الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية البليدة

إمتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي — ثانوية المصالحة الوطنية- بني تامو-

الشعبة: علوم تجريبية — دورة : ماي 2018

إختبار في مادة: الرياضيات — المدة:03 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) عيّن العددين المركبين a و b علما أنّ : $\begin{cases} \bar{a} - \bar{b} = 1 + 3i \\ a + ib = -1 + 3i \end{cases}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $a = 3 + i$ و $b = 2 + 4i$ ، و نفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

أ) عيّن لاحقة النقطة C صورة O بالإنسحاب T .

ب) أحسب العدد $\frac{z_c - z_A}{z_B}$ ، ثمّ أكتبه على الشكل الأسي .

- ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ و $[OB]$ ؟ .

ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثمّ عيّن لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$.

3) نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O و يحوّل B إلى C :

أ) أعط الكتابة المركّبة للتشابه المباشر S .

ب) ماهي صورة النقطة A بالتشابه S ؟ .

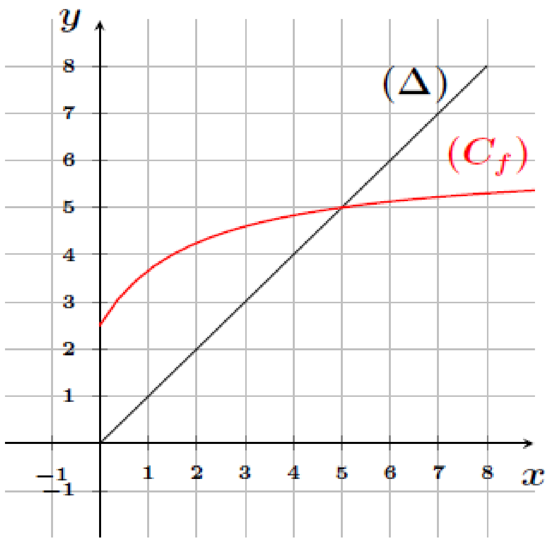
ج) نضع : $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$

- أعط الكتابة المركّبة للتحويل S^4 ، و ماطبيعة هذا التحويل ؟ .

التمرين الثاني:(04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$ ، و ليكن (C_f) المنحني الممثل لها، (Δ) هوالمستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل)



I) تحقّق أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) أ) أنقل الشكل المقابل ثمّ مثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) و تقاربها .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 5$.

3) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة ؟ .

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

5) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + ... + \frac{1}{u_n + 1}$.

<u>التمرين الثالث:</u> (04 نقاط)

I) يحتوي و عاء على n كرة بيضاء ، حيث : $(n \ge 2)$ وَ 5 كرات حمراء وَ 3 كرات خضراء ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء :

1) ما إحتمال سحب كرتين بيضاوين ؟ .

2) نسمي $p(n)$ إحتمال سحب كرتين من نفس اللّون .

أ) بيّن أنّ : $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$.

ب) أحسب : $\lim_{n \to +\infty} p(n)$ ، ثمّ فسّر النتيجة المحصّل عليها .

II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب و يقوم بنفس التجربة الأولى : في البداية يدفع $30DA$ إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب $40DA$ ، و إذا وجدهما من لونين مختلفين يكسب $5DA$.

نسمي الربح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع أوّلا و المبلغ الذي يكسبه ، و ليكن المتغيّر العشوائي X هو الربح الجبري للاعب :

1) ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X ؟ .

2) أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

III) فيما يلي نعتبر $n = 2$ ، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع :

1) شكل شجرة الإحتمالات التي تنمذج التجربة .

2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " سحب كرتين من نفس اللون " ، B : " سحب كرة خضراء واحدة على الأقل " .

3) نفرض أنّ الكرية في السحبة الأولى كانت خضراء ، ما إحتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية ؟ .

<u>التمرين الرابع:</u> (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـــــ : $g(x) = x + 2 - e^x$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g على $\left[0;+\infty\right[$ ، وَ عيّن نهاية g عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α على $\left]0;+\infty\right[$.

ب) تحقّق أنّ : $1{,}14 < \alpha < 1{,}15$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $\left[0;+\infty\right[$.

II) نعرّف على المجال $\left[0;+\infty\right[$ الدالة f كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\left[0;+\infty\right[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x ، من $\left[0;+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{e^x\times g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $\left[0;+\infty\right[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

ج) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $\left[0;+\infty\right[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^x+1}$ ، حيث : $u(x)=e^x-xe^x-1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة u على $\left[0;+\infty\right[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$.

ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

د) أرسم كلا من (T) و المنحني (C_f) ، الوحدة : $4cm$.

III) 1) عيّن دالة أصلية F للدالة f على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

2) أحسب بـــ cm^2 مساحة الحيّز المحدّد بالمنحني (C_f) وَ المماس (T) وَ محور التراتيب وَ المستقيم ذو المعادلة $x=1$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)(z^2+2z+2)=0$

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. النقط A ، B ، C و D لواحقها :

$z_A=i$ ، $z_B=2$ ، $z_C=-1-i$ ، $z_D=1-2i$ على الترتيب .

أ) تحقق أن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;1);(B;-1);(C;-1)\}$.

ب) أكتب العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ج) أكتب العدد المركب $-4+4i$ على الشكل الأسي ، ثم أحسب $(-4+4i)^{2018}$.

3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن B ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\dfrac{iz-4+2i}{z-2}$.

أ) تحقق أن : $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$.

ب) بين أن : $AM'\times BM=4\sqrt{2}$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\arg(z'-i)=\dfrac{\pi}{4}$.

– تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=2+i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـــ : $u_0=1$ وَ من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$.

1) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<2$.

2) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

3) إستنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة . ما هي نهايتها ؟ .

4) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(2-u_n)$.

