

اِخْتِيارُ الثَّلَاثِيَةِ الْاَوَّلِيَةِ فِي مَادَّةِ الرِّياضِيَّاتِ

المدة: ساعتان

يوم 02 ديسمبر 2018

المستوى: ثالثة علوم تجريبية

التمرين الأول

اختيار من متعدد: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير.
 (1) نعتبر في \mathbb{R} المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: (E') : $e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$
 مجموعة حلول المعادلة (E') هي:

(أ) $S = \{-2; -3\}$	(ب) $S = \{-\ln 2; -\ln 3\}$	(ج) $S = \emptyset$ مجموعة خالية
----------------------	------------------------------	----------------------------------

(2) هذه النهاية بعد ازالة حالة عدم التعيين تساوي: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{x}$

(أ) $l = 5$	(ب) $l = 4$	(ج) $l = 0$
-------------	-------------	-------------

(3) نعتبر في \mathbb{R} المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: (E) : $3^{x+3} = 27$
 مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

(أ) $S = \{\ln 3\}$	(ب) $S = \{3\}$	(ج) $S = \{0\}$
---------------------	-----------------	-----------------

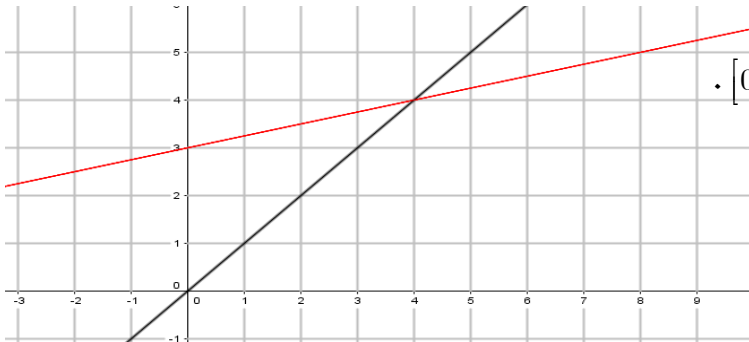
(4) عبارة الدالة المشتقة الأولى f' للدالة f حيث، $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ من أجل x من \mathbb{R} هي:

(أ) $f'(x) = (\ln 2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$	(ب) $f'(x) = -(\ln 2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$	(ج) $f'(x) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$
---	--	---

التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ ، وليكن (C_f) المنحني الممثل لها، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة



$y = x$ (أنظر الشكل المقابل)

(I) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

(II) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_0 = 0$.

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (أ) أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 4$.

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة؟

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(4 - u_n)$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل .

(ب) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

(ج) ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(5) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المجموع S_n و الجداء P_n المعرفين كما يلي : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و

$$P_n = (4 - u_0) \times (4 - u_1) \times \dots \times (4 - u_n)$$

أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم استنتج الجداء P_n

التمرين الثالث:

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x-2}{x} + \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in]1, 4; 1, 5[$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = 1 + (x-2)\ln(x)$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ ثم فسر النهاية عند الصفر هندسيا .

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ فإنّ : $f'(x) = g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) (أ) بين أنّ : $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ثم أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$

(4) ليكن (T_{x_0}) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 .

(أ) عين x_0 إذا علمت أن المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2; 0)$

(ب) استنتج أن (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A ثم أكتب معادلة ديكارتية لكل منهما .

(5) أنشئ كل من المماسين والمنحنى (C_f)

(6) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]-\infty; 0[$ بما يلي : $h(x) = f(-x)$

إشرح كيفية الحصول على التمثيل البياني (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئ (C_h) .

الجزء الثالث:

نعتبر المستقيمات (d_m) المعطاة بالمعادلة الديكارتية $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي .

(أ) تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة $A(2; 0)$.

(ب) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$

بالتوفيق 😊 والنجاح 😊 في شهادة البكالوريا 2019 🌸 🌸 🌸 🌸

السنة الثالثة



Tell me and I forget. Teach me and I remember. Involve me and I learn. - Benjamin Franklin

الإجابة الصحيحة

التمرين الأول:

✎ **إختيار من متعدد:** إختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير.

- (1) لدينا في \mathbb{R} المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $(E^1): e^{2x} + 5e^x + 6 = 0$ نضع في $e^x = t$ تكافئ $t = e^x = -2$ و منه مميز المعادلة ذات المجهول الحقيقي t ، $\Delta = 1$ أي أن $t = e^x = -3$ و الحلان مرفوضان و منه مجموعة حلول المعادلة (E^1) هي: $S = \emptyset$

(2) هذه النهاية بعد ازالة حالة $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \left(\frac{e^{4x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 4e^x \left(\frac{e^{4x} - 1}{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 4e^x \times 1 = 4$ عدم التعيين تساوي: $l = 4$

- (3) لدينا في \mathbb{R} المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $e^{(x+3)\ln 3} = 27$ تكافئ $(x+3)\ln 3 = \ln 27$ تكافئ $(x+3)\ln 3 = 3\ln 3$ تكافئ $x+3 = 3$ تكافئ $x = 0$ مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S = \{0\}$

(4) عبارة الدالة المشتقة الأولى f' للدالة f حيث، $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ من أجل x من \mathbb{R} لدينا :

و منه يعبارة الدالة المشتقة الأولى f' للدالة f : $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = e^{(-x+1)\ln \frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\left(\ln \frac{1}{2}\right) e^{(-x+1)\ln \frac{1}{2}} = (\ln 2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$

التمرين الثاني:

التحقق أن f متزايدة على $[0; +\infty[$ لدينا $f'(x) = \frac{1}{4} > 0$ ،

و منه الدالة f متزايدة على $[0; +\infty[$.

