 1/3 أ) حل لـ E معناه $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ ؛ وهذا الطحوق بسيط
 ب) في حالة $p = 5$ أي $p = 1^2 + 2^2$ مم سبق نجد $(3; 4)$ حل لـ E ؛ وفي حالة $p = 13$ أي $p = 3^2 + 2^2$ إذن $(5; 12)$

حل لـ E

1/ أ) $p = 3$ ؛ نفرض أن $u^2 + v^2 = 3$ ومنه $u^2 = 3 - v^2$ ومنه $v^2 < 3$ ومنه $v^2 = 1$ ومنه $v = 1$ إذن $u^2 = 2$ ؛
لكن 2 ليس مربعاً تاماً ومنه 3 ليس مجموع مربعين
المعادلة E تصبح $x^2 + y^2 = 9$ ومنه

حل التمرين 26 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

أ) معناه $\begin{cases} x \equiv 3[5] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ x = 6k' + 1 \end{cases}$ ومنه $5k = 6k' - 2$ ومنه $5k \equiv -2[6]$ أي $5k \equiv 4[6]$ ومنه $5k \equiv 2[6]$

ومنه $k \equiv 2[6]$ ومنه $k = 6\ell + 2$ إذن $\ell \in \mathbb{Z}$ $x = 30\ell + 13$;

ب) معناه $\begin{cases} 2x \equiv 2[4] \\ 4x \equiv 1[3] \end{cases}$ $\begin{cases} x \equiv 1[2] \\ x \equiv 1[3] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 3x \equiv 3[6] \\ 2x \equiv 2[6] \end{cases}$ ومنه $x \equiv 1[6]$ ومنه $\ell \in \mathbb{Z}$ $x = 6\ell + 1$;

حل التمرين 28 ▲ للعودة إلى التمرين انظر هنا

1/ الحرف (ث) (يحوّل إلى الحرف (ذ) معناه $x = 3$ ترفق بـ $y = 8$ أي $3a + b \equiv 8[28]$ ومنه $3a + b \equiv 8[28]$ ؛
الحرف (ص) (يحوّل إلى الحرف (خ) معناه $x = 13$ ترفق بـ $y = 6$ أي $13a + b \equiv 6[28]$ ومنه $13a + b \equiv 6[28]$ ومنه
لدينا $\begin{cases} 13a + b \equiv 6[28] \\ 3a + b \equiv 8[28] \end{cases}$

2/ مما سبق وبالطرح طرفاً لطرف بين الموافقتين نجد $10a \equiv -2[28]$ ومنه $5a \equiv -1[14]$ ومنه $5a = 14k - 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$

3/ أ) لدينا $5a \equiv -1[14]$ ومنه $15a \equiv -3[14]$ حسب خواص الموافقات ومنه $a \equiv -3[14]$ ومنه $a \equiv 11[14]$

ب) لدينا $0 \leq a \leq 27$ ؛ $a \equiv 11[14]$ و $a = 11$ إذن $a = 11$

لدينا $13a + b \equiv 6[28]$ أي $13 \times 11 + b \equiv 6[28]$ ومنه $b \equiv -137[28]$ ومنه $b \equiv 3[28]$ ولدينا $0 \leq b \leq 27$ إذن $b = 3$

مما سبق نجد $a = 11$ و $b = 3$ ويصبح التشفير التآلفي كما يلي $y \equiv 11x + 3[28]$

ج) 11 أولي لا يقسم 28 إذن $PGCD(11; 28) = 1$ و عليه العددا 11 و 28 أوليان فيما بينهما

4/ يمكن الآن إيجاد تشفير الجملة المعطاة ؛ الجدول أدناه يوضح التشفير المحصل عليه

	A	B	C	D
1		x	y	
2		0	3	
3		1	14	
4		2	25	
5		3	8	
6		4	19	
7		5	2	
8		6	13	
9		7	24	
10		8	7	
11		9	18	
12		10	1	
13		11	12	
14		12	23	
15		13	6	
16		14	17	
17		15	0	
18		16	11	
19		17	22	
20		18	5	
21		19	16	
22		20	27	
23		21	10	
24		22	21	
25		23	4	
26		24	15	
27		25	26	
28		26	9	
29		27	20	

حل تشفير الجملة السابقة هو:
الموافقات في مجموعة الأعداد الصحيحة

تمارين القسمة و اللوافقات في \mathbb{Z}

التمرين 01 :

1. أثبت أن العدد 251 أولي.
2. حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية و استنتج الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008.
3. عين الأعداد الطبيعية a و b بحيث : $m^3 + 35d^3 = 2008$ ، علماً أن : $m = PPCM(a, b)$; $d = PGCD(a, b)$.

التمرين 02 :

1. أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{2n} على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(5^n + 6^{2n} + 3)$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 03 :

1. عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 11.
2. عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث : $(6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7)$ يقبل القسمة على 11.

التمرين 04 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7.
2. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3)$ يقبل القسمة على 7.
3. عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n)$ قابلا للقسمة على 7.

التمرين 05 :

عين كل الثنائيات (a, b) من الأعداد الطبيعية حيث :

$$(1) \begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases} ; (2) \begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} ; (3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} ; (4) \begin{cases} PPCM(a, b) = 90 \\ PGCD(a, b) = 18 \end{cases}$$

$$(5) a \leq b \text{ مع } PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13$$

التمرين 06 :

a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = n^2 + 2$; $a = 5n^2 + 7$

1. بين أن كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 3
2. بين أن $PGCD(a, b) = 3$ إذا و فقط إذا $n^2 \equiv 1[3]$
3. استنتج حسب قيم n ، $PGCD(a, b)$.

التمرين 07 :

a, b, n أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $b = 5n - 2$; $a = 2n + 3$

1. بين أنه إذا كان العددين a و b غير أوليين فيما بينهما فإن : $PGCD(a, b) = 19$
2. عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a, b) = 19$.

التمرين 08 :

- $b = 2n^2 + n ; a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$: أعداد طبيعية غير معدومة حيث :
1. بيّن أنّ العدد $(2n + 1)$ قاسم مشترك للعددين a و b
 2. باستعمال مبرهنة بيزو بيّن أنّ $PGCD(n, n + 1) = 1$ و $PGCD[n, (n + 1)^2] = 1$.
 3. استنتج $PGCD(a, b)$.

التمرين 09 :

- n عدد طبيعي. نضع : $A = n^4 + n^2 + 1$
1. حلل A إلى جداء عاملين من الدرجة الثانية (لاحظ أنّ : $A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2$)
 2. نضع : $b = n^2 - n + 1 ; a = n^2 + n + 1$
- أ. بيّن أنّ العددين a و b فردين
- ب. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم $2n$ و $2(n^2 + 1)$
- ج. بيّن أنّ العددين n و $n^2 + 1$ أوليان فيما بينهما
- د. استنتج أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما

التمرين 10 :

- $b = 13n - 1 ; a = 11n + 3$: أعداد طبيعية غير معدومة حيث :
1. بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين a و b يقسم 50
 2. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّّن حلا خاصا للمعادلة : $50x - 11y = 1$ ، ثم حل في \mathbb{Z} المعادلة : $50x - 11y = 3$
 3. استنتج قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a, b) = 50$.
 4. ما هي قيم n التي يكون من أجلها : $PGCD(a, b) = 25$ ؟

التمرين 11 :

- نعتبر في \mathbb{Z} المعادلة : $324x - 245y = 7 \dots (E)$
1. باستعمال خوارزمية إقليدس عيّّن حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في \mathbb{Z} هذه المعادلة
 2. بيّن أنّه إذا كانت الثنائيات (x, y) حلا للمعادلة (E) ، فإنّ : $x \equiv 0 [7]$
 3. نضع : $PGCD(x, y) = d$
- أ. بيّن أنّ القيم الممكنة للعدد d هي 1 و 7
- ب. عيّّن كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) بحيث $PGCD(x, y) = 7$.

التمرين 12 :

1. عيّّن القاسم المشترك الأكبر للأعداد 1996 ، 1497 و 2994.
 2. نعتبر المعادلة : $(1) \dots 1996x - 1497y = 2994$ حيث : x و y عدنان صحيحان.
- أ- أثبت أنّ x مضاعف للعدد 3 و y مضاعف للعدد 2 ، ثمّ حل المعادلة (1).
- ب- عيّّن الحلول (x, y) بحيث يكون : $xy = 1950$.

التمرين 13 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(I) \dots 4x - 9y = 19$
 2. ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x, y) حل للمعادلة (I)
- أ- ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
- ب- عيّّن حلول المعادلة بحيث يكون $d = 19$
3. عيّّن الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة : $4a^2 - 9b^2 = 19$

التمرين 14 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $5x - 3y = 2$
2. عدد طبيعي يُكتب $\overline{55}$ في النظام ذي الأساس x و يُكتب $\overline{37}$ في النظام ذي الأساس y حيث $x \leq 12$; $y \leq 20$ عيّن القيم الممكنة للعددين x و y ، ثم اكتب A في النظام العشري.

التمرين 15 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : (I) $8x - 5y = 3$...
2. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية (p, q) من الأعداد الصحيحة تحقق : $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$
 - أ- بيّن أنّ الثنائية (p, q) هي حل للمعادلة (I) ، ثم استنتج أنّ : $m \equiv 9[40]$
 - ب- عيّن أصغر عدد طبيعي m أكبر 2000
3. ليكن n عددا طبيعيا
 - أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا : $2^{3k} \equiv 1[7]$
 - ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟
4. ليكن a و b عدنان طبيعيين حيث : $0 < a \leq 9$ و $b \leq 9$ ، و نعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل : $N = \overline{a00b} = a \times 10^3 + b$. نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7
 - أ- تحقق من أنّ : $10^3 \equiv -1[7]$
 - ب- استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

التمرين 16 :

اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل :

1. في مجموعة الأعداد الصحيحة ، المعادلة $x^2 + x + 3 \equiv 0[5]$
 - (أ) لا تقبل حولا
 - (ب) حلولها زوجية
 - (ج) حلولها تحقق $x \equiv 2[5]$
 - (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$
2. حلول المعادلة $24x + 34y = 2$ هي :
 - (أ) $(17k - 7; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 - (ب) $(-7k; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 - (ج) $(34k - 7; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 - (د) المجموعة الخالية
3. N عدد طبيعي يُكتب في النظام ذي الأساس 5 : $\overline{421}$. كتابته في النظام ذي الأساس 6 هي :
 - (أ) $\overline{421}$
 - (ب) $\overline{111}$
 - (ج) $\overline{303}$
 - (د) $\overline{222}$
4. باقي القسمة الإقليدية للعدد 1432^{2011} على العدد 3 هو :
 - (أ) 0
 - (ب) 1
 - (ج) 2
 - (د) 3
5. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $a = n(n + 2)$; $b = n + 1$. بما أنّ : $b^2 - a = 1$ فإنّ $PGCD(a, b)$ هو :
 - (أ) n
 - (ب) $n + 1$
 - (ج) 1
 - (د) 2

التمرين 17 :

a ، b عدنان طبيعيين و p عدد طبيعي أولي حيث : $PGCD(a + b ; ab) = p^2$

1. بيّن أنّ p^2 يقسم a^2 ، ثم استنتج أنّ p يقسم a
 - بطريقة مماثلة بيّن أنّ p يقسم b
 - أثبت أنّ : $PGCD(a ; b) = p$ أو $PGCD(a + b ; ab) = p^2$
2. نعتبر في \mathbb{N}^2 الجملة : $PGCD(a + b ; ab) = 49$ (E)
 - $PPCM(a ; b) = 231$
 - بيّن أنّ : $PGCD(a ; b) = 7$
 - عيّن كل الثنائيات (a, b) في \mathbb{N}^2 و التي تحقق (E).

التمرين 18 :

n عدد طبيعي ، نعتبر الأعداد : $a_n = 4 \times 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \times 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \times 10^n + 10$.
1. أحسب b_3 ، c_3 .

- بيّن أنّ a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 ، و أنّ b_3 عدد أولي
- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $b_n \times (c_n - 9) = a_{2n}$
- استنتج تحليلاً إلى جداء عوامل أولية للعدد a_6
- بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 11)$
- استنتج أنّ أوليان فيما بينهما b_n و c_n
- 2. نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) $b_3x + c_3y = 1 \dots$
- بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل على الأقل حلاً في \mathbb{Z}^2
- تحقق أنّ $(-731, 727)$ حل للمعادلة (E) ، ثمّ حل في \mathbb{Z}^2 هذه المعادلة.

التمرين 19 :

ليكن n عدداً طبيعياً

1. برهن أنّ العددين $n^2 + 5n + 4$ و $n^2 + 3n + 2$ يقبلان القسمة على $(n + 1)$
2. عيّن قيم n حتى يقبل العدد $3^2 + 15n + 19$ القسمة على $(n + 1)$
3. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على $n^2 + 3n + 2$.

التمرين 20 :

1. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584

2. عيّن العددين الطبيعيين a و b حيث $b > a$ اللذين يحققان : $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$

التمرين 21 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 10
2. استنتج باقي القسمة الإقليمية على 10 للعدد $7^{1422} - 9^{2001} \times 63$
3. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n - 1) \times 3^{2n+1} [10]$
4. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون : $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0 [10]$.