ب) إستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq 2-u_n\leq(\dfrac{4}{5})^n$ ، ثمّ عيّن نهاية المتتالية (u_n) من جديد

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر المستوي (P) معادلته : $2x+y-2z+4=0$

وَ النقط $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B وَ C تعيّن مستويا .

ب) تحقّق أنّ (P) هو المستوي (ABC) .

2) أ) بيّن أنّ المثلث ABC قائم .

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O وَ العمودي على (P) .

ج) النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة O على (P) ، أحسب الطول OK .

3) النقطة G هي مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$

أ) أحسب إحداثيات النقطة G .

ب) أحسب المسافة بين النقطة G وَ المستوي (P) .

4) (Γ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

أ) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وَ عناصرها المميزة .

ب) ما طبيعة $(\Gamma)\cap(P)$ ؟ .

ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $GABC$.

<u>التمرين الرابع:</u> (08 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بــ : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.

1) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$.

ب) عيّن نهايات الدالة g عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) أ) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g وَ شكل جدول تغيّراتها .

ب) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-1+\dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا .

2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل لــ(C) بجوار $+\infty$ ، ثمّ حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة $A(1;0)$.

6) أرسم كلا من (Δ) ، (T) وَ المنحني (C) .

7) لتكن (d_m)عائلات المستقيمات المعرفة بــ : $y=mx-m$ ، حيث m وسيط حقيقي

أ) تحقّق أنّ جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A .

ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=mx-m$ حلان متمايزان .

III) 1) باستعمال التكامل بالتجزئة ، بيّن أنّ : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx=1-\frac{2}{e}$.

2) أحسب بــ$u.a$ مساحة الحيّز للمستوي المحدد بالمنحني (C) وَ (Δ) وَ المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=1$ وَ $x=e$ (يجب تقديم القيمة المضبوطة لمساحة الحيز) .

إنتهى الموضوع الثاني

التَصْحِيح المفصّل للبكالوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

1) تعيين العددين المركبين a وَ b : ------------------------

لدينا الجملة : $\begin{cases} \overline{a}-\overline{b}=1+3i \\ a+ib=-1+3i \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a-b=1-3i ....(1) \\ a+ib=-1+3i .....(2) \end{cases}$ بالطرح نجد : $-b-ib=2-6i$ ، أي :

$b(-1-i)=2-6i$ ، أي : $b=\dfrac{2-6i}{-1-i}$ ، ومنه : $\boxed{b=2+4i}$. و بالتعويض نجد : $\boxed{a=3+i}$.

2) أ) تعيين لاحقة C صورة O بالإنسحاب T : ------------------------

بما أنّ C صورة O بالإنسحاب T فإن : $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ ، و منه : $z_C=z_B-z_A$ ، أي : $\boxed{z_C=-1+3i}$.

ب) حساب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسي : ------------------------

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=\dfrac{-1+3i-3-i}{2+4i}=\dfrac{-4+2i}{2+4i}=i$ ، أي : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

إذن : $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B}\right|=1$ وَ $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، ومنه : $AC=OB$ وَ $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان و متعامدتان .

ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة E : ------------------------

بما أنّ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$ فإنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ، وَ بما أنّ $[AC]$ ، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربّع .

E هي مركز تناظر الرباعي $OABC$ ، أي : هي منتصف القطرين ، و منه : $z_E=\dfrac{z_O+z_B}{2}=1+2i$.

3) أ) الكتابة المركبة للتشابه S: ------------------------

لدينا : S مركزه O و يحوّل B إلى C أي : $z'-z_O=ke^{i\theta}(z-z_O)$ ، أي : $z'=ke^{i\theta}z$ ، و منه :

$z_C=ke^{i\theta}z_B$ ، أي : $\dfrac{z_C}{z_B}=ke^{i\theta}$.

نحسب $\dfrac{z_C}{z_B}$: $\dfrac{z_C}{z_B}=\dfrac{-1+3i}{2+4i}=\left(\dfrac{-1+3i}{2+4i}\right)\left(\dfrac{2-4i}{2-4i}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

لدينا: $\begin{cases} \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \end{cases}$ ، إذن عبارة التشابة S هي : $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ أو $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$.

ب)صورة A بالتشابه S : ------------------------

لدينا : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z$ ، أي : $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z_A$ ، أي: $z'=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)(3+i)$ ، و منه: $z'=1+2i$.

إذن : E هي صورة A بالتشابه S .

ج) العبارة المركبة للتحول S^4 ، و طبيعته : ------------------------

لدينا : $S^4=S\circ S\circ S\circ S$ ، أي أنّ S^4 هو تشابه مباشر نسبته : $k=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\dfrac{1}{4}$ ، وزاويته : $\theta=4\times\dfrac{\pi}{4}=\pi$.

و مركزه : O .

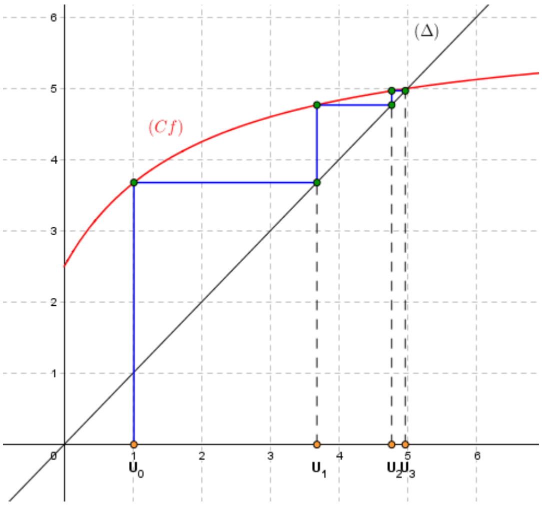
الكتابة المركبة : $z'=\frac{1}{4}e^{i\pi}.z$ ، أي : $z'=-\frac{1}{4}z$ ، لأنّ : $e^{i\pi}=-1$.

