سلسلة تمارين في الأعداد المركبة والتحويلات النقطية

السنة الثالثة ثانوي
الشعب العلمية

تمرين 1

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركّبة التالية:

$$z_1 = (1+2i)^2(3+4i) + (1+i)^3 + 20$$
$$z_2 = \frac{1+18i}{3+4i} + \frac{7-26i}{3-4i} - \frac{-2+15i}{i}$$
$$z_3 = \left[(-\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i\right]^2$$
$$z_4 = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i-i}$$
$$z_5 = \left(\frac{5+7i}{-7+5i}\right)^{2011}$$

تمرين 2

حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية:

$$z \cdot \overline{z} + 2z - 3\overline{z} - 31 - 25i = 0$$
$$z^2 + 4\overline{z} - 5 = 0$$
$$(z+\overline{z})^2 + 2iz \cdot \overline{z} - 4i = 0$$

تمرين 3

• عيّن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركّب حيث:

1. $|z-1+i| = |z+1|$
2. $|iz-3-2i| = 3$
3. $z+\overline{z} = |z|$

تمرين 4

في المستوي المركّب، لاحقة النقطة M هي العدد المركّب: $z = x+iy$ ، x و y عددين حقيقيين ، نرفق بكل عدد مركّب z العدد المركّب Z حيث :

$$Z = 2z\cdot\overline{z} + iz - (2+i)\overline{z} - 7 + 2i$$

1. أكتب Z على الشكل الجبري.
2. عيّن و أرسم المجموعة E_1 للنقط M حتى يكون Z عددا حقيقيا (وحدة الطول $2\,Cm$)
3. عيّن و أرسم المجموعة E_2 للنقط M حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

تمرين 5 ★★☆

في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، لاحقة النقطة M هي العدد المركّب $z=x+iy$؛ نرفق بكل عدد مركّب $z\neq 2$ العدد المركّب Z حيث:

$$Z=\frac{z+2}{z-2}$$

1 أكتب Z على الى الشكل الجبري.

2 عيّن المجموعة E_1 للنقط M من المستوي حتى يكون Z عددا حقيقيا، و المجموعة E_2 للنقط M حتى يكون Z عددا تخيليا صرفا.

3 لتكن النقطة M' صورة Z، عيّن المجموعة E_3 للنقط M من المستوي حتى تكون:
O، M و M' على إستقامية.

تمرين 6 ★★☆

في المستوي المركّب لاحقة النقطة M هي العدد المركّب: $z=x+iy$، x و y عددين حقيقيين، نرفق بكل عدد مركّب $z\neq -i$ العدد المركّب Z حيث:

$$Z=\frac{z-2-i}{z-i}$$

1 عيّن $Re(Z)$ و $Im(Z)$

2 عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون:

(أ) Z عددا حقيقيا (ب) Z عددا تخيليا صرفا (ج) $|Z|=\sqrt{2}$.

تمرين 7 ★★☆

في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ لاحقة النقطة M هي العدد المركّب: $z=x+iy$، x و y عددين حقيقيين، نرفق بكل عدد مركّب $z\neq i$ العدد المركّب $f(z)$ حيث:

$$f(z)=\frac{2z-i}{iz+1}$$

1 عيّن و أنشىء المجموعة E للنقط M من المستوي حتى يكون $f(z)$ عددا حقيقيا (وحدة الطول $4\,Cm$)

2 حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\overline{f(\overline{z})}=\frac{7}{4}i$

تمرين 8 ★☆☆

أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركّبة التالية:

$$z_1=2+2i\,,\ z_2=-\sqrt{3}+i\,,\ z_3=3+i\sqrt{3}\,,\ z_4=5$$
$$z_5=-8ie^{i\frac{\pi}{6}}\,,\ z_6=(1-\sqrt{3})i\,,\ z_7=(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^5$$
$$z_8=(1-i\sqrt{3})(1+i)\,,\ z_9=\frac{-1-i}{1+i\sqrt{3}}\,,\ z_{10}=\frac{3\sqrt{2}i}{\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}}$$
$$z_{11}=\frac{4e^{i\pi}}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}\,,\ z_{12}=\frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}\,,\ z_{13}=\alpha i\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$
$$z_{14}=-2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad(\theta\in\mathbb{R})$$
$$z_{15}=\sin(2\theta)+2i\sin^2(\theta)\quad(0<\theta<\pi)$$
$$z_{16}=1-\tan^2(\theta)+2i\tan(\theta)\quad(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$$
$$z_{17}=\frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}\quad(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$$