التمرين 22 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 4^n على 11
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ العدد الطبيعي k حيث : $k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3}$ يقبل القسمة على 11
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث : $\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0 [11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$

التمرين 23 :

1. عيّن $PGCD(2688 ; 3024)$
2. أ. تحقق أنّ المعادلتين (1) $2688x + 3024y = -3360 \dots$ و (2) $8x + 9y = -10 \dots$ متكافئتان
ب. تحقق أنّ $(-2 ; 1)$ حل خاص للمعادلة (2)
3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتاهما على الترتيب $(P) : x + 2y - z = -2$ و $(P') : 3x - y + 5z = 0$
أ. بيّن أنّ المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d)
ب. بيّن أنّ إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2) ، ثمّ استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

التمرين 24 :

- لتكن a, b, x, y أربعة أعداد طبيعية غير معدومة حيث : $x = 2a + 3b$ و $y = 3a + 4b$
1. بيّن أنّ $PGCD(a; b) = PGCD(x; y)$ ، ثم استنتج أنه إذا كان a و b أوليين فيما بينهما فإنّ x و y أوليان فيما بينهما
 2. عيّن الثنائيات $(\alpha; \beta)$ من الأعداد الطبيعية بحيث : $PGCD(\alpha; \beta) = 5$ و $(2\alpha + 3\beta)(3\alpha + 4\beta) = 2200$.

التمرين 25 :

- a و b عدنان طبيعيان يُكتبان على الترتيب 2310 ، 252 في نظام تعداد ذي الأساس n ، وليكن $d = PGCD(a, b)$
1. برهن أنّ $(2n + 1)$ يقسم كلا من a و b و أنّ $d = 2n + 1$ أو $d = 2(2n + 1)$
 2. نأخذ $n = 6$. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $ax + by = -26$

التمرين 26 :

1. أ. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^{10} على 11؟ علل.
ب. ما هو باقي القسمة الإقليمية للعدد 6^4 على 5؟ علل.
ج. استنتج أنّ $1[11] \equiv 6^{40}$ و أنّ $1[5] \equiv 6^{40}$
د. بيّن أنّ $1 - 6^{40}$ يقبل القسمة على 55
2. x و y عدنان صحيحان
أ. بيّن أنّ المعادلة التالية ليس لها حلول : $(E) \dots 65x - 40y = 1$
ب. بيّن أنّ المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا : $(E') \dots 17x - 40y = 1$
ج. عيّن باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (E')
د. حل المعادلة (E') و استنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 أصغر من 40 حيث : $17x_0 \equiv 1[40]$
3. من أجل كل عدد طبيعي a ، بيّن أنّه إذا كان : $a^{17} \equiv b[55]$ و $a^{40} \equiv 1[55]$ فإنّ : $b^{33} \equiv 1[55]$

التمرين 27 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية للعدد 3^n على 11
2. ما هو باقي قسمة $8 - 7 \times 58^{20n+13} + 4 \times 69^{10n+6}$ على 11 ؟
3. أوجد قيم n الطبيعية بحيث يكون $5 + 14^{5n+3} + 36^{5n} \times n + n^2$ قابلا للقسمة على 11
4. أوجد الأعداد الصحيحة β التي تحقق من أجل كل n من \mathbb{N} : $0[11] \equiv 91^{3n+1} \times \beta + 80^{3n+2}$ ، ثم استنتج قيم β الصحيحة بحيث : $|\beta| \leq 20$
5. أوجد الثنائيات (x, y) من \mathbb{N}^2 بحيث : $14^x + 25^y \equiv 8[11]$.

التمرين 28 :

1. حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E) \dots 3x - 2y = 1$
2. ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم
أ. بيّن أنّ الثنائية $(4, 21n + 4)$ هي حل للمعادلة (E)
ب. استنتج أنّ العددين $4 + 21n$ و $3 + 14n$ أوليان فيما بينهما
3. ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $4 + 21n$ و $1 + 2n$
أ. بيّن أنّ $d = 1$ أو $d = 13$
ب. بيّن أنّه إذا كان $d = 13$ فإنّ $6[13] \equiv n$
4. من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ حيث $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
أ. بيّن أنّ العددين A و B يقبلان القسمة على $(n - 1)$ في المجموعة \mathbb{Z}
ب. جد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B .

التمرين 29 :

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة \mathbb{Z} المعادلة : (1) $11n - 24m = 1$...
 - أ. برر أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا
 - ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (1) علما أنّ الثنائية (5, 11) حل لها
2.
 - أ. بيّن أنّ 9 يقسم $10^{11} - 1$ و $10^{24} - 1$
 - ب. بيّن أنّه مهما يكن الحل (n, m) فإنّ : $9 = (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1)$
 - ج. بيّن أنّ : $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11n} - 1$ و أنّ : $10^{24} - 1$ يقسم $10^{24m} - 1$
 - د. استنتج وجود عددين صحيحين N و M بحيث : $(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9$
 - هـ. استنتج مما سبق $PGCD(10^{11} - 1; 10^{24} - 1)$.

التمرين 30 :

- x و y عدنان طبيعيان حيث $0 < x \leq y$ ، نضع $PGCD(x, y) = d$ و $PPCM(x, y) = m$ نريد تعيين x و y حيث (*) $m^2 - 5d^2 = 2000$...
1. برهن أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (*) فإنّ d^2 يكون قاسما للعدد 2000
 2. حلل العدد 2000 إلى جداء عوامل أولية ، ثم استنتج القواسم المربعة التامة للعدد 2000
 3. برهن أنّ 5 هو قاسم مشترك للعددين d و m . ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟
 4. استنتج القيم الممكنة للعددين x و y .

التمرين 31 :

- نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $16x + 59y = 2006$...
1. حلل إلى جداء عوامل أولية العدد 2006 ، ثم استنتج أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإنّ x مضاعف للعدد 59
 2. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1)
 3. عيّن الحلول (x, y) للمعادلة (1) التي تنتمي \mathbb{N}^{*2}
 4. عيّن الأعداد الطبيعية غير المعدومة a و b التي تحقق $16m + 59d = 2006$ حيث $PGCD(x, y) = d$ و $PPCM(x, y) = m$.

التمرين 32 :

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليمية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $1424 \cdot 6^{n+1} + 2006 \cdot 3^{n+2} \times 2$ قابلا للقسمة على 7
3. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$
- أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- ب. ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على 7.

التمرين 33 :

1. نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : (1) $91x + 10y = 1$...
 - أ. عيّن حلا خاصا للمعادلة (1) ، ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (2) $91x + 10y = 412$...
 - ب. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (2)
2. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد الطبيعي $n = 3^{2n} - 1$ قابلا للقسمة على 8
3. نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : (3) $A_3x + A_2y = 3296$...
 - أ. عيّن في المجموعة \mathbb{Z}^2 حلول المعادلة (3) ، ثم بيّن أنّ المعادلة (3) تقبل حلا وحيدا (α, β) من \mathbb{N}^2 يُطلب تعيينه
 - ب. جد قيمة العدد الطبيعي $10 + A_2(\alpha)$.

التمرين 34 :

- 1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11
- 2- بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(2011)^{5n+1} + (1993)^{10n} + (1431)^n$ يقبل القسمة على 11
- 3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث :

$$\left. \begin{array}{l} (1431)^n + 5n + (2011)^{5n+1} \text{ يقبل القسمة على } 11 \\ 90 < n < 100 \end{array} \right\} \text{ و}$$

التمرين 36 :

a و b عدنان طبيعيان حيث :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما
2. نضع : $x = 5m + 3$ ، $y = 2m - 1$ ، $m \in \mathbb{N}$
أ- عين علاقة بين x و y مستقلة عن العدد الطبيعي m
- ب- نفرض أن $PGCD(x, y) = d$
• عين القيم الممكنة لـ d
• عين الثنائيات (x, y) حيث $d = 11$.

التمرين 37 :

- 1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 4^{2n} على 5
- 2- عيّن باقي قسمة 3^n على 5
- 3- ما هو باقي قسمة 1428^{2009} على 5 ؟
- 4- ليكن العدد الطبيعي A_n حيث : $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$
• عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث A_n يقبل القسمة على 5.

التمرين 38 :

1. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : $23x - 17y = 6$
2. استنتج الأعداد الطبيعية A الأصغر من 1000 حيث باقي قسمة A على 23 هو 2 و باقي قسمة A على 17 هو 8
3. أكتب الأعداد A المحصّل عليها في النظام ذي الأساس 7.

التمرين 39 :

- 1- أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10
• استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، يقبل العدد $7^{4k+3} + 7^{4k+2} + 7^{4k+1} + 7^{4k}$ القسمة على 10
- 2- من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
• أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_{n+4} \equiv S_n [10]$ ،
• أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد S_n على 10.

التمرين 40 :

أرقام نظام التعداد ذو الأساس 12 هي : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta$

1- ليكن N_1 العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. أكتب N_1 في النظام العشري

2- ليكن N_2 العدد المكتوب في النظام العشري على الشكل 1131. أكتب N_2 في النظام ذي الأساس 12

3- ليكن N العدد المكتوب في النظام ذي الأساس 12 على الشكل $\overline{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0}^{12}$

أ. بيّن أنّ $N \equiv a_0[3]$ ، ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في النظام ذي الأساس 12

• تأكد من ذلك باستعمال كتابة N_2 في النظام ذي الأساس 12

ب. بيّن أنّ $N \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0[11]$ ، ثم استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد مكتوب

في النظام ذي الأساس 12

• تأكد من ذلك باستعمال كتابة N_1 في النظام ذي الأساس 12

4- نُذكَر أنّّه إذا كان a و b أوليان فيما بينهما و كان N يقبل القسمة على a و b فإنّ N يقبل القسمة على الجداء ab

• نعتبر $N = \overline{x4y}^{12}$. عيّن قيم x و y التي من أجلها يكون N قابلا للقسمة على 33.

التمرين 41 :

نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E) \quad 8x + 5y = 1 \dots$

1. جد حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 هذه المعادلة

2. ليكن N عددا طبيعيا حيث يوجد عدنان طبيعيان a و b يحققان : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

أ. بيّن أنّ الثنائية $(a, -b)$ حل للمعادلة (E)

ب. جد باقي القسمة الإقليدية للعدد N على 4

3. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة : $8x + 5y = 100$

4. للاشتراك في رحلة ، دفع مجموعة أشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية ، حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية و دفعت كل أنثى 5 قطع نقدية.

ما هو عدد الذكور و عدد الإناث في هذه المجموعة ؟

التمرين 42 :

n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

1. بيّن أنّ العددين n و $2n + 1$ أوليان فيما بينهما

2. نضع : $\alpha = n + 3$ ، $\beta = 2n + 1$ و $PGCD(\alpha, \beta) = d$

أ. ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب. بيّن أنّ α و β مضاعفان للعدد 5 إذا و فقط إذا كان $(n - 2)$ مضاعفا للعدد 5

3. نعتبر العددين a و b حيث : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$; $b = 2n^2 - n - 1$

بيّن أنّ العددين a و b يقبلان القسمة على $(n - 1)$

4. نضع : $PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = d'$

أ. بيّن أنّ $d = d'$

ب. استنتج $PGCD(a, b)$

ج. حدد $PGCD(a, b)$ من أجل $n = 2001$ ثم من أجل $n = 2002$.

مواضيع القسمة و الموافقات في البكالوريا

التمرين 01 : بكالوريا 2012 ر

(1) نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية : (1) $2011x + 1432y = 31 \dots$

أ. أثبت أن العدد 2011 أولي

ب. باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) ، ثم حل المعادلة (1)

(2) أ. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7 ، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7

ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $2010^n + 2011^n + 1432^n \equiv 0[7]$

(3) N عدد طبيعي يُكتب $2\gamma\alpha$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث : α, β, γ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta; \gamma)$ حل للمعادلة (1) عيّن α, β, γ ، ثم اكتب N في النظام العشري.

التمرين 02 : بكالوريا 2012 ر

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_0 = 16$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$

(1) أ. احسب بواقي قسمة كل من u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 على 7

ب. خمن قيمة للعدد a و قيمة للعدد b بحيث : $u_{2k} \equiv a[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b[7]$

(2) أ. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2} \equiv u_n[7]$

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي k ، $u_{2k} \equiv 2[7]$ ، ثم استنتج أن : $u_{2k+1} \equiv 3[7]$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$

أ. بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب. أحسب بدلالة n كلا من u_n و S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 03 : بكالوريا 2012 ت ر

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 11

2. ما هو باقي قسمة 2011^{2012} على 11 ؟

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(4 \times 9^{15n+1} + 4 \times 2011^{10n} + 2011^{2012})$ يقبل القسمة على 11

4. عيّن الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $(2011^{2012} + 2n + 2)$ مضاعفا للعدد 11.

التمرين 04 : بكالوريا 2012 ت ر

نسمي (S) المجلة التالية : $\begin{cases} x \equiv 3[15] \\ x \equiv 6[7] \end{cases}$ حيث x عدد صحيح ($x \in \mathbb{Z}$)

1. بيّن أنّ العدد 153 حل للجلمة (S)

2. إذا كان x_0 حلا لـ (S) ، بيّن أنّ (x حل لـ (S)) يكافئ $\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[15] \\ x - x_0 \equiv 0[7] \end{cases}$

3. حل الجلمة (S)

4. يُريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتاب بقي لديه 3 كتب ، و إذا استعمل علبا تتسع لـ 7 كتب بقي لديه 6 كتب. إذا علمت أنّ عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتاب ، ما هو عدد هذه الكتب ؟

التمرين 05 : بكالوريا 2011 ر

(u_n) متتالية حسابية متزايدة تماما حدودها أعداد طبيعية تحقق:

$$\begin{cases} m = \text{PPCM}(u_3, u_5) \\ d = \text{PGCD}(u_3, u_5) \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} u_4 = 15 \\ m + d = 42 \end{cases}$$

1. عيّن الحدين u_3 و u_5 ، ثم استنتج u_0

2. أكتب (u_n) بدلالة n ، ثم بيّن أنّ 2010 حد من حدود (u_n) و عيّن رتبته

3. عيّن الحد الذي ابتداءً منه يكون مجموع 5 حدود متعاقبة من (u_n) يساوي 10080

4. n عدد طبيعي غير معدوم.