إذن التحويل S^4 هو **تحاكي** مركزه O و نسبته $-\frac{1}{4}$.

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية) التنقيط

I) **التحقق أنّ f متزايدة على** $[0;+\infty[$: --

لدينا : $f'(x)=\frac{7}{(x+2)^2}>0$ ، و منه الدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$.



II(1) أ) **تمثيل الحدود** u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3**:**(أنظر الشكل المقابل)

ب) التخمين : --

نلاحظ أنّ المتتالية (u_n) متزايدة ، و تتقارب حدودها نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم (Δ).

2) البرهان أنّ : $1\le u_n\le 5$ **:**-------------------------

نضع : $P(n): 1\le u_n\le 5$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي : $1\le u_0\le 5$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $1\le u_n\le 5$ صحيحة و نبين أن $1\le u_{n+1}\le 5$.

- لدينا فرضا أنّ: $1\le u_n\le 5$ ، و بما أنّ f متزايدة على $[1;5]$ ، فإنّ : $f(1)\le f(u_n)\le f(5)$ ، أي : $\frac{11}{3}\le u_{n+1}\le 5$ ، ومنه : $1\le u_{n+1}\le 5$. و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

3) دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) **و تقاربها:** ---

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$:

لدينا: $\frac{-u_n^2+4u_n+5}{u_n+2}=\frac{6u_n+5}{u_n+2}-u_n=u_{n+1}-u_n$. الآن ندرس إشارة $-u_n^2+4u_n+5$ على المجال $[1;5]$:

بعد الدراسة نلاحظ أنّه على المجال $[1;5]$: $-u_n^2+4u_n+5\ge 0$ ، و منه المتتالية (u_n) متزايدة .

- بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى ، فهي **متقاربة** .

3)أ) بيان أن (v_n) **متتالية هندسية :** --

لدينا: $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$ ،أي: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-5}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{6u_n+5}{u_n+2}-5}{\frac{6u_n+5}{u_n+2}+1}=\frac{\frac{6u_n+5-5u_n-10}{u_n+2}}{\frac{6u_n+5+u_n+2}{u_n+2}}=\frac{u_n-5}{7u_n+7}=\frac{1}{7}\times\frac{u_n-5}{u_n+1}$ ،

و منه : $v_{n+1}=\frac{1}{7}v_n$ ، إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{1}{7}$ ، و حدها الأول : $v_0=-2$.

ب) التعبير عن v_n **بدلالة** n **و** u_n **بدلالة** n **:**----------- ---------------------------------------

- عبارة v_n **:** $v_n=v_0\times q^n$ ، أي : $v_n=-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$.

- عبارة u_n **:** لدينا $v_n=\frac{u_n-5}{u_n+1}$ **أي:** $v_n(u_n+1)=u_n-5$ ، أي: $v_nu_n+v_n=u_n-5$ ، أي :

$v_n u_n - u_n = -v_n - 5$ ، أي : $u_n(v_n - 1) = -v_n - 5$ ، و منه : $u_n = \frac{-v_n - 5}{v_n - 1}$ ، أي: $u_n = \frac{-2\left(\frac{1}{7}\right)^n - 5}{-2\left(\frac{1}{7}\right)^n - 1}$.

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n): --

نعلم أنّ : $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ ، لأنّ : $-1 < \frac{1}{7} < 1$ ، و منه : $\lim_{n\to\infty} u_n = 5$.

5) حساب المجموع S_n : --

لدينا : $S_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + ... + \frac{1}{u_n+1}$. **نعلم أنّ :** $v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$ أي: $v_n = \frac{u_n + 1 - 6}{u_n + 1}$ أي: $v_n = 1 - \frac{6}{u_n + 1}$

ومنه: $\frac{6}{u_n+1} = 1 - v_n$ ، أي: $\frac{1}{u_n+1} = \frac{1-v_n}{6}$ (بعد القسمة على 6) .

إذن: $S_n = \frac{1-v_0}{6} + \frac{1-v_2}{6} + ... + \frac{1-v_n}{6}$ ، أي: $S_n = \frac{1}{6}\left[\underbrace{(1+1+....1)}_{n \text{ مرة}} - (v_0 + v_2 + ... + v_n)\right]$ ، أي :

$S_n = \frac{1}{6}\left[(n+1) - v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$ ، أي : $S_n = \frac{1}{6}\left[(n+1) - 2 \times \frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{7}}\right]$ ، أي :

$S_n = \frac{1}{6}\left[n+1+2\times\frac{7}{6}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)\right]$ ، و منه : $S_n = \frac{1}{6}\left[n+1+\frac{7}{3}\left(1-\left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}\right)\right]$.

تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الإحتمالات)	التنقيط

I) أوّلا نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب :

$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$.

1) إحتمال سحب كرتين بيضاوين : ---

أولا نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب : $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.

إذن إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو: $\frac{\frac{n^2-n}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{n^2-n}{(n+8)(n+7)}$.

2) أ) بيان أنّ : $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$: ---

$P(n)$ هي إحتمال سحب كرتين من نفس اللون ، إذن : $P(n) = \frac{C_n^2 + C_5^2 + C_3^2}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 10 + 3}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$ ،

أي: $P(n) = \frac{\frac{n^2-n+20+6}{2}}{\frac{(n+8)(n+7)}{2}}$ ، و منه : $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$ ، **و هو المطلوب .**

ب) حساب $\lim\limits_{n\to\infty} P(n)$ ، ثم نفسر النتيجة : --

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \; .$$

التفسير : الحادثة " **سحب كرتين من نفس اللون** " تكون حادثة أكيدة لما n يكون كبيرا بالقدر الكافي .

II) **1) قيم المتغير العشوائي** X **:** --

المتغير العشوائي يعبّر عن الربح الجبري للاعب (الفرق بين المبلغ المدفوع أولا و المبلغ الذي يكسبه) ،

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : $(X=10): X = 40-30 = 10$ ، $(X=-25): X = 5-30 = -25$.