تمرين 9 ★☆☆

أكتب على الشكل الجبري و الأسي الأعداد المركّبة التالية:

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \ , \ z_2 = -\sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$z_3 = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4 \ , \ z_4 = \frac{(\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{6}})^2 \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}}{3e^{i\frac{3\pi}{2}}}$$

تمرين 10 ★★☆

ليكن Z عدد مركّب معرّف كما يلي:

$$Z = \frac{(\sqrt{2}-1) + i(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+i}$$

1. أكتب Z على الشكل الجبري، ثمّ على الشكل المثلثي.
2. عيّن الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا.
3. عيّن الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n تخيليا صرفا.
4. أكتب على الشكل الأسي، ثمّ على الشكل الجبري العدد المركّب z حيث:
$$Z \times z = 4\sqrt{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

تمرين 11 ★☆☆

z_1، z_2 و z_3 ثلاثة أعداد مركّبة معرّفة بما يلي:

$$z_1 = 1+i \text{،} z_2 = 1_i\sqrt{3} \text{،} z_3 = \frac{z_1}{z-2}$$

1. عيّن طويلة و عمدة كل من z_1 و z_2.
2. أكتب z_3 على الشكلين الجبري و المثلثي.
3. استنتج قيمتي: $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$
4. بيّن أنّ:
$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{\overline{z_1}}{\sqrt{2}}\right)^n = 2\cos\frac{n\pi}{4} \quad ,n \in \mathbb{N}$$

تمرين 12 ★☆☆

z_1، z_2 و Z ثلاثة أعداد مركّبة معرّفة كما يلي:

$$z_1 = 1-i \text{ ، } z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \text{ و } Z = \frac{z_1^5}{z_2^4}$$

1. عيّن طويلة و عمدة كل من : z_1، z_2 ، z_1^5 و z_2^4.
   - استنتج الشكل الجبري لكل من : z_1^5 و z_2^4.
2. عيّن الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد المركّب Z.
3. أحسب طويلة و عمدة العدد Z، ثمّ استنتج قيمة: $\tan\frac{\pi}{12}$
4. عيّن الأعداد الصحيحة n حتى يكون Z^n عددا حقيقيا موجبا.

تمرين 13 ★★☆

z_1، z_2 و z_3 ثلاثة أعداد مركّبة معرّفة كما يلي:

$$z_1 = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}) \text{ ، } z_2 = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

1. عيّن طويلة و عمدة كل من z_2 و z_3، ثمّ z_1.

2 استنتج قيمتي: $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3 أحسب العددين: $\left(\frac{z_3}{\sqrt{2}}\right)^{2012}$ و $\left(\frac{z_1+z_2}{\sqrt{2}z_3}\right)^{1432}$

4 أكتب على الشكل الأسي الجذور التربيعية للعدد: $2z_3$.

تمرين 14 ★★☆

$f(z)$ كثير الحدود للمتغير المركّب z حيث:

$$f(z)=z^3-3\sqrt{2}z^2+6z-18\sqrt{2}$$

1 أحسب $f(3\sqrt{2})$، ثمّ عيّن العدد الحقيقي a بحيث:

$$f(z)=(z-3\sqrt{2})(z+a)$$

2 حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة $f(z)=0$، نرمز إلى z_1، z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z)=0$ حيث z_1 الحل الحقيقي و $Im(z_2)<0$.

3 المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ لتكن النقط A، B و C صور الأعداد z_1، z_2 و z_3 على الترتيب.

- عيّن طبيعة المثلثين ABC و OAB

تمرين 15 ★★☆

1 حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة (E) التالية:

$$(iz+3+4i)(z^2-8z+25)=0$$

نرمز لحلول المعادلة (E) بـ z_0، z_1 و z_2 حيث: $Re(z_1)=Re(z_2)$ و $Im(z_0)=Im(z_1)$

2 المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ لتكن النقط A، B و C لواحقها z_0، z_1 و z_2 على الترتيب .