أ- أحسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2n}$

ب- استنتج بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = u_0 + u_2 + u_4 + \dots + u_{2n}$

$S_2 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1}$

التمرين 06 : بكالوريا 2011 ر

1. نعتبر المعادلة : (E) $13x - 7y = -1$ حيث x و y عدنان صحيحان. حلّ المعادلة (E)

$$\begin{cases} a \equiv -1[7] \\ a \equiv 0[13] \end{cases} \quad \text{2. عيّن الأعداد الصحيحة النسبية } a \text{ بحيث :}$$

3. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على كل من 7 و 13

4. ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 9 كما يلي : $\alpha 00\beta 086$ حيث α و β عدنان طبيعيان ،

$\alpha \neq 0$. عيّن α و β حتى يكون b قابلا للقسمة على 91.

التمرين 07 : بكالوريا 2011 ت ر

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :

1. المعادلة $21x + 14y = 40$ لا تقبل حولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

2. في نظام التعداد ذي الأساس 7 يكون : $\overline{3421} + \overline{1562} = \overline{5413}$

3. باقي القسمة الإقليدية للعدد : $3^{2011} + \dots + 3^2 + 1$ على 7 هو : 6

التمرين 08 : بكالوريا 2011 ت ر

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

1. تحقّق أنّ : $4 \equiv -3[7]$ ، ثمّ بيّن أنّ : $A_3 \equiv 6[7]$
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n على 7
3. بيّن أنّه إذا كان n فرديا فإنّ : $A_n + 1$ يقبل القسمة على 7 و استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{2011} على 7
4. ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد A_{1432} على 7 ؟

التمرين 09 : بكالوريا 2010 ر

1. نعتبر المعادلة : (1) $7x + 65y = 2009$ ، حيث : x و y عدنان صحيحان.
أ- بيّن أنّه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإنّ y مضاعف للعدد 7
ب- حل المعادلة (1)
2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n على 9
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{6n} - 1$
أ- تحقّق أنّ u_n يقبل القسمة على 9
ب- حل المعادلة : (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567$ ذات المجهول (x, y) ، حيث : x و y عدنان صحيحان.
ت- عيّن الثنائية (x_0, y_0) حل المعادلة (2) حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيين مع $y_0 \geq 25$.

التمرين 10 : بكالوريا 2010 ر

1. برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{3n} - 1$ يقبل القسمة على 13
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، يقبل كل من العددين $3^{3n+1} - 3$ و $3^{3n+2} - 9$ القسمة على 13
3. عيّن حسب قيم n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^{3n} على 13 ، و استنتج باقي قسمة 2010^{2005} على 13
4. نضع من أجل كل عدد طبيعي p : $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p}$
أ. من أجل $p = 3n$ ، عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13
ب. برهن أنّه إذا كان $p = 3n + 1$ ، فإنّ A_p يقبل القسمة على 13
ج. عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد A_p على 13 من أجل $p = 3n + 2$
5. يكتب العدنان الطبيعيين a و b في نظام العد ذي الأساس 3 كما يلي :
 $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$
أ. تحقّق أنّ العددين الطبيعيين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري
ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين a و b على 13.

التمرين 11 : بكالوريا 2010 ت ر

- نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي : $n = \overline{11\alpha 00}$ حيث α عدد طبيعي
1. عيّن α حتى يكون n قابلا للقسمة على 3
 2. عيّن العدد α حتى يكون n قابلا للقسمة على 5. استنتج قيمة α حتى يكون n قابلا للقسمة على 15
 3. نأخذ $\alpha = 4$ ، أكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 12 : بكالوريا 2010 ت ر

1. عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 13
2. تحقّق أنّ : $(10^{2008})^2 + 10^{2008} + 1 \equiv 0[13]$
3. عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $10^{2n} + 10^n + 1 \equiv 0[13]$.

التمرين 13 : بكالوريا 2009 ر

- x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي. A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A = \overline{5566}$
1. أنشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ، ثمّ أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أنّ $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$
 - ب. أحسب x و y إذا علمت أنّ x عدد أولي أصغر من 12 ، ثمّ اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري
 2. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584
 - ب. عيّن الأعداد الطبيعية a و b حيث $a > b$ التي تحقق :

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$$

التمرين 14 : بكالوريا 2009 ت ر

1. أ. عيّن الأعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم 2009
 - ب. أحسب a و u_0
- u_0 و a عدنان طبيعيان غير معدومين ، (u_n) متتالية هندسية أساسها a و حدها الأول u_0 بحيث :
- $$u_1^2 + u_2 + 35a^2 = 2009$$
- ب. أحسب a و u_0
 2. نضع $a = 7$ و $u_0 = 2$ ، أحسب u_n بدلالة n
 3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - أ. عبّر عن S_n بدلالة n
 - ب. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = 800$

التمرين 15 : بكالوريا 2009 ت ر

1. حل المعادلة التفاضلية : $y' = (\ln 2)y$
 2. نسمي f الحل الخاص لهذه المعادلة الذي يحقق $f(0) = 1$ ، عيّن عبارة $f(x)$
 3. n عدد طبيعي.
- أ. أدرس بواقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد 2^n
 - ب. استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 للعدد $4 - f(2009)$
 - أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$
 - ب. عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7

التمرين 16 : بكالوريا 2008 ر

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $3x - 21y = 78$
1. أ. بيّن أنّ (E) تقبل حولا في \mathbb{Z}^2
 - ب. أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x, y) من \mathbb{Z}^2 حلا للمعادلة (E) فإنّ $x \equiv 5[7]$. استنتج حلول المعادلة (E)
 2. أ. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7
 - ب. عيّن الثنائيات (x, y) من \mathbb{N}^2 التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

التمرين 17 : بكالوريا 2008 ت ر

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1. a و b عددان طبيعيان حيث : $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$

أ. ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب. بيّن أنّ العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعفا للعدد 7

ج. عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$

2. نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p = 2n^2 - 7n - 15$ و $q = n^2 - 7n + 10$

أ. بيّن أنّ كل العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$

ب. عيّن تبعا لقيم n و بدلالة n ، $PGCD(p; q)$.

التمرين 18 : بكالوريا 2008 ت ر

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) $4x - 9y = 319 \dots \dots$

1. تأكد أنّ الثنائية (1, 82) حل للمعادلة (I)

أ. حل المعادلة (I)

2. عيّن الثنائيات (a, b) الصحيحة حلول المعادلة : (II) $4a^2 - 9b^2 = 319 \dots \dots$

3. استنتج الثنائيات (x_0, y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين 19 : بكالوريا 2007

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2 ، و نعتبر الأعداد الطبيعية : $a = 2n + 1$ ، $b = 4n + 3$ ، و $c = 2n + 3$

1. أثبت أنّ العددين a و b أوليان فيما بينهما و استنتج أنّ الأعداد a ، b ، و c أولية فيما بينها

2. عيّن تبعا لقيم العدد n قيمة القاسم المشترك الأكبر للعددين b و c

3. عيّن قيمة n بحيث يكون : $PGCD(b; c) = 7$ و $PPCM(b; c) = 1305$

4. أكتب العدد b^2 في نظام العد الذي أساسه a

5. نفرض أنّ $(a; b; c)$ هي إحداثيات نقطة ω في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

أ. بيّن أنّ النقطة ω تنتمي إلى مستقيم (Δ) يطلّب تعيينه

ب. أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المبدأ O و يحوي المستقيم (Δ) .

التمرين 20 : بكالوريا 2005

n عدد طبيعي ، و نعتبر العددين الطبيعيين : $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$

1. برهن أنّ $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; n)$

2. استنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha; \beta)$

3. a و b عددان طبيعيان يُكتبان في نظام العد الذي أساسه n على الشكل : $a = \overline{3520}$ و $b = \overline{384}$

أ. برهن أنّ العدد $3n + 2$ قاسم مشترك للعددين a و b

ب. استنتج تبعا لقيم n أنّ $PGCD(a; b)$ هو $3n + 2$ أو $2(3n + 2)$

ج. عيّن العددين α و β علما أنّ $PGCD(a; b) = 41$.

التمرين 21 : بكالوريا 2004

ليكن λ عددا صحيحا و نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $43x - 13y = \lambda \dots$

1. تحقق أنّ $(-3\lambda; -10\lambda)$ حل للمعادلة (1) و اعط مجموعة حلول هذه المعادلة

2. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 6 على الشكل : $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5

على الشكل $\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}$ ، حيث α و β و γ أعداد طبيعية

أ. تحقق أنّ $43\alpha - 13\beta = \gamma$

ب. عيّن الأعداد α و β و γ و اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 22 : بكالوريا 2003

1. α و β عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما و $\alpha > \beta$. عيّن α و β بحيث يكون : $\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$
2. (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 و أساسها q حيث u_0 و q عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما و $q > u_0$
أ. عيّن u_0 و q إذا علمت أنّ : $35u_0^2 + 19u_1 - u_0q^3 = 0$
ب. احسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
ج. عيّن قيم n بحيث يقبل العدد S_n القسمة على 30.

التمرين 23 : بكالوريا 2001

1. α و β عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما. عيّن α و β بحيث يكون : $\beta(\beta^3 - 1) = 28\alpha^2$
2. a, b, c, d, e أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية أساسها q
عيّن هذه الأعداد إذا علمت أن العددين a و q عدنان طبيعيين أوليان فيما بينهما و أنّ $28a^3 = e - b$.

التمرين 24 : بكالوريا 2001

1. عيّن $PGCD(225; 180)$
2. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $225x - 180y = 90$...
3. عيّن مجموعة الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (1) التي تحقق $|x - y + 1| < 2$
4. a و b عدنان طبيعيين يُكتبان في نظام عدّ أساسه α على الشكل : $a = \overline{52}$ و $b = \overline{252}$ و يُكتبان في نظام عدّ أساسه β على الشكل : $a = \overline{44}$ و $b = \overline{206}$. عيّن α و β ثمّ a و b .

التمرين 25 : بكالوريا 2000

1. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (1) $9x - 14y = 13$... (لاحظ أنّ (3;1) حلّ خاص)
2. نعتبر في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة (2) $45x - 28y = 130$...
أ. بيّن أنّه إذا كان $(x; y)$ حلا للمعادلة (2) فإنّ x مضاعف للعدد 2 و أنّ y مضاعف للعدد 5
ب. عيّن مجموعة حلول المعادلة (2)
3. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 9 على الشكل : $\overline{2\alpha\alpha3}$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $\overline{5\beta\beta6}$ ، حيث α و β عدنان طبيعيين
عيّن العددين α و β و اكتب العدد n في النظام العشري.

التمرين 26 : بكالوريا 1996

1. حل كلا من العددين 1995 و 105 إلى جداء عوامل أولية
2. α و β عدنان طبيعيين حيث $\alpha < \beta$. حل في المجموعة \mathbb{N}^2 المعادلة $\alpha\beta = 105$
3. a و b عدنان طبيعيين غير معدومين و غير أوليين فيما بينهما بحيث $a < b$.
عيّن a و b بحيث يكون : $95d + 19m = 1995$ حيث d هو $PGCD(a; b)$ و m هو $PPCM(a; b)$.
$$\begin{cases} 95d + 19m = 1995 \\ d < 7 \end{cases}$$

التمرين 27 : بكالوريا 1994

1. أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليمية للعدد 2^n على 10. استنتج رقم أحاد العدد 1994^{1414}
2. (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 2^n$
أ. تحقق أنّ (u_n) هندسية
ب. احسب بدلالة n العدد : $S_n = (5 + 2^1) + (5 + 2^2) + (5 + 2^3) + \dots + (5 + 2^n)$
ج. أوجد قيم العدد n بحيث يكون العدد S_n مضاعفا للعدد 10.

1. حل في المجموعة \mathbb{Z}^2 المعادلة $18x + 4y = 84$ و عيّن مجموعة الحلول $(x ; y)$ التي تحقق $xy > 0$.
2. n عدد طبيعي يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 5 على الشكل $30\alpha\beta\gamma$ و يُكتب في نظام العدّ الذي أساسه 7 على الشكل $55\alpha\beta$ ، حيث α و β و γ أعداد طبيعية عيّن الأعداد α و β و γ و اكتب العدد n في النظام العشري.