2) تعيين قانون الإحتمال، و حساب أمله الرياضي : ---

- حالة $(X=10)$ أي الكرتان المسحوبتان من نفس اللون ، إذن : $P(X=10) = P(n) ......(n=4)$ ، أي :

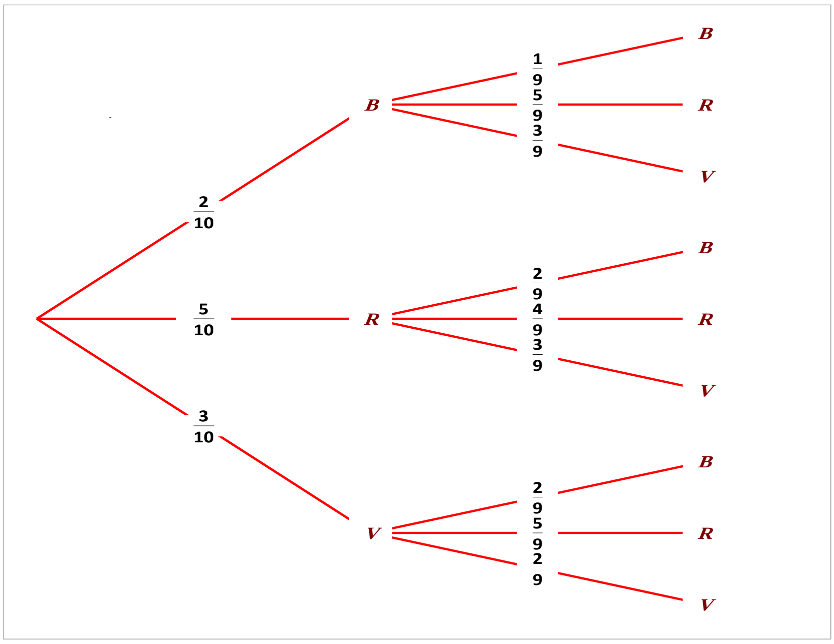
$$P(X=10) = \frac{38}{132} = \frac{19}{66} \; .$$

- حالة $P(X=-25)$ أي الكرتان المسحوبتان مختلفتان في اللون (الحادثة العكسية لـ$P(n)$) ، إذن :

$$P(X=-25) = 1 - \frac{19}{66} = \frac{47}{66} \; .$$

حساب الأمل الرياضي : $E(X) = \sum_{i=1}^{2} X_i . P_i$ ، أي : $E(X) = \frac{(10\times 19) + (-25\times 47)}{66} = \frac{-985}{66}$.

III) **1) تشكيل شجرة الإحتمالات التي تنمذج الوضعية :** ---



2) حساب إحتمال الحوادث التالية : --

- سحب كرتين من نفس اللون : $P(A) = \left(\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right)$ ، أي: $P(A) = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$.

- سحب كرة خضراء واحدة على الأقل : $P(B) = \left(\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\right) + \left(\frac{5}{10}\times\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{2}{10}\times\frac{3}{9}\right)$ ، $P(B) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$.

3) حساب الإحتمال الشرطي : --

علما أنّ الكرة المسحوبة أولا خضراء فإحتمال أن سحب كرة حمراء ثانيا هو : $\frac{5}{9}$ (أنظر شجرة الإحتمالات)

التنقيط	(الدالة الأسية)	تصحيح التمرين الرابع (7نقاط)

الجزء الأول:

1) دراسة إتجاه تغير الدالة g : --

الدالة g قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي: $g'(x)=1-e^{x}$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g'(x)\leq 0$.

الخلاصة: الدالة g متناقصة على $[0;+\infty[$.

جدول التغيرات الدالة g :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1 \searrow -\infty$

- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2-e^{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{2}{x}-\frac{e^{x}}{x}\right)=-\infty$$

3) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $[0;+\infty[$: -----------------------------------

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما علـى $]0;+\infty[$ و لدينا، $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\times\lim\limits_{x\to 0} g(x)<0$ و بتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد عدد حقيقي α من $]0;+\infty[$ حيث $g(\alpha)=0$.

ب) التحقّق أنّ : $1{,}14<\alpha<1{,}15$: بما أنّ : $\begin{cases} g(1{,}14)=0{,}01\\ g(1{,}15)=-0{,}008\end{cases}$ أي $g(1{,}14)\times g(1{,}15)<0$ ، فإن :

$g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $]1{,}14;1{,}15[$ ، إذن : $1{,}14<\alpha<1{,}15$.

4) إشـــارة $g(x)$: --

x	0 $\qquad$ α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$

الجزء الثاني: لدينا : $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$

1) أ) بيان أنه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ---

لدينا: $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}=\dfrac{\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}}}{\dfrac{xe^{x}+1}{e^{x}}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{x}}}{x+\dfrac{1}{e^{x}}}=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، إذن : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، **و هو المطلوب** .

ب) إستنتاج نـهاية f عند $+\infty$: --

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}\right)$ ، نضع $\begin{cases}-x=t\\ x\to+\infty\\ t\to-\infty\end{cases}$ ، أي : $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(\dfrac{1-e^{t}}{-t+e^{t}}\right)=0$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{t\to-\infty} e^{t}=0\\ \lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{-t}=0\end{cases}$.

2) أ) بيان أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times g(x)}{(xe^{x}+1)^{2}}$: ------------------------------------

الدالة f قابلة للإستقاق على $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{e^{x}\left(xe^{x}+1\right)-\left(e^{x}+xe^{x}\right)\left(e^{x}-1\right)}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}=\frac{xe^{2x}+e^{x}-e^{2x}+e^{x}-xe^{2x}+xe^{x}}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}=\frac{xe^{x}+2e^{x}-e^{2x}}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}$$

أي : $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times\left(x+2-e^{x}\right)}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{e^{x}\times g(x)}{\left(xe^{x}+1\right)^{2}}$ ، **و هو المطلوب .**

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها : --

نلاحظ أنّ إشـــــارة $f'(x)$ من إشـــارة $g(x)$.