- بيّن أنّ النقاط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$، يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها r.
- أنشئ الدائرة $(\mathscr{C})$ و المثلث ABC .

تمرين 16 ★★☆

$f(z)$ كثير حدود للمتغير المركّب z حيث:

$$f(z)=z^3-(2+5i)z^2-(7-12i)z-26-13i$$

1 أحسب $f(2-i)$، ثمّ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$f(z)=(z-2+i)(z^2+az+b)$$

2 حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة $f(z)=0$
نرمز إلى z_1 و z_2 و z_3 حلول المعادلة $f(z)=0$ حيث: $Re(z_1)=Re(z_2)$ و $Im(z_2)=Im(z_3)$

3 المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ لتكن النقاط A، B و C صور الأعداد المركّبة z_1، z_2 و z_3 على الترتيب.

- عيّن طبيعة المثلث ABC.
- عيّن إحداثيتي النقطة D حتى يكون $ABCD$ مربعا.

تمرين 17 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $1Cm$)

1 أنشيء النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب:
$z_C = 3+2i$ و $z_B = 2-i$ ،$z_A = 1+i$

2 أحسب لاحقتي الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

3 فسّر هندسيا الطويلة و العمدة للعدد المركّب: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

- بيّن أنّ: $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$، و استنتج طبيعة المثلث ABC.

4 عيّن لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC، ثمّ أحسب نصف قطرها r و أرسمها.

5 عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون $ABDC$ مربعا .

تمرين 18 ★★☆

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (الوحدة $1Cm$)
لتكن النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب:
$z_C = -2i$ و $z_B = 2\sqrt{3} - 2i$ ،$z_A = \sqrt{3} + i$

1 أكتب على الشكل الأسي العدد المركّب: $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC و أحسب مركز ثقله G.

2 لتكن النقطة D نظيرة A بالنسبة لحامل محور التراتيب.
- عيّن لاحقة النقطة D.
- مثّل الرباعي $ABCD$، ثمّ عيّن بدقّة طبيعته.

3 أكتب على الشكل الأسي العدد المركّب: $\dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{-\sqrt{3} + i}$.

- بيّن أنّ:

$$\arg\left(\frac{2\sqrt{3} - 2i}{-\sqrt{3} + i}\right) = \left(\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OB}\right)$$

ثمّ استنتج أنّ النقاط B، O و D على إستقامة واحدة.

تمرين 19 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (الوحدة $1Cm$)
لتكن النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب:
$z_C = 2i$ و $z_B = 2\sqrt{3}$ ،$z_A = \sqrt{3} + 3i$

1 مثّل النقاط A، B و C على ورقة مليمترية.

2 عيّن طويلة و عمدة العدد المركّب z_A.

3 أ) أحسب طويلة كل من الأعداد المركّبة التالية:
$z_A - z_C$، $z_B - z_A$ و $z_B - z_C$؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عيّن لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC، حدّد نصف قطر هذه الدائرة.

جـ) بيّن أنّ النقطة O تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4 لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

أ) بيّن أنّ: $z_D = \sqrt{3} - i$

ب) أحسب لاحقة المنتصف M للقطعة $[AD]$

جـ) بيّن أنّ الرباعي $ABDC$ مستطيل.

تمرين 20 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب:

$$z_B = \sqrt{2}+\sqrt{2}i \text{ و } z_A = -\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$$

أ) عيّن اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O.

ب) عيّن اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة $[AC]$

ج) عيّن اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I.

د) أنشئ النقط A، B، C، D و I.

2 أ) فسّر هندسيا طويلة و عمدة العدد المركّب:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$$

ب) تحقق أنّ العدد المركّب:

$$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ج) ماذا يمكن قوله عن القطعتين $[AC]$ و $[BD]$؟

3 ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$؟ أحسب مساحته.

