

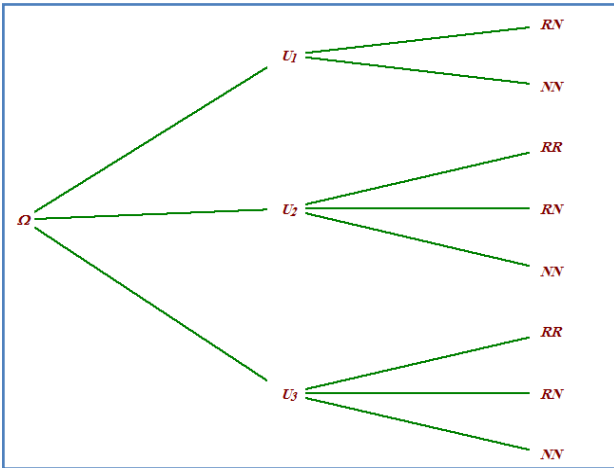
اختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (5 نقاط) :

- (1) أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 504 و 1260 و 2772 .
- (2) نعتبر في المجموعة $Z \times Z$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية (1) $2772x - 1260y = 504$.
أ - عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) و الذي يحقق $2x_0^2 - 3y_0 = -4$.
ب - باستعمال الحل الخاص المتحصل عليه حل في $Z \times Z$ المعادلة (1)
(3) افرض أن $x; y$ عدنان طبيعيين حيث $(x; y)$ هو حل للمعادلة (1) :
أ - عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $y; x$.
ب - عين الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون العدنان $x; y$ أوليان فيما بينهما.
(4) عين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة " 2 على 10 ثم أستنتج رقم أحاد 2018^{439} .
(5) عين الثنائيات $(x; y)$ من $N^* \times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x} \equiv 8[10]$.

التمرين الثاني (4 نقاط)

لدينا U_1, U_2, U_3 حيث الصندوق يحتوي U_1 على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء و الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء



و الصندوق U_3 يحتوي على ثلاثة كرات حمراء و 17 كرة سوداء .
نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق المختار

نسمي RR حادثة " الحصول على كرتين حمراوين "
و NN حادثة " الحصول على كرتين سوداوين "
و RN حادثة " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "
(1) أقل هذه الشجرة موضحا عليها كل الاحتمالات .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ - حدد قيم المتغير العشوائي X.

ب - بين أن احتمال الحادثة $(X=2)$ يساوي $\frac{2}{285}$.

ج - بين أن احتمال الحادثة $(X=1)$ يساوي $\frac{53}{285}$.

د - استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أماله الرياضياتي $E(X)$.

(3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 ؟..... (خاص بشعبة الرياضيات)

(4) أحسب احتمال الحصول على كرة حمراء على الأكثر..... (خاص بالتقني رياضي)

التمرين الثالث (4 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية حدها الأول } u_1 = \frac{1}{4} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n$$

(1) أ- أحسب الحدود u_2 و u_3 .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$.

ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة و أحسب نهايتها.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = n \cdot 2^n \cdot u_n$.

أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_1 .

ب - أكتب v_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n و أثبت تقارب المتتالية (u_n) .

(3) أحسب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$

(4) أحسب الجداء $P_n = u_1(2u_2)(3u_3)\dots(nu_n)$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي $f(x) = \frac{1}{2}x^2 [3 - \ln(x^2)] + 1 : x > 0$ و $f(0) = 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسياً

(3) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$ و $f(\alpha) = 0$.

(5) أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

(6) نعتبر g الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ - أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' و استنتج إشارتها على المجال $[0; +\infty[$

ب - حدد اتجاه تغير الدالة g ثم أستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

ج - أنشئ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

بالتوفيق للجميع

(1) إيجاد القاسم المشترك الأكبر للأعداد 504 و 1260 و 2772 بالتحليل إلى جداء عوامل أولية نجد

$$PGCD(2772,1260,504)=252$$

(2) نعتبر في المجموعة $Z \times Z$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية (1) $2772x - 1260y = 504$.