حلول تمارين القسمة و الـهوافقات

التمرين :01

1) $\sqrt{251} \approx 15,84$; بما أن العدد 251 لا يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 و 13 فهو إذن أولي

2) $2008 = 2^3 \times 251$; الأعداد الطبيعية التي مكعب كل منها يقسم 2008 هي 1 و 2

3) $m^3 + 35d^3 = 2008$; $a = da'$, $b = db'$; $PGCD(a', b') = 1$

$$m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$m^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow (da'b')^3 + 35d^3 = 2008 \Rightarrow d^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow d^3/2008 \Rightarrow d \in \{1,2\}$$

$$d = 1: (a'b')^3 + 35 = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 1973 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{1973} \approx 12,54$$
 مستحيل لأن a' و b' عدنان صحيحان

$$d = 2: 2^3[(a'b')^3 + 35] = 2008 \Rightarrow (a'b')^3 = 216 \Rightarrow a'b' = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$(a', b') \in \{(1,6); (6,1); (2,3); (3,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(2,12); (12,2); (4,6); (6,4)\}$$

التمرين :02

1) $5^0 \equiv 1[7]$; $5^1 \equiv 5[7]$; $5^2 \equiv 4[7]$; $5^3 \equiv 6[7]$; $5^4 \equiv 2[7]$; $5^5 \equiv 3[7]$; $5^6 \equiv 1[7]$

$$5^{6k} \equiv 1[7]$$
 ; $5^{6k+1} \equiv 5[7]$; $5^{6k+2} \equiv 4[7]$; $5^{6k+3} \equiv 6[7]$; $5^{6k+4} \equiv 2[7]$; $5^{6k+5} \equiv 3[7]$

2) $6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv 1[7]$

3) $5^n + 6^{2n} + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 1 + 3 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5^n \equiv 3[7] \Rightarrow n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$

التمرين :03

1) $4^0 \equiv 1[11]$; $4^1 \equiv 4[11]$; $4^2 \equiv 5[11]$; $4^3 \equiv 9[11]$; $4^4 \equiv 3[11]$; $4^5 \equiv 1[11]$

$$4^{5k} \equiv 1[11]$$
 ; $4^{5k+1} \equiv 4[11]$; $4^{5k+2} \equiv 5[11]$; $4^{5k+3} \equiv 9[11]$; $4^{5k+4} \equiv 3[11]$

2) $1995 \equiv 4[11] \Rightarrow 1995^n \equiv 4^n[11]$; $26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{10n+2}[11] \Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 4^{5(2n)+2}[11]$
 $\Rightarrow 26^{10n+2} \equiv 5[11]$

$$6 \times 1995^n + 26^{10n+2} + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 5 + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow 6 \times 4^n + 1 \equiv 0[11]$$

 $\Rightarrow 6 \times 4^n \equiv 10[11]$

n	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$	
$4^n \equiv$	1	4	5	9	3	[11]
$6 \times 4^n \equiv$	6	2	8	10	7	[11]

$$6 \times 4^n \equiv 10[11] \Rightarrow n = 5k + 3 ; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 04:

$$1) 5^0 \equiv 1[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^6 \equiv 1[7]$$

$$5^{6k} \equiv 1[7]; 5^{6k+1} \equiv 5[7]; 5^{6k+2} \equiv 4[7]; 5^{6k+3} \equiv 6[7]; 5^{6k+4} \equiv 2[7]; 5^{6k+5} \equiv 3[7]$$

$$2) 26 \equiv 5[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 5^{6n+5}[7] \Rightarrow 26^{6n+5} \equiv 3[7]$$

$$47 \equiv 5[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{12n+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 5^{6(2n)+2}[7] \Rightarrow 47^{12n+2} \equiv 4[7] \Rightarrow 2 \times 47^{12n+2} \equiv 1[7]$$

$$26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 3 + 1 + 3[7] \Rightarrow 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 3 \equiv 0[7]$$

$$3) 26^{6n+5} + 2 \times 47^{12n+2} + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 3 + 1 + 5n \equiv 0[7] \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0[7] \Rightarrow 5n \equiv 3[7]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$5n \equiv$	0	5	3	1	6	4	2	[7]

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2; k \in \mathbb{N}$$

طريقة ثانية: لَمَّا يكون معامل المجهول في الطرف الأول للمعادلة (5) أولياً مع التردد (7)، نضيف التردد إلى الطرف الثاني للمعادلة (3) حتى نحصل على عدد قابل للقسمة على معامل المجهول، فيكون حل المعادلة كالتالي:

$$5n \equiv 3[7] \Rightarrow 5n \equiv 10[7] \Rightarrow n \equiv 2[7] \Rightarrow n = 7k + 2; k \in \mathbb{N}$$

التمرين 05:

$$PGCD(a, b) = d \Rightarrow a = da'; b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$PGCD(a, b) = d; PPCM(a, b) = m \Rightarrow m \times d = a \times b \Rightarrow m = \frac{a \times b}{d} = \frac{da' \times db'}{d} = da'b'$$

$$1) \begin{cases} a + b = 420 \\ PGCD(a, b) = 84 \end{cases} \Rightarrow 84a' + 84b' = 420 \Rightarrow 84(a' + b') = 420 \Rightarrow a' + b' = 5$$

$$(a', b') \in \{(1,4); (4,1); (2,3); (3,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(84,336); (336,84); (168,252); (252,168)\}$$

$$2) \begin{cases} a \times b = 360 \\ PGCD(a, b) = 6 \end{cases} \Rightarrow 6a' \times 6b' = 360 \Rightarrow 36(a' \times b') = 360 \Rightarrow a' \times b' = 10$$

$$(a', b') \in \{(1,10); (10,1); (2,5); (5,2)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(6,60); (60,6); (12,30); (30,12)\}$$

$$3) \begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a, b) = 5 \end{cases} \Rightarrow (5a')^2 - (5b')^2 = 825 \Rightarrow 25(a'^2 - b'^2) = 825 \Rightarrow a'^2 - b'^2 = 33 \\ \Rightarrow (a' - b')(a' + b') = 33$$

$$\begin{cases} a' - b' = 1 \\ a' + b' = 33 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 34 \Rightarrow a' = 17 \Rightarrow b' = 16 \Rightarrow (a, b) = (85, 80) \dots \text{الحالة الأولى} \dots$$

$$\begin{cases} a' - b' = 3 \\ a' + b' = 11 \end{cases} \Rightarrow 2a' = 14 \Rightarrow a' = 7 \Rightarrow b' = 4 \Rightarrow (a, b) = (35, 20) \dots \text{الحالة الثانية} \dots$$

ملاحظة: الحالتان $\begin{cases} a' - b' = 11 \\ a' + b' = 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} a' - b' = 33 \\ a' + b' = 1 \end{cases}$ مرفوضتان لأن $a' + b' > a' - b'$

$$4) \begin{cases} PPCM(a, b) = 90 \\ PGCD(a, b) = 18 \end{cases}; m = da'b' \Rightarrow a' \times b' = \frac{m}{d} = \frac{90}{18} = 5$$

$$(a', b') \in \{(1,5); (5,1)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(18,90); (90,18)\}$$

$$5) PPCM(a, b) - 9PGCD(a, b) = 13 \Rightarrow m - 9d = 13 \Rightarrow da'b' - 9d = 13 \Rightarrow d(a'b' - 9) = 13 \Rightarrow d/13 \Rightarrow d \in \{1,13\}$$

$$d = 1: a'b' - 9 = 13 \Rightarrow a'b' = 22 \Rightarrow (a', b') \in \{(1,22); (2,11)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(1,22); (2,11)\}$$

$$d = 13: a'b' - 9 = 1 \Rightarrow a'b' = 10 \Rightarrow (a', b') \in \{(1,10); (2,5)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(13,130); (26,65)\}$$

التمرين :06

$$a = 5n^2 + 7; b = n^2 + 2; PGCD(a, b) = d$$

$$1) d/a, d/b \Rightarrow d/5b - a \Rightarrow d/5n^2 + 10 - 5n^2 - 7 \Rightarrow d/3$$

$$2) PGCD(a, b) = 3 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[3] \\ b \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n^2 + 7 \equiv 0[3] \\ n^2 + 2 \equiv 0[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 + 1 \equiv 0[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n^2 \equiv 2[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 1[3] \\ n^2 \equiv 1[3] \end{cases}$$

3)

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$n^2 \equiv$	0	1	1	[3]

$$n^2 \equiv 1[3] \Rightarrow n \equiv 1[3] \vee n \equiv 2[3]$$

$$n = 3k : PGCD(a, b) = 1; n = 3k + 1 \vee n = 3k + 2 : PGCD(a, b) = 3$$

التمرين :07

$$a = 2n + 3; b = 5n - 2; PGCD(a, b) = d$$

$$1) d/a, d/b \Rightarrow d/5a - 2b \Rightarrow d/10n + 15 - 10n + 4 \Rightarrow d/19 \Rightarrow d = 1 \vee d = 19$$

إذا كان العددان a و b غير أوليين فيما بينهما فإن $d \neq 1$ منه $d = 19$

$$2) PGCD(a, b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[19] \\ b \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 3 \equiv 0[19] \\ 5n - 2 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 16[19] \\ 5n \equiv 2[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ 5n \equiv 40[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 8[19] \\ n \equiv 8[19] \end{cases}$$

$$PGCD(a, b) = 19 \Rightarrow n = 19k + 8; k \in \mathbb{N}$$

التمرين :08

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1; b = 2n^2 + n$$

$$1) a = (2n + 1)(n^2 + 2n + 1); b = n(2n + 1) \Rightarrow b$$
 قاسم مشترك للعددين a و a

$$2) (n + 1) - (n) = 1 \Rightarrow PGCD(n, n + 1) = 1 \text{ (حسب نظرية بيزو)}$$

$$(n + 1)^2 - n(n + 2) = 1 \Rightarrow PGCD[n, (n + 1)^2] = 1 \text{ (حسب نظرية بيزو)}$$

$$3) PGCD(a, b) = (2n + 1)PGCD(n^2 + 2n + 1, n) = (2n + 1) \underbrace{PGCD[(n + 1)^2, n]}_1 = 2n + 1$$

التمرين 09:

$$A = n^4 + n^2 + 1$$

$$1) A = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 1 - n)(n^2 + 1 + n) = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

$$2) a = n^2 + n + 1; b = n^2 - n + 1$$

- $a = n(n + 1) + 1; b = n(n - 1) + 1$

بما أن جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي ، فإن العددين $n(n + 1)$ و $n(n - 1)$ زوجيان ، و منه يكون العددان a و b فرديين

- d/a و $d/b \Rightarrow d/a - b \Rightarrow d/2n; d/a$ و $d/b \Rightarrow d/a + b \Rightarrow d/2n^2 + 2 \Rightarrow d/2(n^2 + 1)$

- $n^2 + 1 - n(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n^2 + 1, n) = 1$ (حسب نظرية بيزو)

- d/a و $d/b \Rightarrow d/a - b$ و $d/a + b \Rightarrow d/PGCD(a - b, a + b) \Rightarrow d/PGCD(2n, 2(n^2 + 1))$

$$PGCD(2n, 2(n^2 + 1)) = 2 \times PGCD(n, n^2 + 1) = 2 \Rightarrow d/2 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$$

بما أن العددين a و b فرديان ، نستنتج أن $PGCD(a, b) = 1$ ، منه العددان أوليان فيما بينهما.

التمرين 10:

$$a = 11n + 3; b = 13n - 1$$

$$1) d/a$$
 و $d/b \Rightarrow d/13a - 11b \Rightarrow d/50$

$$2) 50x - 11y = 1$$

$$50 = 11(4) + 6 \Rightarrow 6 = 50 - 11(4)$$

$$11 = 6 + 5 \Rightarrow 5 = 11 - 6$$

$$6 = 5 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5$$

$$1 = 6 - 5 = 6 - (11 - 6) = 2(6) - 11 = 2[50 - 11(4)] - 11 = 50(2) - 11(9) \Rightarrow (x_0, y_0) = (2, 9)$$

$$50(2) - 11(9) = 1 \Rightarrow 50(6) - 11(27) = 3$$

$$\begin{cases} 50x - 11y = 3 \\ 50(6) - 11(27) = 3 \end{cases} \Rightarrow 50(x - 6) - 11(y - 27) = 0 \Rightarrow 50(x - 6) = 11(y - 27)$$

$$\begin{cases} 11/50(x - 6) \\ PGCD(11, 50) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11/(x - 6) \Rightarrow x - 6 = 11k \Rightarrow x = 11k + 6; k \in \mathbb{Z}$$

$$50(x - 6) = 11(y - 27) \Rightarrow 50(11k) = 11(y - 27) \Rightarrow y - 27 = 50k \Rightarrow y = 50k + 27; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(11k + 6; 50k + 27)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$3) PGCD(a, b) = 50 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[50] \\ b \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[50] \\ 13n - 1 \equiv 0[50] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 47[50] \\ 13n \equiv 1[50] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 27[50]$$

$$\Rightarrow n = 50k + 27 ; k \in \mathbb{N}$$

$$4) PGCD(a, b) = 25 \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0[25] \\ b \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n + 3 \equiv 0[25] \\ 13n - 1 \equiv 0[25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n \equiv 22[25] \\ 13n \equiv 1[25] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[25]$$

$$\Rightarrow n = 25k + 2 ; k \in \mathbb{N} \text{ (زوجي } k \text{)}$$

التمرين 11:

$$324x - 245y = 7 \dots (E)$$

$$1) 324 = 245 + 79 \Rightarrow 79 = 324 - 245$$

$$245 = 79(3) + 8 \Rightarrow 8 = 245 - 79(3)$$

$$79 = 8(9) + 7 \Rightarrow 7 = 79 - 8(9)$$

$$7 = 79 - 8(9) = 79 - 9[245 - 79(3)] = 245(-9) + 79(28) = 245(-9) + 28[324 - 245]$$

$$7 = 324(28) - 245(37) \Rightarrow (x_0, y_0) = (28, 37)$$

$$\begin{cases} 324x - 245y = 7 \\ 324(28) - 245(37) = 7 \end{cases} \Rightarrow 324(x - 28) - 245(y - 37) = 0 \Rightarrow 324(x - 28) = 245(y - 37)$$

$$\begin{cases} 245/324(x - 28) \\ PGCD(245, 324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 245/(x - 28) \Rightarrow x - 28 = 245k \Rightarrow x = 245k + 28 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$324(x - 28) = 245(y - 37) \Rightarrow 324(245k) = 245(y - 37) \Rightarrow y - 37 = 324k \Rightarrow y = 324k + 37 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(245k + 28, 324k + 37)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 324x - 245y = 7 \Rightarrow 324x = 245y + 7 \Rightarrow 324x = 7(35y + 1)$$

$$\begin{cases} 7/324x \\ PGCD(7, 324) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7/x \Rightarrow x \equiv 0[7]$$

$$3) PGCD(x, y) = d$$

- $d \mid x \text{ , } d \mid y \Rightarrow d \mid 324x - 245y \Rightarrow d \mid 7 \Rightarrow d = 1 \vee d = 7$