4 بيّن أنّ النقاط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة $(\mathscr{C})$ يطلب حساب لاحقة مركزها Ω و نصف قطرها r

5 لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لحامل محور الفواصل.

أ) عيّن z_E لاحقة النقطة E.

ب) أحسب الجداء: $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}$

ج) ماذا يمثّل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة $(\mathscr{C})$.

تمرين 21 ★★☆

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (وحدة الطول $2Cm$)

عيّن هندسيا، ثمّ أنشئ مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z في كل حالة من الحالات التالية:

- $|z-2-3i| = 1$
- $|z+1| = |z-1+2i|$
- $|(1+i)\bar{z}| = 3\sqrt{2}$

تمرين 22 ★★☆

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب:

$$z_B = 2+2i \text{ و } z_A = 1$$

1 عيّن z_C لاحقة النقطة C، صورة النقطة B بالإنسحاب $\mathcal{T}$ الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

2 عيّن z_D لاحقة النقطة D، صورة النقطة C بالتحاكي $\mathcal{H}$ الذي مركزه النقطة A و نسبته -3

3 عيّن z_E لاحقة النقطة E، صورة النقطة C بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

4 أنشىء النقط: A، B، C، D و E وحدة الرسم $1Cm$

5 أحسب $\frac{z_E - z_B}{z_D - z_B}$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث BDE.

تمرين 23 ★★☆

نعتبر التحويل النقطي $\mathcal{T}$ من المستوي الذي يرفق النقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = iz + 3 - i$$

1 عيّن طبيعة التحويل $\mathcal{T}$ و عناصره المميزة.

2 عيّن A' و B' صورتي النقطتين $A(3;1)$ و $B(-1;1)$ على الترتيب بالتحويل $\mathcal{T}$.
(استعمل المدور لإنشاء A' و B'.)

3 ليكن (Δ) مستقيم معادلته: $y = x + 2$.

- أكتب معادلة المستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالتحويل $\mathcal{T}$

4 عيّن $(\mathscr{C}')$ صورة الدائرة $(\mathscr{C})$ التي قطرها $[AB]$ بالتحويل $\mathcal{T}$؛ و أنشىء (Δ) ، (Δ')، $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$

تمرين 24 ★★☆

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (الوحدة $1Cm$)
لتكن النقط A، B و C ذات اللواحق على الترتيب:

$$z_A = -2 \text{،} \quad z_B = 2i \text{ و } z_C = 1 + 3i$$

نعتبر التحويل $\mathcal{T}$ الذي مركزه B و يحوّل النقطة A إلى النقطة C

1 عيّن العبارة المركّبة للتحويل $\mathcal{T}$ و عناصره المميزة، ثمّ بيّن أنّ النقط: A، B و C في استقامية.

2 عيّن مركز و زاوية الدوران $\mathcal{R}$ حيث: $\mathcal{R}(A) = O$ و $\mathcal{R}(O) = B$

تمرين 25 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (الوحدة $2Cm$)

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 - 8 = 0$

2 لتكن النقط A، B و C لواحقها على الترتيب:
$z_A = -1 + i\sqrt{3}$، $z_B = 2$ و $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.

أ) أكتب z_A و z_C على الشكل المثلثي.

ب) مثّل النقط A، B و C

جـ) عيّن طبيعة المثلث ABC.

3 نعتبر التحويل f من المستوي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = e^{2i\frac{\pi}{3}} z$$

أ) عيّن الطبيعة الهندسية للتحويل f.

ب) عيّن صورتي النقطتين A و C بـ f.

جـ) استنتج صورة المستقيم (AC) بـ f

تمرين 26 ★★☆

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب العددين: $z_A = 3+i$ و $z_B = (1+2i)\sqrt{2}$

1 عيّن العدد المركّب z بحيث: $z_B = z_A \cdot z$
و استنتج أنّ B هي صورة A بدوران مركزه O، يطلب تحديد زاويته.

2 لتكن C نقطة لاحقتها: $z_C = 3+\sqrt{2}+i(1+2\sqrt{2})$

- بيّن أنّ $OBCA$ معيّن يطلب رسمه و تحديد مركزه.