أ - تعيين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (1) والذي يحقق $2x_0^2 - 3y_0 = -4$ لدينا (1) تكافئ $11x - 5y = 2$

$$\text{الحل الخاص يحقق} \begin{cases} 2x_0^2 - 3y_0 = -4 \\ 11x_0 - 5y_0 = 2 \end{cases} \text{ يكافئ أن } \begin{cases} 10x_0^2 - 15y_0 = -20 \\ 33x_0 - 15y_0 = 6 \end{cases} \text{ بالطرح نجد } 10x_0^2 - 33x_0 + 26 = 0$$

$$\text{نحسب المميز نجد } \Delta = 49 \text{ و منه للمعادلة حلين هما } \begin{cases} x_0 = \frac{13}{10} \\ x_0 = 2 \end{cases} \text{ الحل الصحيح مقبول و هو } x_0 = 2$$

بالتعويض في معادلة من الجملة نحصل $y_0 = 4$ و منه الحل الخاص هو $(2; 4)$

ب - حل في $Z \times Z$ المعادلة (1) لدينا $\begin{cases} 11x - 5y = 2 \\ 11(2) - 5(4) = 2 \end{cases}$ بالطرح نجد $11(x-2) = 5(y-4)$ و العددان 11 و 5 أوليان

فيما بينهما فحسب مبرهنة غوص فإن 11 قاسم للعدد $(y-4)$ و 5 قاسم للعدد $(x-2)$ أي أن $\begin{cases} x-2 = 5k \\ y-4 = 11k \end{cases}; k \in Z$ و

$$S = \{(2+5k; 4+11k): k \in Z\} \text{ مجموعة الحلول هي } \begin{cases} x = 2+5k \\ y = 4+11k \end{cases}; k \in Z \text{ منه}$$

(3) نفرض أن $x; y$ عددان طبيعيين حيث $(x; y)$ هو حل للمعادلة (1):

أ - تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعدد $x; y$ لدينا $11x - 5y = 2$ و منه القاسم المشترك الأكبر قاسم للعدد 2 و منه قيمة الممكنة هي 1 او 2.

ب - تعيين الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون العددان $x; y$ أوليان فيما بينهما أي ان $PGCD(x; y) = 1$ و

$$\text{منه } \begin{cases} x = 2+5k \\ y = 4+11k \end{cases}; k \in N \text{ و منه هذا يعني أن } k \text{ عدد طبيعي فردي أي أن } \begin{cases} x = 2+5(2k'+1) \\ y = 4+11(2k'+1) \end{cases} \text{ و منه}$$

$$\text{و منه } \begin{cases} x = 7+10k' \\ y = 15+22k' \end{cases}; k' \in N \text{ و } (x; y) = (7+2k'; 15+22k') \text{ و } k \in N$$

(4) تعيين حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 2^n على 10 لدينا

$n \equiv$	0	1	2	3	4	[4]
2^n	1	2	4	8	6	[10]

و منه بواقي قسمة 2^n على 10 تشكل متتالية دورية و دورها 4

لما $n = 4k + 1$ الباقي هو 2 و لما $n = 4k + 2$ الباقي هو 4 و لما $n = 4k + 3$ الباقي هو 8 و لما $n = 4k + 4$ الباقي هو 6

لدينا $2018 \equiv 2^3 [10]$ و منه $2018^{439} \equiv 2^{4317} [10]$ و $2018^{439} \equiv 2^{4317} [10]$ و هو من الشكل $n = 4k + 1$ باقي قسمة

2018^{439} على 10 هو 2 أي أن $2018^{439} \equiv 2 [10]$ إذن رقم الأحاد المطلوب هو 2.

(5) يعين الشائيات $(x; y)$ من $N^* \times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (1) و تحقق $2^{y-2x} \equiv 8[10]$ لدينا $k \in N$: $\begin{cases} x = 2 + 5k \\ y = 4 + 11k \end{cases}$

بالتعويض نجد $2^k \equiv 8[10]$ من دراسة البواقي نجد أن $k = 4k'' + 3$ و منه $k'' \in N$: $\begin{cases} x = 17 + 20k'' \\ y = 37 + 44k'' \end{cases}$ ومنه الشائيات هي

$$(x; y) = (17 + 20k''; 37 + 44k'') : k'' \in N$$

التمرين الثاني (4 نقاط)

لدينا U_1, U_2, U_3 حيث الصندوق يحتوي U_1 على كرة حمراء واحدة و 19 كرة سوداء و الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و 18 كرة سوداء

و الصندوق U_3 يحتوي على ثلاثة كرات حمراء و 17 كرة سوداء .