- $d = 7 \Rightarrow y \equiv 0[7] \Rightarrow 324k + 37 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k + 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 2k \equiv 5[7] \Rightarrow k \equiv 6[7]$

$$\Rightarrow k = 7k' + 6 \Rightarrow x = 245(7k' + 6) + 28 = 1715k' + 1498 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$y = 324(7k' + 6) + 37 = 2268k' + 1981 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(1715k' + 1498, 2268k' + 1981)\} ; k' \in \mathbb{Z}$$

التمرين 12:

$$1) 1996 = 2^2 \times 499 ; 1497 = 3 \times 499 ; 2994 = 2 \times 3 \times 499 \Rightarrow PGCD(1996, 1497, 2994) = 499$$

$$2) 1996x - 1497y = 2994 \dots (1)$$

$$\bullet (1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 4x = 3y + 6 \Rightarrow 4x = 3(y + 2) ; \begin{cases} 3/4x \\ PGCD(3,4) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3/x \Rightarrow x \equiv 0[3]$$

$$(1) \Rightarrow 4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 \Rightarrow 3y = 2(2x - 3) ; \begin{cases} 2/3y \\ PGCD(2,3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2/y \Rightarrow y \equiv 0[2]$$

$$\bullet 4x - 3y = 6 \Rightarrow 3y = 4x - 6 = 4(3k) - 6 = 12k - 6 = 3(4k - 2) \Rightarrow y = 4k - 2$$

$$S = \{(3k; 4k - 2)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet xy = 1950 \Rightarrow 3k(4k - 2) = 1950 ; 12k^2 - 6k - 1950 = 0 ; \Delta' = 9 + 12(1950) = 23409$$

$$k' = \frac{3 - 153}{12} = -12,5 \text{ (مرفوضة)} ; k'' = \frac{3 + 153}{12} = 13 ; (x; y) = (39; 50)$$

التمرين 13:

$$1) 4x - 9y = 19 \Rightarrow 4x = 9y + 19 \Rightarrow 9y + 19 \equiv 0[4] \Rightarrow y + 3 \equiv 0[4] \Rightarrow y \equiv 1[4] \Rightarrow y = 4k + 1$$

$$4x = 9(4k + 1) + 19 = 36k + 28 = 4(9k + 7) \Rightarrow x = 9k + 7 \Rightarrow S = \{(9k + 7; 4k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) d \mid x \text{ و } d \mid y \Rightarrow d \mid 4x - 9y \Rightarrow d \mid 19 \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 19$$

$$d = 19 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[19] \\ y \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k + 7 \equiv 0[19] \\ 4k + 1 \equiv 0[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9k \equiv 12[19] \\ 4k \equiv 18[19] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \equiv 14[19] \\ k \equiv 14[19] \end{cases} \Rightarrow k = 19k' + 14$$

$$x = 9(19k' + 14) + 7 = 171k' + 133 ; y = 4(19k' + 14) + 1 = 76k' + 57 ; k' \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(171k' + 133 ; 76k' + 57)\}; k' \in \mathbb{Z}$$

$$3) 4a^2 - 9b^2 = 19 \Rightarrow (2a - 3b)(2a + 3b) = 19$$

نلاحظ أنه إذا كانت الثنائية $(a; b)$ حلاً للمعادلة ، فكل ذلك الثنائيات $(-a; b)$ ، $(a; -b)$ ، و $(-a; -b)$ ، لذا سنبحث عن الثنائية الموجبة فقط ، و بالتالي يكون $(2a - 3b) < (2a + 3b)$

$$(2a - 3b)(2a + 3b) = 19 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 19 \end{cases} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow a = 5 ; b = 3$$

$$S = \{(5; 3) ; (-5; 3) ; (5; -3) ; (-5; -3)\}$$

التمرين 14:

$$1) 5x - 3y = 2 \Rightarrow 5x - 2 = 3y \Rightarrow 5x - 2 \equiv 0[3] \Rightarrow 2x \equiv 2[3] \Rightarrow x \equiv 1[3] \Rightarrow x = 3k + 1$$

$$3y = 5x - 2 \Rightarrow 3y = 5(3k + 1) - 2 = 15k + 3 = 3(5k + 1) \Rightarrow y = 5k + 1$$

$$S = \{(3k + 1; 5k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} A = \overline{55}_x \\ A = \overline{37}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 5 + 5x \\ A = 7 + 3y \end{cases} \Rightarrow 5x + 5 = 3y + 7 \Rightarrow 5x - 3y = 2 \Rightarrow (x; y) = (3k + 1; 5k + 1)$$

$$\begin{cases} 5 < x \leq 12 \\ 7 < y \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 < 3k + 1 \leq 12 \\ 7 < 5k + 1 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 < 3k \leq 11 \\ 6 < 5k \leq 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < k \leq \frac{11}{3} \\ \frac{6}{5} < k \leq \frac{19}{5} \end{cases} \Rightarrow k = 2 \text{ أو } k = 3$$

- $k = 2 \Rightarrow (x; y) = (7; 11) \Rightarrow A = 5(7) + 5 = 40$
- $k = 3 \Rightarrow (x; y) = (10; 16) \Rightarrow A = 5(10) + 5 = 55$

التمرين 15:

1) $8x - 5y = 3$

$$8(1) - 5(1) = 3 \Rightarrow 8(x - 1) - 5(y - 1) = 0 \Rightarrow 8(x - 1) = 5(y - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{5}{8}(x - 1) \\ \text{PGCD}(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 5k \Rightarrow x = 5k + 1$$

$$8(x - 1) = 5(y - 1) \Rightarrow 8(5k) = 5(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 8k \Rightarrow y = 8k + 1$$

$$S = \{(5k + 1; 8k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$$

2) $m = 8p + 1 = 5q + 4 \Rightarrow 8p - 5q = 3 \Rightarrow (p; q) \in S$

$$m = 8p + 1 = 8(5k + 1) + 1 = 40k + 9 \Rightarrow m \equiv 9[40]$$

$$m > 2000 \Rightarrow 40k + 9 > 2000 \Rightarrow 40k > 1991 \Rightarrow k > \frac{1991}{40} \Rightarrow k > 49,775 \Rightarrow k = 50 \Rightarrow m = 2009$$

3) $2^{3k} = (2^3)^k = 8^k; 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^k \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1[7]$

$$2^{2009} = 2^2 \times 2^{2007} = 4 \times 2^{3(669)} \Rightarrow 2^{2009} \equiv 4[7]$$

4) $N = \overline{a00b} = 10^3a + b$

$$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 3^3[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27[7] \Rightarrow 10^3 \equiv 27 - 28[7] \Rightarrow 10^3 \equiv -1[7]$$

$$10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow 10^3a + b \equiv -a + b[7] \Rightarrow N \equiv -a + b[7]$$

$$N \equiv 0[7] \Rightarrow -a + b \equiv 0[7] \Rightarrow a \equiv b[7]$$

$$(a, b) \in \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6); (7,7); (8,8); (9,9); (7,0); (1,8); (8,1); (2,9); (9,2)\}$$

$$N \in \{1001; 2002; 3003; 4004; 5005; 6006; 7007; 8008; 9009; 7000; 1008; 8001; 2009; 9002\}$$

التمرين 16:

1) $x^2 + x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 + x + 3 - 5x \equiv 0[5] \Rightarrow x^2 - 4x + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow (x - 1)(x - 3) \equiv 0[5]$

$$\Rightarrow x \equiv 1[5] \text{ أو } x \equiv 3[5] \text{ (الجواب د)}$$

2) $24x + 34y = 2; 24(17k - 7) + 34(5 - 12k) = 408k - 168 + 170 - 408k = 2$ (الجواب أ)

$$3) N = \overline{421}_5 = 1 + (2 \times 5) + (4 \times 5^2) = 111 = 18 \times 6 + 3 = (3 \times 6^2) + 3 = \overline{303}_6 \text{ (الجواب ج)}$$

$$4) 1432 \equiv 1[3] \Rightarrow 1432^{2011} \equiv 1[3] \text{ (الجواب ب)}$$

$$5) a = n(n+2); b = n+1; b^2 - a = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1 \text{ (بيزو) (الجواب ج)}$$

التمرين 17 :

$$1) PGCD(a+b; ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 | a+b \\ p^2 | ab \end{cases} \Rightarrow p^2 | a(a+b) - ab \Rightarrow p^2 | a^2 \Rightarrow p | a^2 \Rightarrow p | a \text{ (لأن } p \text{ أولي)}$$

$$PGCD(a+b; ab) = p^2 \Rightarrow \begin{cases} p^2 | a+b \\ p^2 | ab \end{cases} \Rightarrow p^2 | b(a+b) - ab \Rightarrow p^2 | b^2 \Rightarrow p | b^2 \Rightarrow p | b \text{ (لأن } p \text{ أولي)}$$

$$PGCD(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | a+b \\ d | ab \end{cases} \Rightarrow d | p^2 \Rightarrow d \in \{1, p, p^2\}$$

بما أن p يقسم a و b يقسم b و هو يختلف عن 1 لأنه أولي ، إذن $PGCD(a, b) \neq 1$ ، منه $PGCD(a, b) = p$ أو $PGCD(a, b) = p^2$

$$2) \begin{cases} p^2 = 49 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ m = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 7 \\ m = 231 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} d = 49 \\ m = 231 \end{cases} \text{ (مرفوض لأن 49 لا يقسم 231)} \Rightarrow d = 7$$

$$d = 7 \Rightarrow a = 7a'; b = 7b'; PGCD(a', b') = 1$$

$$m = 231 \Rightarrow d \cdot a' \cdot b' = 231 \Rightarrow a' \cdot b' = 33 \Rightarrow (a', b') \in \{(1,33); (33,1); (3,11); (11,3)\}$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \{(7,231); (231,7); (21,77); (77,21)\}$$

التمرين 18 :

$$a_n = 4 \times 10^n - 1, b_n = 2 \times 10^n - 1, c_n = 2 \times 10^n + 10$$

$$1) b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999; c_3 = 2 \times 10^3 + 10 = 2010$$

$$\bullet 10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]; 4 \equiv 1[3] \Rightarrow 4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3] \Rightarrow a_n \equiv 0[3]$$

$$10 \equiv 1[3] \Rightarrow 10^n \equiv 1[3]; 2 \equiv -1[3] \Rightarrow 2 \times 10^n + 10 \equiv 0[3] \Rightarrow c_n \equiv 0[3]$$

$$\sqrt{1999} \approx 44,7$$

بما أن العدد 1999 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد التالية $\{1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43\}$ فهو إذن أولي.

$$\bullet b_n \times (c_n - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 10 - 9) = (2 \times 10^n - 1)(2 \times 10^n + 1)$$

$$= 4 \times 10^{2n} - 1 = a_{2n}$$

$$a_6 = a_{2(3)} = b_3 \times (c_3 - 9) = 1999 \times 2001 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$$

$$c_n = b_n + 11 \Rightarrow PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 11)$$

$$d = PGCD(b_n, c_n) \Rightarrow d = PGCD(b_n, 11) \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 11$$

بما أن العدد b_3 أولي ، إذن $d \neq 11$ منه $d = 1$

$$2) 1999x + 2010y = 1 \dots (E)$$

بما أن العدد 1999 أولي ، فإن $PGCD(1999,2010) = 1$ ، منه المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في \mathbb{Z}^2

$$\begin{cases} 1999x + 2010y = 1 \\ 1999(-731) + 2010(727) = 1 \end{cases} \Rightarrow 1999(x + 731) + 2010(y - 727) = 0 \Rightarrow 1999(x + 731) = 2010(-y + 727)$$

$$\begin{cases} 2010 \mid 1999(x + 731) \\ PGCD(1999,2010) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2010 \mid (x + 731) \Rightarrow x + 731 = 2010k \Rightarrow x = 2010k - 731$$

$$1999(2010k) = 2010(-y + 727) \Rightarrow -y + 727 = 1999k \Rightarrow y = -1999k + 727$$

$$S = \{(2010k - 731; -1999k + 727)\}; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 19 :

$$1) n^2 + 5n + 4 = (n + 1)(n + 4) \Rightarrow (n + 1) \text{ يقبل القسمة على } (n^2 + 5n + 4)$$

$$n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2) \Rightarrow (n + 1) \text{ يقبل القسمة على } (n^2 + 3n + 2)$$

$$2) 3n^2 + 15n + 19 = (n + 1)(3n + 12) + 7; (n + 1) \mid (3n^2 + 15n + 19) \Rightarrow (n + 1) \mid 7 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$$

$$3) n^2 + 3n + 2 \mid 3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n + 1 \mid 3n^2 + 15n + 19 \Rightarrow n = 0 \vee n = 6$$

- $n = 0 : 2/19$ (مستحيل)
- $n = 6 : 56/217$ (مستحيل)

نستنتج إذا أن العدد $3n^2 + 15n + 19$ لا يقبل القسمة على العدد $n^2 + 3n + 2$

التمرين 20 :

$$1) 584 = 2^3 \times 73 \Rightarrow 2 \text{ و } 1 \text{ هي } 584 \text{ تقسم مربعاتها}$$

$$2) PGCD(a, b) = d; a = da'; b = db'; PGCD(a', b') = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases}; d^2 \mid 584 \Rightarrow d = 1 \vee d = 2$$

- $d = 1 : \begin{cases} a' + b' = 32 \\ a'^2 + b'^2 = 584 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 32 - a' \\ a'^2 + (32 - a')^2 = 584 \end{cases}$

$$a'^2 + (32 - a')^2 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 1024 = 584 \Rightarrow 2a'^2 - 64a' + 440 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 32a' + 220 = 0; \Delta' = 36; a' = 10 \vee a' = 22$$

$$(a', b') \in \{(10, 22); (22, 10)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(10, 22); (22, 10)\}$$