تمرين 27 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. (وحدة الرسم Cm)؛ لتكن النقطة A ذات اللاحقة $z_A = i$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1 ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$؛ نسمّي C صورة B بالدوران $\mathcal{R}$.

أ) أكتب العبارة المركّبة للدوران $\mathcal{R}$

ب) بيّن أنّ لاحقة C هي $z_C = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ج) أكتب z_B و z_C على الشكل الجبري.

د) أنشئ النقط A، B و C.

2 لتكن D مرجح النقط A، B و C المرفقة بالمعاملات 2، -1 و 2 على الترتيب.

أ) بيّن أنّ لاحقة D هي $z_D = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$، أنشئ النقطة D.

ب) بيّن أنّ A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3 ليكن $\mathcal{H}$ تحاكي مركزه A و نسبته 2، نسمّي E صورة D بالتحاكي $\mathcal{H}$.

أ) أكتب العبارة المركّبة للتحاكي $\mathcal{H}$.

ب) بيّن أنّ لاحقة E هي $z_E = \sqrt{3}$؛ أنشئ E

4 أحسب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$، و أكتب النتيجة بالشكل الأسي.

- استنتج طبيعة المثلث CDE.

تمرين 28 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1 من أجل $M \neq \Omega$، نذكّر أنّ النقطة M' هي صورة النقطة M بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه Ω و زاويته θ إذا و فقط إذا:

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] & (2) \end{cases}$$

أ) لتكن z، z' و ω لواحق النقط M، M' و Ω على الترتيب؛ ترجم (1) و (2) بعبارتي الطويلة و العمدة.

ب) استنتج عبارة z' بدلالة z، θ و ω.

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

3 لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب:

$z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ و $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$

أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) مثّل النقطتين A و B.

ج) بيّن أنّ OAB مثلث متقايس الأضلاع.

4 لتكن C نقطة لاحقتها $z_C = -8i$ و D صورتها بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$؛ مثّل النقطتين C و D.

- بيّن أنّ لاحقة النقطة D هي $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$

5 بيّن أنّ D هي صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O و يطلب تحديد نسبته.

6 بيّن أنّ OAD مثلث قائم.

تمرين 29 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
لتكن النقطتان A و B على الترتيب: $z_A = 2 + 2i$ و $z_B = -1 + 3i$ و ليكن $\mathcal{H}$ التحاكي الذي مركزه النقطة A و نسبته -3، و $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه النقطة B و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.
نضع: $\mathcal{S} = \mathcal{R} \circ \mathcal{H}$.

1 عيّن طبيعة التحويل $\mathcal{S}$ و عناصره المميزة.

2 بيّن أنّ صورة A بـ $\mathcal{R}$ هي C ذات اللاحقة $z_C = -2$

3 لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,1); (B,-2); (C,3)\}$

- عيّن و أنشئ المجموعتين (E_1) و (E_2) للنقط M بحيث:

$$||\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = 2\sqrt{5} \qquad (E_1)$$
$$||\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|| = 2||\overrightarrow{MA}|| \qquad (E_2)$$

- بيّن أنّ المجموعة (E_1) تشمل النقطتين O و C.

تمرين 30 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
لتكن النقطتان A و B على الترتيب: $z_A = 3 - i$ و $z_B = 4 - 3i$
نعتبر التحويل f من المستوي الذي يرفق بكل نقطة M تختلف عن A لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث:

$$z' = \frac{z - 4 + 3i}{z - 3 + i}$$

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z' = z - i$

2 أعط تفسيرا هندسيا لطويلة z'، ثمّ عيّن و أنشئ المجموعة (E_1) للنقط M حيث: $|z'| = 1$

3 أعط تفسيرا هندسيا لعمدة z'.

أ) عيّن و أنشئ المجموعة (E_2) للنقط M حتى يكون z' حقيقيا.

ب) عيّن و أنشئ المجموعة (E_3) للنقط M حتى يكون z' تخيليا صرفا.

تمرين 31 ★★★

في كل سؤال، اختر جوابا واحدا صحيحا. (برّر إجابتك).