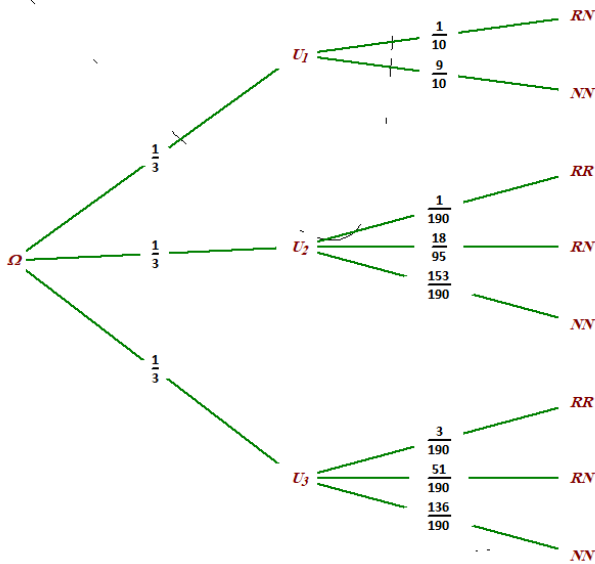
نختار عشوائيا صندوق من الصناديق الثلاثة ثم نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق المختار

نسمي RR حادثة " الحصول على كرتين حمراوين "

و NN حادثة " الحصول على كرتين سوداوين "

و RN حادثة " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

(1) شجرة الاحتمالات :



عدد الحالات الممكنة في سحب كرتين من أي صندوق هي

$$C_{20}^2 = 190$$

السحب من U_1

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مختلفتين في اللون

$C_{19}^1 \times C_1^1 = 19$ و منه احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون

هو $P_{u_1}(RN) = \frac{19}{190} = \frac{1}{10}$ و منه

$$P_{u_1}(NN) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

السحب من U_2

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مختلفتين في اللون

$C_{18}^1 \times C_2^1 = 36$ و منه احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون هو $P_{u_2}(RN) = \frac{36}{190} = \frac{18}{95}$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمراوين من هذا الصندوق $C_2^2 = 1$ و منه احتمال سحب كرتين حمراوين هو $P_{u_2}(RR) = \frac{1}{190}$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمراوين من هذا الصندوق $C_{18}^2 = 153$ و منه احتمال سحب كرتين سوداوين هو

$$P_{u_2}(NN) = \frac{153}{190}$$

السحب من U_3

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين مختلفتين في اللون $C_{17}^1 \times C_3^1 = 51$ و منه احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون هو

$$P_{u_3}(RN) = \frac{51}{190}$$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين حمراوين من هذا الصندوق $C_3^2 = 3$ و منه احتمال سحب كرتين حمراوين هو $P_{u_3}(RR) = \frac{3}{190}$

عدد الحالات الملائمة لسحب كرتين سوداوين من هذا الصندوق $C_{17}^2 = 136$ و منه احتمال سحب كرتين سوداوين هو

$$P_{u_3}(NN) = \frac{136}{190}$$

(2) المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ - تحديدي قيم المتغير العشوائي X هي 0 و 1 و 2

ب - يتبين أن احتمال الحادثة ($X=2$) يساوي $\frac{2}{285}$: سحب كرتين حمراوين هو اما السحب من الكيس الثاني او الثالث .

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{190} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{190} = \frac{4}{570} = \frac{2}{285}$$

ج- بين أن احتمال الحادثة ($X=1$) يساوي $\frac{53}{285}$. سحب كرتين مختلفتين في اللون هو اما السحب من الكيس الأول او الثاني أو

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{19}{190} + \frac{1}{3} \times \frac{36}{190} + \frac{1}{3} \times \frac{51}{190} = \frac{106}{570} = \frac{53}{285} \quad \text{الثالث}$$

د- استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{230}{285}$	$\frac{53}{285}$	$\frac{2}{285}$

$$E(X) = \frac{230}{285} \times 0 + \frac{53}{285} \times 1 + \frac{2}{285} \times 2 = \frac{57}{285} \quad : \quad \text{حساب أمله الرياضيائي } E(X)$$

(3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3 ؟..... (خاص بشعبة الرياضيات و)

$$P_{RR}(U_3) = \frac{P(U_3 \cap RR)}{P(RR)} = \frac{\left(\frac{3}{570}\right)}{\left(\frac{2}{285}\right)} = \frac{3}{4}, \quad \text{إذن} \quad P(U_3 \cap RR) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{190} = \frac{3}{570} \quad \text{منه} \quad P(RR) = P(X=2) = \frac{2}{285}$$

$$P_{RR}(U_3) = \frac{P(U_3 \cap RR)}{P(RR)} = \frac{\left(\frac{3}{190 \times 3}\right)}{\left(\frac{2}{285}\right)} = \frac{285}{380} = \frac{3}{4}$$

(4) حساب احتمال الحصول على كرة حمراء على الأكثر..... (خاص بالتقني رياضي)

$$P(A) = \frac{230}{285} + \frac{53}{285} = \frac{283}{285}$$

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية حدها الأول $u_1 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n$.