- $d = 2 : \begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b' = 16 - a' \\ a'^2 + (16 - a')^2 = 146 \end{cases}$

$$a'^2 + (16 - a')^2 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 256 = 146 \Rightarrow 2a'^2 - 32a' + 110 = 0$$

$$\Rightarrow a'^2 - 16a' + 55 = 0; \Delta' = 9; a' = 5 \vee a' = 11$$

$$(a', b') \in \{(5, 11); (11, 5)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(10, 22); (22, 10)\}$$

التمرين 21 :

1) $3^0 \equiv 1[10]$; $3^1 \equiv 3[10]$; $3^2 \equiv 9[10]$; $3^3 \equiv 7[10]$; $3^4 \equiv 1[10]$

$$3^{4k} \equiv 1[10] ; 3^{4k+1} \equiv 3[10] ; 3^{4k+2} \equiv 9[10] ; 3^{4k+3} \equiv 7[10]$$

2) $63 \equiv 3[10]$; $9 \equiv -1[10] \Rightarrow 9^{2002} \equiv 1[10]$; $7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 3^{4(355)+2}[10] \Rightarrow 7^{1422} \equiv 9[10]$

$$\underbrace{63}_{\equiv 3[10]} \times \underbrace{9^{2002}}_{\equiv 1[10]} - \underbrace{7^{1422}}_{\equiv 9[10]} \equiv -6[10] \Rightarrow 63 \times 9^{2002} - 7^{1422} \equiv 4[10]$$

3) $3n \times 9^n = 3n \times 3^{2n} = 3^{2n+1} \times n$; $7 \equiv -3[10] \Rightarrow 7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$

$$3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n+1} \times n - 3^{2n+1}[10] \Rightarrow 3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (n-1) \times 3^{2n+1}[10]$$

4) $3n \times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10] \Rightarrow (n-1) \times 3^{2n+1} \equiv 0[10]$

بما أن العدد $2n+1$ فردي ، فإن $3^{2n+1} \equiv 3[10]$ أو $3^{2n+1} \equiv 7[10]$ ، نستنتج أن الموافقة السابقة تتحقق لما $(n-1) \equiv 0[10]$ أي $n \equiv 1[10]$

التمرين 22 :

1) $4^0 \equiv 1[11]$; $4^1 \equiv 4[11]$; $4^2 \equiv 5[11]$; $4^3 \equiv 9[11]$; $4^4 \equiv 3[11]$; $4^5 \equiv 1[11]$

$$4^{5k} \equiv 1[11] ; 4^{5k+1} \equiv 4[11] ; 4^{5k+2} \equiv 5[11] ; 4^{5k+3} \equiv 9[11] ; 4^{5k+4} \equiv 3[11]$$

2) $15 \equiv 4[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4^{5n+1}[11] \Rightarrow 15^{5n+1} \equiv 4[11]$

$$26 \equiv 4[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11] \Rightarrow 26^{5n+2} \equiv 5[11] \Rightarrow 2 \times 26^{5n+2} \equiv 10[11]$$

$$125 \equiv 4[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11] \Rightarrow 125^{5n+3} \equiv 9[11] \Rightarrow 3 \times 125^{5n+3} \equiv 5[11]$$

$$k = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1 \Rightarrow k \equiv 4 - 10 + 5 + 1[11] \Rightarrow k \equiv 0[11]$$

3) $15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 4 + 5 + 3n \equiv 0[11] \Rightarrow 3n + 9 \equiv 0[11] \Rightarrow 3n \equiv 2[11]$

$$\Rightarrow 3n \equiv 24[11] \Rightarrow n \equiv 8[11] \Rightarrow n = 11k + 8$$

$$8 \leq n \leq 50 \Rightarrow 8 \leq 11k + 8 \leq 50 \Rightarrow 0 \leq 11k \leq 42 \Rightarrow 0 \leq k \leq 3,8 \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{8; 19; 30; 41\}$$

التمرين 23 :

1) $2688 = 2^7 \times 3 \times 7$; $3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$; $PGCD(2688; 3024) = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$

2) أ) $2688x + 3024y = -3360 \dots (1) \Rightarrow 8x + 9y = -10 \dots (2)$ (بعد القسمة على 336)

ب) $8(1) + 9(-2) = -10 \Rightarrow (2)$ الثنائية $(1; -2)$ حل خاص للمعادلة

3) $(P) : x + 2y - z = -2$; $(P') : 3x - y + 5z = 0$

أ. $\vec{n}(1; 2; -1)$; $\vec{n}'(3; -1; 5)$; $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \Rightarrow \vec{n} \nparallel \vec{n}' \Rightarrow (P) \cap (P') = (d)$

ب. $M(x; y; z) \in (d) \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 9y = -10$

نستنتج أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)

$$\begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8(1) + 9(-2) = -10 \end{cases} \Rightarrow 8(x-1) + 9(y+2) = 0 \Rightarrow 8(x-1) = 9(-y-2)$$

$$\begin{cases} 9/8(x-1) \\ PGCD(8;9) = 1 \end{cases} \Rightarrow 9/(x-1) \Rightarrow x-1 = 9k \Rightarrow x = 9k + 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$8(9k) = 9(-y-2) \Rightarrow -y-2 = 8k \Rightarrow y = -8k - 2; k \in \mathbb{Z}$$

نستنتج أن مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي $(E) = \{M(9k + 1; -8k - 2; z)\}$ حيث $(k; z) \in \mathbb{Z}^2$

التمرين 24 :

$$1) PGCD(a; b) = d; PGCD(x; y) = d'$$

$$\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a + 3b \\ d/3a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases} \Rightarrow d/d'$$

$$\begin{cases} d'/x \\ d'/y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/2a + 3b \\ d'/3a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/3(2a + 3b) - 2(3a + 4b) \\ d'/3(3a + 4b) - 4(2a + 3b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'/a \\ d'/b \end{cases} \Rightarrow d'/d$$

$$d/d' \text{ و } d'/d \Rightarrow d = d'$$

$$d = 1 \Rightarrow d' = 1$$

$$2) x = 2\alpha + 3\beta; y = 3\alpha + 4\beta; PGCD(x; y) = PGCD(\alpha; \beta) = 5; x = 5x'; y = 5y'; PGCD(x'; y') = 1$$

$$\begin{cases} xy = 2200 \\ d = 5 \end{cases} \Rightarrow 25x'y' = 2200 \Rightarrow x'y' = 88 \Rightarrow (x', y') \in \{(1, 88); (8, 11)\}$$

$$\Rightarrow (x, y) \in \{(5, 440); (40, 55)\}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ 3\alpha + 4\beta = 440 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1300 \\ \beta = -865 \end{cases} \text{ (مرفوض لأن العدد } \beta \text{ طبيعي)}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 40 \\ 3\alpha + 4\beta = 55 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 10 \end{cases} \Rightarrow (\alpha; \beta) = (5; 10)$$

التمرين 25 :

$$1) a = \overline{2310}_n = 2n^3 + 3n^2 + n; b = \overline{252}_n = 2n^2 + 5n + 2$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = (2n + 1)(n^2 + n) \Rightarrow (2n + 1)/a$$

$$2n^2 + 5n + 2 = (2n + 1)(n + 2) \Rightarrow (2n + 1)/b$$

$$d = PGCD(a; b) = (2n + 1) \times \underbrace{PGCD(n^2 + n; n + 2)}_{d'}$$

$$n^2 + n = (n + 2)(n - 1) + 2 \Rightarrow d' = PGCD(n + 2; 2) \Rightarrow d' = 1 \vee d' = 2$$

$$d = (2n + 1) \times d' \Rightarrow d = 2n + 1 \vee d = 2(2n + 1)$$

$$2) n = 6 : a = 546; b = 104; d = 26$$

نلاحظ أنَّ الثنائية $(-1; 5)$ حل خاص للمعادلة $21x + 4y = -1$; $ax + by = -26 \Rightarrow 546x + 104y = -26 \Rightarrow 21x + 4y = -1$

$$\begin{cases} 21x + 4y = -1 \\ 21(-1) + 4(5) = -1 \end{cases} \Rightarrow 21(x + 1) + 4(y - 5) = 0 \Rightarrow 21(x + 1) = 4(-y + 5)$$

$$\begin{cases} 4/21(x + 1) \\ PGCD(4; 21) = 1 \end{cases} \Rightarrow 4/(x + 1) \Rightarrow x + 1 = 4k \Rightarrow x = 4k - 1; k \in \mathbb{Z}$$

$$21(4k) = 4(-y + 5) \Rightarrow -y + 5 = 21k \Rightarrow y = -21k + 5; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(4k - 1; -21k + 5)\}; k \in \mathbb{Z}$$

التمرين 26 :

1)

أ. $6^{10} = (6^2)^5 = 36^5$; $36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^5 \equiv 3^5[11]$; $3^5 = 243 \Rightarrow 3^5 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{10} \equiv 1[11]$

ب. $6 \equiv 1[5] \Rightarrow 6^4 \equiv 1[5]$

ج. $6^{10} \equiv 1[11] \Rightarrow (6^{10})^4 \equiv 1[11] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[11]$; $6^4 \equiv 1[5] \Rightarrow (6^4)^{10} \equiv 1[5] \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[5]$

د. $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1[11] \\ 6^{40} \equiv 1[5] \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1[55] \Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0[55] \text{ (PGCD(11,5) = 1)}$

2)

أ. $65x - 40y = 1 \dots (E)$; $PGCD(65,40) = 5$; 5 لا يقسم 1 ; $S = \emptyset$

ب. $17x - 40y = 1 \dots (E')$; $PGCD(17,40) = 1$; المعادلة تقبل على الأقل حلا

ج. $40 = 17 \times 2 + 6$; $6 = 40 - 17 \times 2$

$$17 = 6 \times 2 + 5$$
 ; $5 = 17 - 6 \times 2$

$$6 = 5 + 1$$
 ; $1 = 6 - 5$

$$1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 6 \times 2) = 17(-1) + 6(3) = 17(-1) + 3(40 - 17 \times 2)$$

$$= 17(-7) - 40(-3) \Rightarrow (x_0, y_0) = (-7, -3)$$

د. $\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x + 7) - 40(y + 3) = 0 \Rightarrow 17(x + 7) = 40(y + 3)$

$$\begin{cases} 40/17(x + 7) \\ PGCD(40; 17) = 1 \end{cases} \Rightarrow 40/(x + 7) \Rightarrow x + 7 = 40k \Rightarrow x = 40k - 7; k \in \mathbb{Z}$$

$$17(40k) = 40(y + 3) \Rightarrow y + 3 = 17k \Rightarrow y = 17k - 3; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(40k - 7; 17k - 3)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$17x_0 \equiv 1[40] \Rightarrow 17x_0 = 40\alpha + 1 \Rightarrow 17x_0 - 40\alpha = 1 \Rightarrow x_0 = 40k - 7$$

$$0 \leq x_0 \leq 40 \Rightarrow 0 \leq 40k - 7 \leq 40 \Rightarrow 7 \leq 40k \leq 47 \Rightarrow 0,175 \leq k \leq 1,175 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x_0 = 33$$

3) $\begin{cases} a^{17} \equiv b[55] \\ a^{40} \equiv 1[55] \end{cases} \Rightarrow b^{33} \equiv (a^{17})^{33}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{561}[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a^{560} \times a[55]$

$$\Rightarrow b^{33} \equiv (a^{40})^{14} \times a[55] \Rightarrow b^{33} \equiv a[55]$$

التمرين 27 :

1) $3^0 \equiv 1[11]$; $3^1 \equiv 3[11]$; $3^2 \equiv 9[11]$; $3^3 \equiv 5[11]$; $3^4 \equiv 4[11]$; $3^5 \equiv 1[11]$

$$3^{5k} \equiv 1[11]$$
 ; $3^{5k+1} \equiv 3[11]$; $3^{5k+2} \equiv 9[11]$; $3^{5k+3} \equiv 5[11]$; $3^{5k+4} \equiv 4[11]$

$$2) 69 \equiv 3[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{10n+6}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3^{5(2n+1)+1}[11] \Rightarrow 69^{10n+6} \equiv 3[11]$$

$$\Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} \equiv 1[11]$$

$$58 \equiv 3[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{20n+13}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 3^{5(4n+2)+3}[11] \Rightarrow 58^{20n+13} \equiv 5[11]$$

$$\Rightarrow 7 \times 58^{20n+13} \equiv 2[11]$$

$$4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 1 + 2 - 8[11] \Rightarrow 4 \times 69^{10n+6} + 7 \times 58^{20n+13} - 8 \equiv 6[11]$$

$$3) 36 \equiv 3[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 3^{5n}[11] \Rightarrow 36^{5n} \equiv 1[11] \Rightarrow 36^{5n} \times n \equiv n[11]$$

$$14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 3^{5n+3}[11] \Rightarrow 14^{5n+3} \equiv 5[11]$$

$$n^2 + 36^{5n} \times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11] \Rightarrow n^2 + n + 10 \equiv 0[11]$$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	[11]
$n^2 \equiv$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1	[11]
$n^2 + n + 10 \equiv$	10	1	5	0	8	7	8	0	5	1	10	[11]

$$n^2 + n + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow n \equiv 3[11] \text{ و } n \equiv 7[11] \Rightarrow n = 11k + 3 \text{ و } n = 11k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$4) 80 \equiv 3[11] \Rightarrow 80^{3n+2} \equiv 3^{3n+2}[11] ; 91 \equiv 3[11] \Rightarrow 91^{3n+1} \equiv 3^{3n+1}[11]$$

$$80^{3n+2} \times \beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+2} \times \beta + 3^{3n+1} \equiv 0[11] \Rightarrow 3^{3n+1}(3\beta + 1) \equiv 0[11]$$

$$\Rightarrow 3\beta + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow 3\beta \equiv 10[11] \Rightarrow \beta \equiv 7[11] \Rightarrow \beta = 11k + 7 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$|\beta| \leq 20 \Rightarrow -20 \leq \beta \leq 20 \Rightarrow -20 \leq 11k + 7 \leq 20 \Rightarrow -27 \leq 11k \leq 13 \Rightarrow -2,45 \leq k \leq 1,18$$

$$\Rightarrow k \in \{-2; -1; 0; 1\} \Rightarrow \beta \in \{-15; -4; 7; 18\}$$

$$5) 14 \equiv 3[11] \Rightarrow 14^x \equiv 3^x[11] ; 25 \equiv 3[11] \Rightarrow 25^y \equiv 3^y[11]$$