1 النقطة M التي تنتمي إلى دائرة مركزها $A(0;-1)$ و نصف قطرها $r=3$ لاحقتها z تحقق:

أ) $|z+i|^2=3$

ب) $|z+i|=3$

ج) $|z-i|=3$

2 في المستوي المركّب، A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=2$ و $z_B=3-2i$.
لتكن (E) مجموعة النقط M بحيث: $|z-2|=|z-3+2i|$
(E) هي:

أ) محور القطعة $[AB]$

ب) القطعة $[AB]$

ج) دائرة مركزها A و قطرها $[AB]$

3 ليكن العدد المركّب:

$$z=\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

- الشكل الأسي للعدد المركّب z^2 هو:

أ) $z^2=4e^{i\frac{\pi}{6}}$

ب) $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ج) $z^2=4e^{i\frac{7\pi}{6}}$

- الشكل الأسي للعدد المركّب z هو:

أ) $z=2e^{i\frac{\pi}{12}}$

ب) $z=2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

ج) $z=2e^{i\frac{19\pi}{12}}$

4 لتكن النقط A، B و C بحيث:

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

أ) المثلث ABC متساوي الساقين و قائم.

ب) المثلث ABC متساوي الضلاع.

ج) A، B و C على إستقامة واحدة.

5 في المستوي المركّب، لتكن النقط A، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A=2i$، $z_B=1$ و $z_C=4-i$

العبارة المركّبة للتشابه المباشر $\mathcal{S}$ بحيث: $\mathcal{S}(A)=B$ و $\mathcal{S}(B)=C$ هي:

أ) $z'=(1+i)z+3-2i$

ب) $z'=(1-i)z+3-2i$

ج) $z'=(1+i)z-3+2i$

تمرين 32 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

1 عيّن مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون :

$$z^2+z-2iz-i$$

عددا حقيقيا.

2 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين:

$$\begin{cases}(z^2-4z+3)(z^2-6z+13)=0 & (E)\\ z^2+4\overline{z}-4=0 & (E')\end{cases}$$

3 نعرّف ℓ من أجل كل عدد مركّب يختلف عن i بـ:

$$\ell = \frac{z-1+i}{z-i}$$

أ) عيّن الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي للعدد ℓ.

ب) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ حتى يكون ℓ تخيلي صرف.

ج) عيّن مجموعة النقط $M(z)$ حتى يكون $|\ell| = 1$.

تمرين 33 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
لتكن النقطتان A، B و C لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 4 \text{، } z_B = 3 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = 3 - i\sqrt{3}$$

1 عيّن طويلة و عمدة العدد z_B، ثمّ استنتج طويلة و عمدة العدد z_C

2 أكتب العدد $z_B - z_A$ على الشكل الجبري، ثمّ على الشكل المثلثي.

3 عيّن طويلة و عمدة العدد $\frac{z_B}{z_B - z_A}$
و استنتج طويلة و عمدة العدد $\frac{z_C}{z_C - z_A}$

4 بالتفسير الهندسي للنتائج السابقة، برهّن أنّ النقط
O، A، B و C تقع على دائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

تمرين 34 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
لتكن A و B نقطتين لاحقتاهما على الترتيب:

$$z_A = 5 - i\sqrt{3} \text{ و } z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$$

E منتصف القطعة $[OB]$.

1 عيّن اللاحقة z_K للنقطة K حتى يكون الرباعي $ABEK$ متوازي أضلاع.

2 بيّن أنّ $\frac{z_K - z_A}{z_K}$ تخيليا صرفا، ماذا تستنتج من المثلث OKA؟

3 حدّد طبيعة الرباعي $OEAK$.

4 لتكن C نقطة لاحقتها $z_C = \frac{2z_A}{3}$، أكتب على الشكل الجبري العدد $\frac{z_K - z_B}{z_K - z_C}$.

- ماذا تستنتج من النقط B، C و K.

تمرين 35 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\frac{z-4}{z} = i$ و أكتب الحل على الشكل الجبري.

2 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 2z + 4 = 0$ و أكتب الحلين على الشكل الأسي.