- الدالة f متزايدة تماما على $]0;\alpha[$

- الدالة f متناقصة تماما على $]\alpha;+\infty[$

x	0 α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$

- جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow 0$

ج) بيان أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$: -------------

لدينا : $f(\alpha)=\dfrac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$ ، و لدينا أيضا : $g(\alpha)=0$ ، أي :

$\alpha+2-e^{\alpha}=0$ ، أي : $e^{\alpha}=\alpha+2$ ، الآن نعوض قيمة e^{α} في $f(\alpha)$:

$f(\alpha)=\dfrac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\dfrac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ، و منه : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ **وهو المطلوب .**

- إستنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$: لدينا $1,14<\alpha<1,15$ ،أي : $2,14<\alpha+1<2,15$ ،أي : $\dfrac{1}{2,15}<\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{2,14}$

و منه : $0,465<f(\alpha)<0,467$.

3) كتابة معادلة المماس (T) **لـ** (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : ------------------------------------

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، أي : $\boxed{(T): y=x}$ ، لأنّ : $\begin{cases} f'(0)=1 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

4) أ) التحقق أنّه من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$ ------------------------------

لدينا : $u(x)=e^{x}-xe^{x}-1$. $f(x)-x=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}-x=\dfrac{e^{x}-1-x(xe^{x}+1)}{xe^{x}+1}=\dfrac{(x+1)(e^{x}-xe^{x}-1)}{xe^{x}+1}$ ،

و منه : $f(x)-x=\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$ ، **و هو المطلوب .**

ب) دراسة إتجاه تغير الدالة u ، واستنتاج إشارة $u(x)$: --

الدالة u قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$: $u'(x)=e^{x}-(e^{x}+xe^{x})=-xe^{x}$ ، و منه : $u(x)\le 0$.

إذن u متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ، و لدينا أيضا : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=-\infty \\ u(0)=0 \end{cases}$ ، من هذا و ذاك نستنتج أن :

$u(x)\le 0$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$.

ج) إستنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة لـ (T): --

لاستنتاج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) يكفي

دراسة إشارة : $\dfrac{(x+1)\times u(x)}{xe^{x}+1}$.

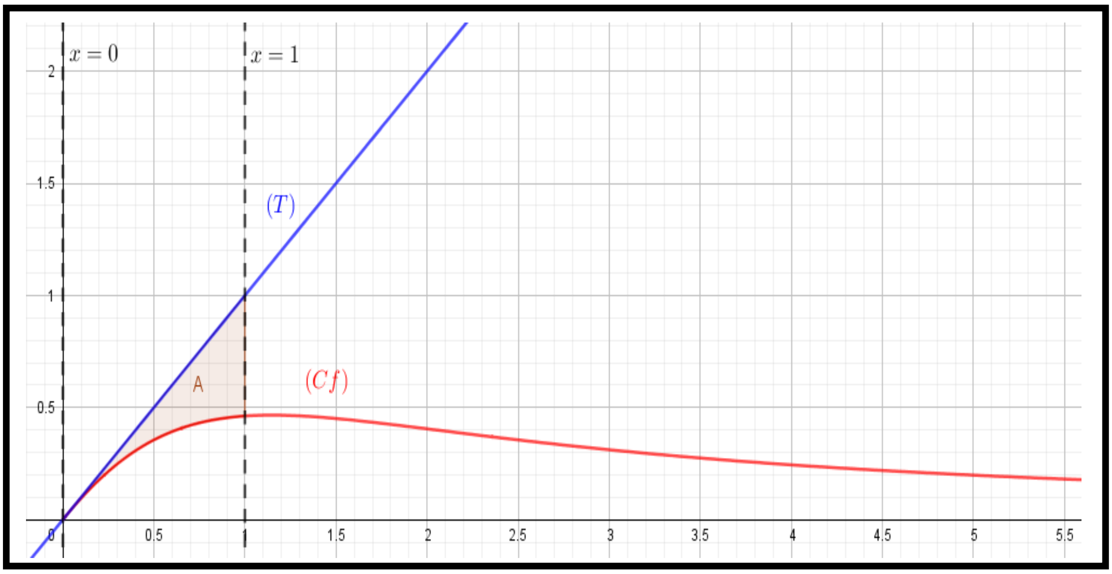
لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $xe^{x}+1\ge 0$ ، إذن الإشارة

من إشارة $(x+1)\times u(x)$.

إذن نلخص الوضعية في الجدول المقابل.

x	0	$+\infty$
$(x+1)$		$+$
$u(x)$		$-$
$(x+1)u(x)$		$-$
الوضعية	(T) يمس (C_f)	(C_f) يقع تحت (T)

د) رسم كلا من (T) و المنحني (C_f) : ---



الجزء الثالث :

1) تعيين دالة أصلية F للدالة f على المجال $[0;+\infty[$: ---

نستعمل هنا العبارة التالية : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ ، نلاحظ أنّ : $f(x)=\dfrac{U'}{U}$ ، و منه :

$F(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)+c$ ، حيث c ثابت حقيقي .

2) حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) وَ (T) و محور التراتيب و $x=1$:--------------------

$A=\int_0^1 x-f(x)dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx$ ، أي :

$A=\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1-\left[\ln\left(x+e^{-x}\right)\right]_0^1=\dfrac{1}{2}-\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{e}\right)\right)\approx 0{,}1867$.

حساب A بـ cm^2 : أي : $0{,}1867\times16=2{,}9872cm^2$. و منه : $\boxed{A=2{,}9872cm^2}$.

كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

التَصْحِيحْ المفصّل للبكالوريَا التجْريبي دَورة مَايْ 2018 — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الأعداد المركبة)	التنقيط

1) لدينا $(⅄)\ ...\ (z-i)(z^2+2z+2)=0$ يكافئ $\begin{cases} z-i=0\ ; z=i \\ z^2+2z+2=0\ ...(♠) \end{cases}$

حلول المعادلة $(♠)$: $\Delta=-4=(2i)^2$ ومنه $z_1=\dfrac{-2+2i}{2}=-1+i$ و $z_2=\overline{z_1}=-1-i$

الخلاصة: حلول المعادلة $(⅄)$ ، $S=\{i\ ;-1-i\ ;-1+i\}$

2) أ) التحقق أن D مرجح $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$: --

يكفي التحقق أن $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ أي $z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}=0$

لدينا $z_{\overrightarrow{DA}}-z_{\overrightarrow{DB}}-z_{\overrightarrow{DC}}=z_A-z_D-(z_B-z_D)-(z_C-z_D)=z_A-z_B-z_C-z_D=i-2+1+i-1+2i=0$

الخلاصة: D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,-1)\}$

ب) كتابة العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي: ---

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}=\frac{1-2i-i}{2+1+i}=\frac{1-3i}{3+i}=\frac{-i\,(i+3)}{3+i}=-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

التفسير الهندسي :

$\left|\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right|=1$ يكافئ $AD=BC$

$\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_C}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ يكافئ $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AD})=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\ /k\in\mathbb{R}$

طبيعة الرباعي $ABDC$:

بما أن $AD=BC$ و $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ فإن الرباعي $ABDC$ مربع لأن قطريه متساويين و متعامدين

ج) كتابة العدد $-4+4i$ على الشكل الأسي و حساب $(-4+4i)^{2018}$: ----------------------------------

الشكل الاسي لـ $-4+4i$: لدينا ، $|-4+4i|=|-4(1-i)|=|-4||1-i|=4\sqrt{2}$

لتكن θ عمدة لـ $-4+4i$ ومنه $\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{-4}{4\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ ومنه نجد، $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ $\Leftarrow$ $\boxed{-4+4i=4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}}$

- حساب $(-4+4i)^{2018}$: $(-4+4i)^{2018}=\left(4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^{2018}=\left(4\sqrt{2}\right)^{2018}e^{\frac{6054\pi}{4}i}=\left(4\sqrt{2}\right)^{2018}e^{\frac{3\pi}{2}i}=\left(4\sqrt{2}\right)^{2018}(-i)$

3) أ) حساب $z'-i$: --

$$z'-i=\frac{iz-4+2i}{z-2}-i=\frac{iz-4+2i-i\,(z-2)}{z-2}=\frac{iz-4+2i+iz+2i}{z-2}=\frac{-4+4i}{z-2}$$

ب) --

لدينا، $z'-i=\dfrac{-4+4i}{z-2}$ ، أي: $|z'-z_A|=\dfrac{|-4+4i|}{|z-z_B|}$ ، ومنه: $AM'=\dfrac{4\sqrt{2}}{BM}$ أي: $AM'\times BM=4\sqrt{2}$

ومن جهة أخرى نجد : $\arg(z'-i)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-2}\right)$ ، ومنه: $\arg(z'-z_A)=\arg\left(\dfrac{-4+4i}{z-z_B}\right)$ ، أي :

$\arg(z'-z_A)=\arg(-4+4i)-\arg(z-z_B)$ ، ومنه: $\arg(z'-z_A)+\arg(z-z_B)=\arg(-4+4i)$ ،

أي: $k \in \mathbb{R}$ / $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$.

4) أ) التحقق أن E تنتمي إلى (Γ) : --

لدينا، $z'-i=\frac{-4+4i}{z_E-2}=\frac{-4+4i}{2+i-2}=\frac{-4+4i}{i}=4+4i$

ومنه $\arg(z'-i)=\arg(4+4i)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

الخلاصة:
النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

ب) تعيين طبيعة المجموعة (Γ) : --

$\arg(z'-i)=\frac{\pi}{4}$ يكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{\pi}{4}$ و لدينا، $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=\frac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})$ ومنه $\frac{3\pi}{4}-(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{4}$

ومنه $(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{2}$ ومنه : مجموعة النقط M من المستوي هي : **نصف المستقيم** المفتوح $(BE]$ الذي رؤسه B و الموجه بالشعاع $\vec{w}$ حيث $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{2}$.

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط) (المتتاليات العددية)	التنقيط

لدينا : $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1} \end{cases}$.

1) إثبات أنّ $0<u_n<2$: --

نضع : $P(n): 0<u_n<2$

المرحلة1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي : $0<u_0<2$ و منه $P(0)$ محققة .

المرحلة2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $0<u_n<2$ صحيحة و نبين أن : $0<u_{n+1}<2$.

- لدينا فرضا أنّ: $0<u_n<2$، إذن : $\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}>0$ ، أي : $u_{n+1}>0$. **يبقى أن نبيّن أنّ :** $u_{n+1}<2$.

نحسب $u_{n+1}-2$ **:** $\frac{u_n^2(u_n-2)}{u_n^2+1}=\frac{u_n^3-2u_n^2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^3+2-2u_n^2-2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-2=u_{n+1}-2$ ، بما أنّ: $u_n<2$ ،

فرضا ، إذن : $u_n-2<0$ ، و منه: $u_{n+1}-2<0$ ، إذن : $u_{n+1}<2$ ، **وعليه :** $0<u_{n+1}<2$.

و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) دراسة رتابة المتتالية (u_n): --

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1}-u_n$:

لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}-u_n=\frac{-u_n^3+2-u_n^3-u_n}{u_n^2+1}=\frac{2-u_n}{u_n^2+1}>0$ ، لأنّ : لدينا $u_n<2$ ، إذن : $2-u_n>0$.

و منه المتتالية (u_n) **متزايدة** على $\mathbb{N}$.