	$x =$	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
$y =$	$3^x \equiv$	1	3	9	5	4
	$3^y \equiv$	1	3	9	5	4
$5k'$	1	2	4	10	6	5
$5k' + 1$	3	4	6	1	8	7
$5k' + 2$	9	10	1	7	3	2
$5k' + 3$	5	6	8	3	10	9
$5k' + 4$	4	5	1	2	9	8

$$3^x + 3^y \equiv 8[11] \Rightarrow (x, y) \in \{(5k + 1; 5k' + 3), (5k + 3; 5k' + 1), (5k + 4; 5k' + 4)\} ; (k, k') \in \mathbb{N}^2$$

التمرين 28 :

$$1) \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow 3(x - 1) - 2(y - 1) = 0 \Rightarrow 3(x - 1) = 2(y - 1)$$

$$\begin{cases} 2/3(x - 1) \\ PGCD(2; 3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 2/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 2k \Rightarrow x = 2k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$3(2k) = 2(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 3k \Rightarrow y = 3k + 1 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(2k + 1; 3k + 1)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

2)

أ. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 42n + 9 - 42n - 8 = 1 \Rightarrow (14n + 3; 21n + 4) \in S$

ب. $3(14n + 3) - 2(21n + 4) = 1 \Rightarrow PGCD(14n + 3; 21n + 4) = 1$ (بيزو)

3) $d = PGCD(2n + 1; 21n + 4)$

أ. $\begin{cases} d \mid 2n + 1 \\ d \mid 21n + 4 \end{cases} \Rightarrow d \mid 21(2n + 1) - 2(21n + 4) \Rightarrow d \mid 13 \Rightarrow d = 1 \text{ أو } d = 13$

ب. $d = 13 \Rightarrow \begin{cases} 2n + 1 \equiv 0[13] \\ 21n + 4 \equiv 0[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 9[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n \equiv 12[13] \\ 8n \equiv 48[13] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 6[13]$

4) $A = 21n^2 - 17n - 4; B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$

أ. $21n^2 - 17n - 4 = (n - 1)(21n + 4); 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 = (n - 1)(28n^2 + 20n + 3)$

ب. $PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; 28n^2 + 20n + 3)$

$PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; (14n + 3)(2n + 1))$

بما أن العددين $21n + 4$ و $14n + 3$ أوليان فيما بينهما ، فإن :

$PGCD(A; B) = (n - 1) \times PGCD(21n + 4; 2n + 1)$

و منه نستنتج أن :

- $n = 13k + 6 : PGCD(21n + 4; 2n + 1) = 13 \Rightarrow PGCD(A; B) = 13(n - 1)$
- $n \neq 13k + 6 : PGCD(21n + 4; 2n + 1) = 1 \Rightarrow PGCD(A; B) = n - 1$

التمرين 29 :

1) $11n - 24m = 1 \dots (1)$

أ. $PGCD(11, 24) = 1 \Rightarrow$ المعادلة تقبل على الأقل حلا

ب. $\begin{cases} 11n - 24m = 1 \\ 11(11) - 24(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow 11(n - 11) - 24(m - 5) = 0 \Rightarrow 11(n - 11) = 24(m - 5)$

$\begin{cases} 24 \mid 11(n - 11) \\ PGCD(24; 11) = 1 \end{cases} \Rightarrow 24 \mid (n - 11) \Rightarrow n - 11 = 24k \Rightarrow n = 24k + 11 ; k \in \mathbb{Z}$

$11(24k) = 24(m - 5) \Rightarrow m - 5 = 11k \Rightarrow m = 11k + 5 ; k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(24k + 11; 11k + 5)\}; k \in \mathbb{Z}$

2)

أ. $10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{11} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{11} - 1$

$10 \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} \equiv 1[9] \Rightarrow 10^{24} - 1 \equiv 0[9] \Rightarrow 9 \mid 10^{24} - 1$

ب. $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = (10^{11(24k+11)} - 1) - 10(10^{24(11k+5)} - 1)$

$= 10^{264k+121} - 1 - 10^{264k+121} + 10 = 9$

طريقة ثانية :

$11n - 24m = 1 \Rightarrow 11n = 24m + 1 \Rightarrow (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 10^{11n} - 10^{24m+1} + 9 = 9$

$$\begin{aligned} \text{ج. } 10^{11n} - 1 &= (10^{11})^n - 1 = (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 10^{11} + 1) \Rightarrow 10^{11} - 1 \mid 10^{11n} - 1 \\ 10^{24m} - 1 &= (10^{24})^m - 1 = (10^{24} - 1)(10^{24(m-1)} + 10^{24(m-2)} + \dots + 10^{24} + 1) \Rightarrow 10^{24} - 1 \mid 10^{24m} - 1 \\ (10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) &= 9 \Rightarrow (10^{11} - 1)(10^{11(n-1)} + \dots + 1) - 10(10^{24} - 1)(10^{24(m-1)} + \dots + 1) = 9 \\ \Rightarrow N &= (10^{11(n-1)} + 10^{11(n-2)} + \dots + 10^{11} + 1) \text{ و } M = (10^{24(m-1)} + 10^{24(m-2)} + \dots + 10^{24} + 1) \end{aligned}$$

$$\text{د. } \begin{cases} d \mid 10^{11} - 1 \\ d \mid 10^{24} - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid (10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M \Rightarrow d \mid 9$$

$$\text{هـ. } \begin{cases} d \mid 9 \\ 9 \mid 10^{11} - 1 \Rightarrow \text{PGCD}(10^{11} - 1; 10^{24} - 1) = 9 \\ 9 \mid 10^{24} - 1 \end{cases}$$

التمرين 30 :

$$1) \text{PGCD}(x, y) = d \Rightarrow x = dx'; y = dy'; \text{PGCD}(x', y') = 1$$

$$\text{PPCM}(x, y) = m \Rightarrow m.d = x.y \Rightarrow m.d = d^2.x'.y' \Rightarrow m = d.x'.y' \Rightarrow m^2 = d^2.x'^2.y'^2$$

$$m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2.x'^2.y'^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow d^2(x'^2.y'^2 - 5) = 2000 \Rightarrow d^2 \mid 2000$$

$$2) 2000 = 2^4 \times 5^3 \Rightarrow 20 - 10 - 5 - 4 - 2 - 1 : \text{ القواسم المربعة التامة للعدد 2000 هي}$$

$$3) m^2 - 5d^2 = 2000 \Rightarrow m^2 = 5d^2 + 2000$$

$$5 \mid 5d^2 + 2000 \Rightarrow 5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m \text{ (لأن 5 عدد أولي)} \Rightarrow m = 5k$$

$$5d^2 = m^2 - 2000 = (5k)^2 - 2000 = 5(5k^2 - 400) \Rightarrow d^2 = 5k^2 - 400 = 5(k^2 - 80) \Rightarrow 5 \mid d^2 \Rightarrow 5 \mid d$$

$$\begin{cases} 5 \mid d \\ d^2 \mid 2000 \end{cases} \Rightarrow d \in \{5; 10; 20\}$$

$$4) d = 5 : m^2 = 5(5)^2 + 2000 = 2125 \text{ (مرفوض لأن العدد 2125 ليس مربع تام)}$$

$$d = 10 : m^2 = 5(10)^2 + 2000 = 2500 \Rightarrow m = 50$$

$$d = 20 : m^2 = 5(20)^2 + 2000 = 4000 \text{ (مرفوض لأن العدد 4000 ليس مربع تام)}$$

$$m = d.x'.y' \Rightarrow x'.y' = \frac{m}{d} = 5 \Rightarrow (x', y') = (1, 5) \Rightarrow (x, y) = (10, 50)$$

التمرين 31 :

$$1) 2006 = 2 \times 17 \times 59$$

$$16x + 59y = 2006 \Rightarrow 16x = 2006 - 59y = 59(34 - y)$$

$$\begin{cases} 59 \mid 16x \\ \text{PGCD}(59; 16) = 1 \end{cases} \Rightarrow 59 \mid x \Rightarrow x = 59k ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 16x = 59(34 - y) \Rightarrow 16(59k) = 59(34 - y) \Rightarrow 34 - y = 16k \Rightarrow y = -16k + 34 ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(59k ; -16k + 34)\} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 59k > 0 \\ -16k + 34 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k < \frac{34}{16} \end{cases} \Rightarrow 0 < k < 2,125 \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow (x, y) \in \{(59, 18); (118, 2)\}$$

$$4) 16m + 59d = 2006 \Rightarrow \begin{cases} m = 59 \\ d = 18 \end{cases} \text{ (مرفوض لأن 18 لا يقسم 59) أو } \begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 118 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = m \cdot d = 236 \Rightarrow d^2 \cdot a' \cdot b' = 236 \Rightarrow a' \cdot b' = \frac{236}{4} = 59 \Rightarrow (a', b') \in \{(59, 1); (1, 59)\} \\ \Rightarrow (a, b) \in \{(118, 2); (2, 118)\}$$

التمرين 32 :

$$1) 3^0 \equiv 1[7]; 3^1 \equiv 3[7]; 3^2 \equiv 2[7]; 3^3 \equiv 6[7]; 3^4 \equiv 4[7]; 3^5 \equiv 5[7]; 3^6 \equiv 1[7]$$

$$3^{6k} \equiv 1[7]; 3^{6k+1} \equiv 3[7]; 3^{6k+2} \equiv 2[7]; 3^{6k+3} \equiv 6[7]; 3^{6k+4} \equiv 4[7]; 3^{6k+5} \equiv 5[7]$$

$$4^0 \equiv 1[7]; 4^1 \equiv 4[7]; 4^2 \equiv 2[7]; 4^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 4^{3k} \equiv 1[7]; 4^{3k+1} \equiv 4[7]; 4^{3k+2} \equiv 2[7]$$

$$2) 2006 \equiv 4[7]; 2006^{3n+2} \equiv 4^{3n+2}[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} \equiv 4[7]$$

$$1424 \equiv 3[7]; 1424^{6n+1} \equiv 3^{6n+1}[7] \Rightarrow 1424^{6n+1} \equiv 3[7] \Rightarrow 2 \times 2006^{3n+2} + 1424^{6n+1} \equiv 0[7]$$

$$3) u_n = 2 \times 3^n + 3 \times 4^n$$

$$أ. S_n = u_0 + \dots + u_n = (2 + 2 \times 3 + 2 \times 3^2 + \dots + 2 \times 3^n) + (3 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \dots + 3 \times 4^n)$$

$$S_n = 2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) + 3(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^n) = 2 \left(\frac{3^{n+1} - 1}{2} \right) + 3 \left(\frac{4^{n+1} - 1}{3} \right)$$

$$S_n = 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2$$

$$ب. S_n \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} - 2 \equiv 0[7] \Rightarrow 3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7]$$

$n + 1 =$	$6k$	$6k + 1$	$6k + 2$	$6k + 3$	$6k + 4$	$6k + 5$	
$3^{n+1} \equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$4^{n+1} \equiv$	1	4	2	1	4	2	[7]
$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv$	2	0	4	0	1	0	[7]

$$3^{n+1} + 4^{n+1} \equiv 2[7] \Rightarrow n + 1 = 6k \Rightarrow n = 6k - 1; k \in \mathbb{N}^*$$