(1) أ- حساب الحدود : $u_2 = \frac{1}{8} u_1 = \frac{1}{32}$ و $u_3 = \frac{2}{12} u_2 = \frac{1}{192}$

ب- البره ان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$ لدينا $u_1 > 0$ محققة

فرض ان $u_n > 0$ و لنبرهن $u_{n+1} > 0$

بما أن $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}u_n$ موجبة و منه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

ج-دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{n}{4(n+1)}u_n - u_n = \frac{(-3n-4)}{4(n+1)}u_n$ بما أن $u_n > 0$ فإن الفرق سالب و منه المتتالية (u_n) متناقصة و محدود من الأسفل فهي متقاربة .

حساب نهايتها نضع $\lim u_n = l$ و لدينا $\lim u_{n+1} = \lim \frac{n}{4(n+1)}u_n$ و منه $l = \frac{1}{4}l$ إذن $l = 0$

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = n.2^n.u_n$.

أ - نبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_1 :

$v_{n+1} = (n+1).2^{n+1}.u_{n+1} = (n+1)2^{n+1} \frac{n}{4(n+1)}u_n = \frac{n.2^n.u_n}{2} = \frac{1}{2}v_n$

حدها الأول $v_1 = 2u_1 = \frac{1}{2}$.

ب - كلتق v_n بدلالة n : $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

أستدلج $u_n = \frac{1}{n.2^n}v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

إثلبت تقارب المتتالية (v_n) : $\lim u_n = \lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = 0$ و منه فهي متقاربة

(3) حساب المجموع $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$ و منه $S_n = \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right] = - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 \right]$

(4) حساب الجداء $P_n = u_1(2u_2)(3u_3)\dots(nu_n)$ و لدينا $v_n = n.2^n.u_n$ و منه $\frac{v_n}{2^n} = n.u_n$ نضع $w_n = \frac{v_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+4+6+\dots+2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(2+2n)}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(n+1)}$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي $f(x) = \frac{1}{2}x^2 [3 - \ln(x^2)] + 1 : x > 0$ و $f(0) = 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم

متعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(2) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند $0 : 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} [3 - \ln(x^2)] = 0$

تفسير النتيجة هندسياً المنحى الممثل للدالة (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه معدوم .

$$(3) \text{ دراسة اتجاه تغير الدالة } f \text{ لدينا } \begin{cases} f'(x) = x[3 - \ln(x^2)] - x : x > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \text{ أي أن } \begin{cases} f'(x) = x[2 - \ln(x^2)] : x > 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

تتعدم المشتقة عند $x = e$ تكون موجبة على المجال $[0; e]$ فالدالة f متزايدة على هذا المجال و تكون سالبة على المجال

$[e; +\infty[$ فالدالة f متناقصة على هذا المجال

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}e^2 + 1$	$-\infty$

جدول تغيراتها :

(4) يتبين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$ و $f(\alpha) = 0$ بما الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $[4,6; 4,7]$

و $f(4,6) = 0,45$; $f(4,7) = -0,05$ فحسب نظرية القيم المتوسطة المعادلة $f(\alpha) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$. \quad 4,6 < \alpha < 4,7$$

(5) كتلقب معادلة المماس (Δ) للمنحى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = 2(x-1) + \frac{5}{2}$ أي $y = 2x + \frac{1}{2}$

(6) نعتبر g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ - حساب $g'(x)$ و $g''(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - 2 = x[2 - \ln(x^2)] - 2 \quad \text{و منه} \quad g''(x) = [2 - \ln(x^2)] - 2 = -\ln(x^2)$$

دراسة اتجاه تغير الدالة g' : بما أن $g''(x) = 0$ يعني أن $x = 1$ و g'' موجبة على المجال $]0; 1[$ و منه g' متزايدة على

هذا المجال و g'' سالبة على المجال $]1; +\infty[$ و منه g' متناقصة على هذا المجال .

استنتاج إشارتها على المجال $]0; +\infty[$ مما سبق نستنتج أن g' تقبل قيمة حدية كبرى هي $g'(1) = 0$ و منه فإن

$g'(x)$ سالبة على المجال $]0; +\infty[$.

ب - تحدي اتجاه تغير الدالة g بما أن g' سالبة على $]0; +\infty[$ و منه g متناقصة على مجال تعريفها

$$g(1) = f(1) - 2(1) - \frac{1}{2} = 0 : (\Delta) \text{ بالنسبة للمستقيم } (C_f)$$

و منه $g(x)$ موجبة على المجال $]0; 1[$ و سالبة على المجال $]1; +\infty[$

(C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]0; 1[$ و (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]1; +\infty[$

ج-أنشاء المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