3)إستنتاج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة و حساب نهايتها: --

بما أنّ المتتالية (u_n) متزايدة وَ محدودة من الأعلى بـ 2 ، إذن هي **متقاربة** .

- نهاية (u_n) : (u_n) متقاربة معناه : $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty} u_n=l$ ، لدينا: $u_{n+1}=\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}$ ، أي: $l=\frac{l_n^3+2}{l_n^2+1}$ ،

ومنه : $l^3+l=l^3+2$ ، إذن: $\boxed{l=2}$.

4) أ)بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$ --------------------------------------

نحسب الفرق $2-u_{n+1}$: $2-u_{n+1}=2-\frac{u_n^3+2}{u_n^2+1}=\frac{2u_n^2+2-u_n^3-2}{u_n^2+1}=\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}$.

نقارن النتيجة مع $\frac{4}{5}(2-u_n)$:

$\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)=(2-u_n)\left[\frac{u_n^2}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}\right]=(2-u_n)\left(\frac{5u_n^2-4u_n^2-4}{5(u_n^2+1)}\right)=(2-u_n)\left(\frac{u_n^2-4}{5(u_n^2+1)}\right)$ ،

أي : $\frac{u_n^2(2-u_n)}{u_n^2+1}-\frac{4}{5}(2-u_n)=(2-u_n)\left(\frac{(u_n-2)(u_n+2)}{5(u_n^2+1)}\right)=\frac{-(u_n-2)^2(u_n+2)}{5(u_n^2+1)}<0$ ،

إذن : $2-u_{n+1}<\frac{4}{5}(2-u_n)$.

ب) إثبات أنّ $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم تعيين نهاية (u_n) من جديد : -----------------------------------

لدينا من السؤال أ) : $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{4}{5}(2-u_n)$ ، إذن : $\begin{cases}0\le 2-u_1\le\frac{4}{5}(2-u_0)\\0\le 2-u_2\le\frac{4}{5}(2-u_1)\\ \vdots\\0\le 2-u_n\le\frac{4}{5}(2-u_{n-1})\end{cases}$ بالضرب نجد :

$0\le(2-u_1)(2-u_2)\times\ldots\times(2-u_n)\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-u_0)(2-u_1)\times\ldots\times(2-u_{n-1})$ ، باختزال نحصل على :

$0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-u_0)$ ، أي: $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n\times(2-1)$ ، **ومنه :** $0\le 2-u_n\le\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

نهاية (u_n) **:** بما أنّ: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ ، **حسب النهايات بالحصر :** $\lim_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$ ، **ومنه :** $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n)=2}$

تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

لدينا : $A(3;2;6)$ ، $B(1;2;4)$ ، $C(4;-2;5)$.

1) أ) **بيان أن النقط** $A;B;C$ **تعيّن مستويا :** ---

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\-1\end{pmatrix}$ ، $\left(\frac{1}{-2}\neq\frac{-1}{-2}\right)$. أي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطيا ، و منه النقط $A;B;C$ تعيّن مستويا .

ب) **التحقق أنّ** (P) **هو المستوي** (ABC) : ---

لدينا: $(P):2x+y-2z+4=0$ ، و $A(3;2;6)$. **بالتعويض :** $6+2-12+4=0$ ، و منه: $A\in(P)$.

بنفس الطريقة نبيّن أنّ : $B\in(P)$ **و** $C\in(P)$. و منه نستنتج أنّ المستوي (P) **هو** (ABC) .

2) أ) **بيان أنّ المثلث** ABC **قائم :** ---

نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2=0$ ، إذن : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ و منه المثلث ABC قائم في A .

ب) **كتابة تمثيل وسيطي لـ** (Δ) **المار بـ** O **و يعامد** (P) **:** ---

(Δ) يعامد (P) أي : $\vec{n}(2;1;-2)$ يعتبر شعاع توجيه لـ (Δ) و منه التمثيل الوسيطي لـ (Δ) يكون :

$(\Delta):\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-2t \end{cases}$ ، حيث : $t\in\mathbb{R}$.

ج) حساب الطول OK : --

بما أنّ k هي المسقط العمودي لـ O على (P) ، إذن ستكون k نقطة تقاطع (Δ) مع (P) .

لحساب إحداثيات النقطة k نعوض تمثيل (Δ) في معادلة (P) **نجد** : $2(2t)+t-2(-2t)+4=0$ ، أي :

$9t=-4$ ، و منه : $t=\frac{-4}{9}$. و منه : $K\left(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

3) G مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$:

أ) حساب إحداثي النقطة G : --

$G\begin{cases} x=\frac{3(0)+1(3)+1(1)+1(4)}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \\ y=\frac{3(0)+1(2)+1(2)+1(-2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ z=\frac{3(0)+1(6)+1(4)+1(5)}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2} \end{cases}$ ، و منه : $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$.

ب) حساب المسافة بين النقطة G **و المستوي** (P) : ---

$d(G;(P))=\frac{\left|\frac{4}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 1+\frac{5}{2}(-2)+4\right|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$ ، و منه : $\boxed{d(G;(P))=\frac{2}{3}}$.

4) (Γ) **مجموعة النقط** M **من الفضاء حيث:** $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$:

أ) عين طبيعة مجموعة النقط (Γ) **و عناصرها المميزة :** ---

$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\|=5$ ، أي : $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\frac{5}{6}$ ، **و منه :** $MG=\frac{5}{6}$ ، إذن (Γ) هي **سطح كرة** مركزها G و نصف قطرها : $R=\frac{5}{6}$.

ب) طبيعة $(\Gamma)\cap(P)$: ---

بما أنّ : $d(G;(P))<R$ ، فإنّ : $(\Gamma)\cap(P)$ هي دائرة .