التمرين 33 :

$$1) 91x + 10y = 1 \dots (1); 91x + 10y = 412 \dots (2)$$

$$أ. 91(1) + 10(-9) = 1 \Rightarrow (1, -9) \text{ الثنائية حل خاص للمعادلة (1)}$$

$$91(412) + 10(-3708) = 412 \Rightarrow (412, -3708) \text{ الثنائية حل خاص للمعادلة (2)}$$

$$ب. \begin{cases} 91x + 10y = 412 \\ 91(412) + 10(-3708) = 412 \end{cases} \Rightarrow 91(x - 412) + 10(y + 3708) = 0 \Rightarrow 91(x - 412) = 10(-y - 3708)$$

$$\begin{cases} 10 \mid 91(x - 412) \\ \text{PGCD}(10; 91) = 1 \end{cases} \Rightarrow 10 \mid (x - 412) \Rightarrow x - 412 = 10k \Rightarrow x = 10k + 412; k \in \mathbb{Z}$$

$$91(10k) = 10(-y - 3708) \Rightarrow -y - 3708 = 91k \Rightarrow y = -91k - 3708; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) A_n = 3^{2n} - 1 = 9^n - 1 ; 9 \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n \equiv 1[8] \Rightarrow 9^n - 1 \equiv 0[8] \Rightarrow A_n \equiv 0[8]$$

$$3) A_3x + A_2y = 3296 \Rightarrow 728x + 80y = 3296 \Rightarrow 91x + 10y = 412 \Rightarrow S = \{(10k + 412; -91k - 3708)\}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ \beta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10k + 412 \geq 0 \\ -91k - 3708 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -41,2 \\ k \leq -40,7 \end{cases} \Rightarrow k = -41 \Rightarrow (\alpha, \beta) = (2, 23)$$

$$(\alpha + \beta)A_2 + 10 = 25 \times 80 + 10 = 2010$$

: 34 التمرين

$$1) 9^0 \equiv 1[11]; 9^1 \equiv 9[11]; 9^2 \equiv 4[11]; 9^3 \equiv 3[11]; 9^4 \equiv 5[11]; 9^5 \equiv 1[11]$$

$$9^{5k} \equiv 1[11]; 9^{5k+1} \equiv 9[11]; 9^{5k+2} \equiv 4[11]; 9^{5k+3} \equiv 3[11]; 9^{5k+4} \equiv 5[11]$$

$$2) 1431 \equiv 1[11] \Rightarrow 1431^n \equiv 1[11]; 1993 \equiv -9[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 9^{5(2n)}[11] \Rightarrow 1993^{10n} \equiv 1[11]$$

$$2011 \equiv 9[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9^{5n+1}[11] \Rightarrow 2011^{5n+1} \equiv 9[11]$$

$$1431^n + 1993^{10n} + 2011^{5n+1} \equiv 0[11]$$

$$3) \begin{cases} 1431^n + 5n + 2011^{5n+1} \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n + 10 \equiv 0[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5n \equiv 1[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 9[11] \\ 90 < n < 100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < n < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 90 < 11k + 9 < 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ 7,36 < k < 8,27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11k + 9 \\ k = 8 \end{cases} \Rightarrow n = 97$$

: 35 التمرين

$$1) B(1; 3; 5); \vec{n}(-2; 1; 1); (Q): x - 2y + 4z - 9 = 0$$

$$\vec{n}(-2; 1; 1); \vec{n}^T(1; -2; 4); \vec{n} \cdot \vec{n}^T = -2 - 2 + 4 = 0 \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

$$2) d(B; (\Delta)) = d(B; (Q)) = \frac{|1 - 2(3) + 4(5) - 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

$$3) M(x; y; z) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -2(x - 1) + (y - 3) + (z - 5) = 0 \Rightarrow -2x + y + z - 6 = 0$$

$$4) (\Delta): \begin{cases} x = 2k - 5 \\ y = 3k - 5 \\ z = k + 1 \end{cases}; k \in \mathbb{R}; A(-9; -4; -1)$$

$$أ. -2(-9) - 4 - 1 - 6 = 7 \Rightarrow A \notin (P); -9 - 2(-4) + 4(-1) - 9 = -14 \Rightarrow A \notin (Q)$$

$$ب. AM^2 = (2k - 5 + 9)^2 + (3k - 5 + 4)^2 + (k + 1 + 1)^2 = (2k + 4)^2 + (3k - 1)^2 + (k + 2)^2 \\ = 4k^2 + 16k + 16 + 9k^2 - 6k + 1 + k^2 + 4k + 4 = 14k^2 + 14k + 21 = 7(2k^2 + 2k + 3)$$

$$ج. f(k) = 2k^2 + 2k + 3$$

$$\bullet f'(k) = 4k + 2 = 2(2k + 1)$$

$$k < -\frac{1}{2}: f'(k) < 0 \Rightarrow f(k) \text{ متناقصة}; k \geq -\frac{1}{2}: f'(k) \geq 0 \Rightarrow f(k) \text{ متزايدة}$$

$$\bullet AM \text{ أصغرية} \Rightarrow f'(k) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$د. PGCD(2k - 5; 3k - 5) = d$$

- $d \mid 2k - 5$ و $d \mid 3k - 5 \Rightarrow d \mid 2(3k - 5) - 3(2k - 5) \Rightarrow d \mid 5$
- $d = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2k - 5 \equiv 0[5] \\ 3k - 5 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2k \equiv 0[5] \\ 3k \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow k \equiv 0[5] \Rightarrow k = 5\alpha ; \alpha \in \mathbb{N}$

مجموعة النقط M من المستقيم (Δ) التي تكون إحداثياتها أعدادا طبيعية هي : $M(10\alpha - 5; 15\alpha - 5; 5\alpha + 1)$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}^*$
أول حل طبيعي هو : $M_0(5; 10; 6)$.

التمرين 36 :

$$\begin{cases} a = 5n + 3 \\ b = 2n + 1 \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1) $2a - 5b = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 1$ (ببزو)

2) $x = 5m + 3 ; y = 2m - 1 ; m \in \mathbb{N}$

أ. $2x - 5y = 11$

ب. $PGCD(x, y) = d$

- $d \mid x$ و $d \mid y \Rightarrow d \mid 2x - 5y \Rightarrow d \mid 11 \Rightarrow d = 1$ أو $d = 11$
- $d = 11 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[11] \\ y \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + 3 \equiv 0[11] \\ 2m - 1 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m \equiv 8[11] \\ 2m \equiv 1[11] \end{cases} \Rightarrow m \equiv 6[11] \Rightarrow m = 11k + 6$
 $\Rightarrow x = 5(11k + 6) + 3 = 55k + 33 ; y = 2(11k + 6) - 1 = 22k + 11 ; k \in \mathbb{N}$

التمرين 37 :

1) $4 \equiv -1[5] \Rightarrow 4^{2n} \equiv 1[5]$

2) $3^0 \equiv 1[5] ; 3^1 \equiv 3[5] ; 3^2 \equiv 4[5] ; 3^3 \equiv 2[5] ; 3^4 \equiv 1[5]$

$3^{4k} \equiv 1[5] ; 3^{4k+1} \equiv 3[5] ; 3^{4k+2} \equiv 4[5] ; 3^{4k+3} \equiv 2[5]$

3) $1428 \equiv 3[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{2009}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3^{4(502)+1}[5] \Rightarrow 1428^{2009} \equiv 3[5]$

4) $A_n = 2 + 4^{2n} + 3^n$

$A_n \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n + 3 \equiv 0[5] \Rightarrow 3^n \equiv 2[5] \Rightarrow n = 4k + 3 ; k \in \mathbb{N}$

التمرين 38 :

1) $23x - 17y = 6$

$23(1) - 17(1) = 6 \Rightarrow 23(x - 1) - 17(y - 1) = 0 \Rightarrow 23(x - 1) = 17(y - 1)$

$\begin{cases} 17/23(x - 1) \\ PGCD(17; 23) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17/(x - 1) \Rightarrow x - 1 = 17k \Rightarrow x = 17k + 1$

$23(x - 1) = 17(y - 1) \Rightarrow 23(17k) = 17(y - 1) \Rightarrow y - 1 = 23k \Rightarrow y = 23k + 1$

$S = \{(17k + 1; 23k + 1)\}; k \in \mathbb{Z}$

2) $A = 23x + 2 = 17y + 8 \Rightarrow 23x - 17y = 6 \Rightarrow (x; y) = (17k + 1; 23k + 1)$

- $k = 0 : (x; y) = (1; 1); A = 25 = \overline{34}_7$
- $k = 1 : (x; y) = (18; 24); A = 416 = \overline{1133}_7$
- $k = 2 : (x; y) = (35; 47); A = 807 = \overline{2232}_7$

التمرين 39 :

$$1) 7^0 \equiv 1[10]; 7^1 \equiv 7[10]; 7^2 \equiv 9[10]; 7^3 \equiv 3[10]; 7^4 \equiv 1[10];$$

$$7^{4k} \equiv 1[10]; 7^{4k+1} \equiv 7[10]; 7^{4k+2} \equiv 9[10]; 7^{4k+3} \equiv 3[10]$$

$$7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 1 + 7 + 9 + 3[10] \Rightarrow 7^{4k} + 7^{4k+1} + 7^{4k+2} + 7^{4k+3} \equiv 0[10]$$

$$2) S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$$

- $S_{n+4} - S_n = 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3} + 7^{n+4} \Rightarrow S_{n+4} - S_n \equiv 0[10] \Rightarrow S_{n+4} \equiv S_n[10]$
- $S_n = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^n$
 - ✓ $n = 4k : S_n \equiv 1[10]$
 - ✓ $n = 4k + 1 : S_n \equiv 8[10]$
 - ✓ $n = 4k + 2 : S_n \equiv 7[10]$
 - ✓ $n = 4k + 3 : S_n \equiv 0[10]$

التمرين 40 :

$$1) N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12} = 10 + 12 + 11 \times 12^2 = 1606$$

$$2) N_2 = 1131 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7 \alpha 3}^{12}$$

$$3) \text{أ) } N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12} = a_0 + \underbrace{a_1 \times 12}_{\equiv 0[12]} + \dots + \underbrace{a_n \times 12^n}_{\equiv 0[12]} \Rightarrow N \equiv a_0[12]$$

$$\Rightarrow N = 12k + a_0 = 3(4k) + a_0 = 3k' + a_0 \Rightarrow N \equiv a_0[3]$$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 3 إذا كان رقم أحاده في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ 3

$$N_2 = \overline{7 \alpha 3}^{12} \Rightarrow N_2 \equiv 3[3] \Rightarrow N_2 \equiv 0[3] \quad (1131 = 3 \times 377)$$

$$\text{ب) } 12 \equiv 1[11] \Rightarrow 12^p \equiv 1[11] \Rightarrow a_p 12^p \equiv a_p[11]$$

$$N = a_0 + a_1 \times 12 + \dots + a_n \times 12^n \Rightarrow N \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n[11]$$

نتيجة : يقبل عدد القسمة على 11 إذا كان مجموع أرقامه في النظام ذي الأساس 12 مضاعفا لـ 11

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}; \beta + 1 + \alpha = 11 + 1 + 10 = 22 = 2 \times 11 \Rightarrow N_1 \equiv 0[11] \quad (1606 = 11 \times 146)$$

$$4) N = \overline{x 4 y}^{12}; N \equiv 0[33] \Rightarrow \begin{cases} N \equiv 0[3] \\ N \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \equiv 0[3] \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \{0; 3; 6; 9\} \\ x + y + 4 \equiv 0[11] \end{cases}$$

- $y = 0: x + 4 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 7[11] \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (x; y) = (7; 0)$
- $y = 3: x + 7 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 4[11] \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (x; y) = (4; 3)$
- $y = 6: x + 10 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 1[11] \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 6)$
- $y = 9: x + 2 \equiv 0[11] \Rightarrow x \equiv 9[11] \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (x; y) = (9; 9)$

$$8x + 5y = 1 \dots (E)$$

1) الثنائية $(2, -3)$ حل خاص للمعادلة $(E) \Rightarrow 8(2) + 5(-3) = 1$

$$8(x - 2) + 5(y + 3) = 0 \Rightarrow 8(x - 2) = 5(-y - 3)$$

$$\begin{cases} 5/8(x - 2) \\ PGCD(5; 8) = 1 \end{cases} \Rightarrow 5/(x - 2) \Rightarrow x - 2 = 5k \Rightarrow x = 5k + 2$$

$$8(5k) = 5(-y - 3) \Rightarrow -y - 3 = 8k \Rightarrow y = -8k - 3$$

$$S = \{(5k + 2; -8k - 3)\}; k \in \mathbb{Z}$$

2) $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2 \end{cases}$

أ. $8a = N - 1; 5b = N - 2; 8a - 5b = N - 1 - N + 2 = 1 \Rightarrow (E)$ حل للمعادلة $(a, -b)$ الثنائية

ب. $a = 5k + 2 \Rightarrow N = 8(5k + 2) + 1 = 40k + 17 \Rightarrow N \equiv 17[40]$

3) $8x + 5y = 100; 8(200) + 5(-300) = 100 \Rightarrow S = \{(5k + 200; -8k - 300)\}; k \in \mathbb{Z}$

4) $\begin{cases} 8x + 5y = 100 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k + 200 > 0 \\ -8k - 300 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > -40 \\ k < -37,5 \end{cases} \Rightarrow k \in \{-38, -39\} \Rightarrow (x, y) \in \{(10, 4); (5, 12)\}$

1) $(2n + 1) - 2(n) = 1 \Rightarrow PGCD(n, 2n + 1) = 1$ (بيزو)

2) $\alpha = n + 3; \beta = 2n + 1; PGCD(\alpha, \beta) = d$

أ. d/α و $d/\beta \Rightarrow d/2\alpha - \beta \Rightarrow d/5$

ب. $\begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n + 3 \equiv 0[5] \\ 2n + 1 \equiv 0[5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ 2n \equiv 4[5] \end{cases} \Rightarrow n \equiv 2[5] \Rightarrow n - 2 \equiv 0[5]$

3) $a = n^3 + 2n^2 - 3n = (n - 1)(n^2 + 3n); b = 2n^2 - n - 1 = (n - 1)(2n + 1)$

4) $PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = d'$

أ. $d/n + 3$ و $d/2n + 1 \Rightarrow d/n(n + 3)$ و $d/2n + 1 \Rightarrow d/PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] \Rightarrow d/d'$
 $d'|n(n + 3)$ و $d'|2n + 1 \Rightarrow d'|n + 3$ و $d'|2n + 1 \Rightarrow d'|PGCD(n + 3, 2n + 1) \Rightarrow d'|d$
 d/d' و $d'/d \Rightarrow d = d'$

ب. $PGCD(a, b) = (n - 1)PGCD[n(n + 3), (2n + 1)] = (n - 1)d' = (n - 1)d$

• $n = 5k + 2 : d = 5 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(n - 1)$

• $n \neq 5k + 2 : d = 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = n - 1$

ج. $n = 2001 = 5(400) + 1 \Rightarrow PGCD(a, b) = 2001 - 1 = 2000$

$n = 2002 = 5(400) + 2 \Rightarrow PGCD(a, b) = 5(2002 - 1) = 5 \times 2001 = 10005$