3 لتكن A، B، A' و D أربعة نقط من المستوي المركّب لواحقها على الترتيب:

$$z_A = 2 \text{، } z_B = 4 \text{، } z_{A'} = 2i \text{ و } z_D = 2 + 2i$$

- ما طبيعة المثلث ODB؟

4 لتكن E و F نقطتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_E = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_F = 1 + i\sqrt{3}$.

- ما هي طبيعة الرباعي $OEAF$؟

5 لتكن $(\mathscr{C})$ دائرة مركزها A و نصف قطرها 2 ، و ليكن $\mathcal{R}$ دوران مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن e' لاحقة E' صورة E بالدوران $\mathcal{R}$.

ب) أثبت ءنّ النقطة E' تنتمي إلى دائرة $(\mathscr{C}')$.

جـ) تحقق من أنّ:

$$z_E - z_D = (\sqrt{3}+2)(e' - z_D)$$

و استنتج أنّ النقط E، E' و D في إستقامية.

6 لتكن D' صورة D بالدوران $\mathcal{R}$.

- برّهن أنّ المثلث $EE'D'$ قائم.

تمرين 36 ★★★

I) في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A = 5 + 2i$، $z_B = 5 - 2i$ و $z_C = 3$

و لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z تختلف عن النقطتين A و B.

1 أثبت أنّ المثلث ABC قائم و متسوي الساقين.

2 أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركّب $\frac{z-3}{z-5+2i}$.

3 عيّن عندئذ مجموعة النقط M حيث $\frac{z-3}{z-5+2i}$ عدد حقيقي سالب تماما.

II) لتكن (δ) الدائرة المحيطة بالمثلث ABC
و Ω نقطة لاحقتها $z_\Omega = 2 - i$.

1) أعط الشكل المركّب للدوران $\mathcal{R}$ ذو المركز Ω و الزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

2) عيّن (δ') صورة (δ) بالدوران $\mathcal{R}$، ثمّ عيّن المعادلة الديكارتية لـ (δ').

تمرين 37 ★★★

I) في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
لتكن A، B و E نقط من المستوي لواحقها على الترتيب:

$z_A = 3 + 2i$، $z_B = -3$ و $z_E = 1 - 2i$

1 أكتب على الشكل الجبري العدد : $\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}$.

- استنتج طبيعة المثلث EAB.

2 عيّن اللاحقة z_C للنقطة C صورة E بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2.

3 لتكن D مرجح الجملة: $\{(A,1); (B,-1); (C,1)\}$

- جدّ اللاحقة z_D للنقطة D.
- أثبت أنّ $ABCD$ مربع.

II) عيّن و أنشىء مجموعة النقط (δ_1) للنقط M من المستوي حيث:

$$||\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|| = \frac{1}{2}||\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}||$$

تمرين 38 ★★★

في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $4z^2 - 12z + 153 = 0$

2 نعتبر النقط A، B، C و P ذات اللواحق:

$$z_A = \frac{3}{2} + 6i \text{ ،} z_B = \frac{3}{2} - 6i \text{ ،} z_C = -3 - \frac{1}{4}i$$

و $z_P = 3 + 2i$.

و ليكن الشعاع $\overrightarrow{W}$ لاحقته : $z_{\overrightarrow{W}} = -1 + \frac{5}{2}i$

أ) عيّن اللاحقة z_Q للنقطة Q صورة B بالإنسحاب $\mathcal{T}$ الذي شعاعه $\overrightarrow{W}$.

ب) عيّن اللاحقة z_R للنقطة R صورة النقطة P بالتحاكي $\mathcal{H}$ ذو المركز C و النسبة $-\frac{1}{3}$.

ج) عيّن اللاحقة z_S للنقطة S صورة النقطة P بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه A و الزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

- علّم النقط P، Q، R و S.

3 أ) برهن أنّ الرباعي $PQRS$ متوازي أضلاع .

ب) أحسب $\frac{z_P - z_Q}{z_P - z_Q}$، و استنتج عندئذ طبيعة متوازي الأضلاع.

ج) تحقق أنّ النقط P، Q، R و S تنتمي إلى دائرة $(\mathscr{C})$ يطلب تعيين لاحقة مركزها Ω و نصف قطرها.

د) هل المستقيم (AP) مماس للدائرة $(\mathscr{C})$.