ج) حساب حجم رباعي الوجوه $GABC$: --

$V_{GABC}=\frac{1}{3}\times V_{ABC}\times h$ ، **مساحة المثلث** ABC : $V_{ABC}=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2}=\frac{12}{2}=6$.

h : **هي المسافة بين** G **و** (P) ، و منه : $h=\frac{2}{3}$.

الآن نحسب حجم الرباعي $GABC$: $V_{GABC}=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{2}{3}$ ، **و منه :** $\boxed{V_{GABC}=\frac{4}{3}(u.a)}$

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) **(الدالة اللوغاريتمية)**	التنقيط

الجزء الأول: لدينا : $g(x)=x^3-x-2\ln x+3$.

1) التحقق أنّ : $3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$: --

$(x-1)(3x^2+3x+2)=3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2=3x^2-x-2$.

ب) تعيين نهايات الدالة g : --

$\lim_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}(x^3-x-2\ln x+3)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim_{x\to 0} x^3-x=0 \\ \lim_{x\to 0} -2\ln x=+\infty\end{cases}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x^2-1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{3}{x}\right)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=0\end{cases}$.

2) أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها : ---

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$g'(x)=3x^2-1-\frac{2}{x}=\frac{3x^3-x-2}{x}=\frac{(x-1)(3x^2+x+2)}{x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة : $(x-1)(3x^2+3x+2)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$3x^2+x+2$		$+$		$+$	
$3x^3-x-2$		$-$		$+$	

جدول التغيرات :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

ب) إستنتاج إشارة $g(x)$: -----------------------------

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ : $g(x)>0$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ ، (القيمة الصغرى لـ g هي 3) .

الجزء الثاني : لدينا $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

1) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ و تفسير النتيجة هندسيا : --

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-1+\ln x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}x^2=0^+\end{cases}$.

التفسير : (C) يقبل مقارب عمودي هو محور التراتيب بجوار $-\infty$.

2) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$.

3) بيان أنّ المستقيم (Δ) مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$: --

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$ ، و منه (Δ) مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

الوضعية النسبية : $f(x)-y=\frac{x-1+\ln x}{x^2}$ ، نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C) يقع تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ) عند $(1;0)$	(C) يقع فوق (Δ)	

4) دراسة إتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيّراتها --

الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=1+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2-2x(x-1+\ln x)}{x^4}=1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}=\frac{x^4-x^2+3x-2x\ln x}{x^4}$$

أي : $f'(x)=\frac{x(x^3-x-2\ln x+3)}{x^4}=\frac{x^3-x-2\ln x+3}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$.

و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

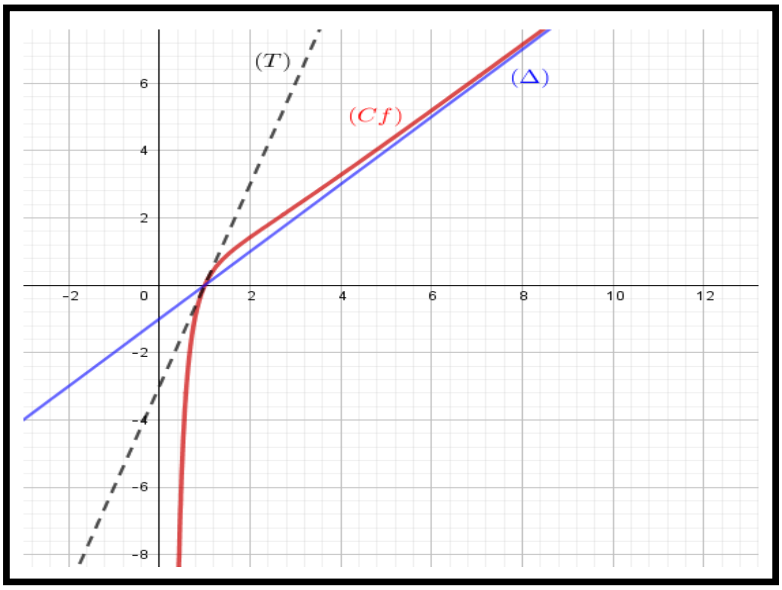
إذن **جدول تغيرات** الدالة f يكون كا التالي :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5) كتابة معادلة المماس (T) **للمنحنى** (C) **عند النقطة** $A(1;0)$: ----------------------------------

$(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، أي : $(T): y = 3(x-1)+0$ ، و منه : $\boxed{(T): y = 3x-3}$.

6) رسم كلا من (T) **و** (Δ) **و المنحني** (C) : --



7) لدينا $(d_m): y = mx - m$: ---

أ) التحقق أنّ (d_m) **تمر بالنقطة** A : $0 = m(1) - m$ أي : $m - m = 0$ ، و منه A تنتمي إلى (d_m) .

ب) المعادلة $f(x) = mx - m$ تقبل حلان متمايزان إذا كان : $\boxed{1 < m < 3}$.

حيث : 1 هو معامل توجيه (Δ) و 3 هو معامل توجيه (T) .

الجزء الثالث : 1) بيان أنّ $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1-\frac{2}{e}$: --

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \int_1^e \left(\underbrace{\ln x}_{v} \times \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'}\right)dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}dx$ ، أي :

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right]_1^e = \left(-\frac{\ln e}{e} - \frac{1}{e}\right) - (-\ln 1 - 1) = 1 - \frac{2}{e}$ ، **و منه :** $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx = 1-\frac{2}{e}$.

2) حساب مساحة الحيّز : --

$A = \int_1^e [f(x) - y]dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln x}{x}\right)dx$ ، أي :

$A = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^e + \left(1-\frac{2}{e}\right) = \left(\ln e + \frac{1}{e}\right) - (\ln(1)+1) + \left(1-\frac{2}{e}\right) = 1+\frac{1}{e} - 1 + 1 - \frac{2}{e}$ ، **و منه :** $\boxed{A = 1-\frac{1}{e}(ua)}$

كتابة الأستاذ : بلقاسم عبدالرزاق