(II) أ) تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 : (أنظر الشكل المقابل)
ب) التخمين:

نلاحظ أن المتتالية (u_n) متزايدة ،

و تتقارب حدودها نحو فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

(2) البرهان أن: $0 \leq u_n \leq 4$:

نضع: $P(n): 0 \leq u_n \leq 4$

المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ أي: $1 \leq u_0 \leq 5$ و منه $P(0)$ محققة.

المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n . أي نفرض أن

$0 \leq u_n \leq 4$ صحيحة و نبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 4$.

- لدينا فرضاً أن: $0 \leq u_n \leq 4$ ، وبما أن f متزايدة على $[0; 4]$ ، فإن: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(4)$ ، أي:

$0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ، ومنه: $0 \leq u_{n+1} \leq 4$. وأخيراً الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها:

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n$:

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$$

$$\text{تكافئ } u_{n+1} - u_n \geq 0$$

بعد الدراسة نلاحظ أنه على المجال $[0; 4]$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ، ومنه المتتالية (u_n) متزايدة.

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى، فهي متقاربة.

(3أ) بيان أن (v_n) متتالية حسابية:

لدينا: $v_n = \ln(4 - u_n)$ ، أي:

$$v_{n+1} = \ln(4 - u_{n+1}) = \ln\left(4 - \frac{1}{4}u_n - 3\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{4}u_n\right) = \ln\left(\frac{1}{4}(4 - u_n)\right) = -\ln 4 + \ln(4 - u_n) = v_n - \ln 4$$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = -\ln 4$ ، إذن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $r = -\ln 4$ ، وحدها الأول:

$$v_0 = \ln(4 - u_0) = \ln(4 - 0) = \ln 4$$

(ب) التعبير عن v_n بدلالة n و u_n بدلالة n :

- عبارة v_n : $v_n = v_0 + nr$ ، أي: $v_n = \ln 4 - n \ln 4 = (1 - n) \ln 4$

- عبارة u_n : لدينا $v_n = \ln(4 - u_n)$ ، أي: $e^{v_n} = 4 - u_n$ ، أي: $u_n = 4 - e^{\ln 4(-n+1)}$

(ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - e^{\ln 4(-n+1)}) = 4$ ، لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln 4(-n+1)} = 0$ ، ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

(5) حساب المجموع S_n :

لدينا:

$$S_n = \frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2} = \frac{(n+1)(\ln 4 + \ln 4(-n+1))}{2} = \frac{(n+1)(2 \ln 4 - 2n \ln 4)}{2} = (n+1)(2 \ln 2 - n \ln 2)$$

حساب الجداء $P_n = (4 - u_0) \times (4 - u_1) \times \dots \times (4 - u_n)$ ، نعلم أن: $4 - e^{v_n} = u_n$ ، أي:

$$P_n = (4 - (4 - e^{v_0})) \times (4 - (4 - e^{v_1})) \times \dots \times (4 - (4 - e^{v_n})) = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

$$P_n = e^{S_n} = e^{\ln 2(n+1)(2-n)} = (2)^{(n+1)(2-n)}$$

التمرين الثالث:

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$.

(1) حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x} = -\infty \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{لأن: } -2 \\ 0^+ \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{لأن:} \\ \end{array} \right. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \checkmark$$

(2) دراسة تغيّرات الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها:

جدول التغيّرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

الدالة المشتقة:

الدالة g قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$,

و دالتها المشتقة هي: $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

نلاحظ أن: $g'(x) > 0$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$.

إذن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

(3) بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,4 < \alpha < 1,5$.

الدالة g مستمرة ورتيبة على $]0; +\infty[$ ، إذن هي مستمرة ورتيبة على المجال $[1,4; 1,5]$.

وبما أن: $\begin{cases} g(1,4) = -0,09 \\ g(1,5) = 0,07 \end{cases}$ أي: $g(1,4) \times g(1,5) < 0$ ، إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α

حيث: $1,4 < \alpha < 1,5$.

✓ إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $]0; +\infty[$: نلخص الإشارة في الجدول التالي:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

من أجل $x \geq \alpha$ يكون $g(x) \geq g(\alpha)$ ، أي: $g(x) \geq 0$.

من أجل $0 < x < \alpha$ يكون $g(x) < g(\alpha)$ ، أي: $g(x) < 0$.

الجزء الثاني: f دالة معرفّة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + (x - 2) \ln x$.

(1) حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases} \text{ لأنّ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [1 + (x - 2) \ln x] = +\infty \quad \checkmark$$

التفسير الهندسي: المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 0$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \text{ لأنّ، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + (x - 2) \ln x] = +\infty \quad \checkmark$$

(2) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f وتشكيل جدول تغيّراتها:

✓ الدالة المشتقة: الدالة f تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = g(x) \text{، ومنه: } f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} \text{، أي: } f'(x) = \ln x + \frac{1}{x}(x-2)$$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

✓ جدول التغيّرات:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha}$ ، ثمّ أعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha \approx 1,45$.

$$\text{نعلم أنّ: } g(\alpha) = 0 \text{، أي: } \ln \alpha + \frac{\alpha - 2}{\alpha} = 0 \text{، ومنه: } \ln \alpha = -\frac{\alpha - 2}{\alpha}$$

نحسب الآن $f(\alpha)$: $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 2) \ln \alpha$ ، أي: $f(\alpha) = 1 + (\alpha - 2) \left(-\frac{\alpha - 2}{\alpha}\right)$ ، ومنه:

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha} \text{، وهو المطلوب.}$$

✓ من أجل $\alpha \approx 1,45$ ، يكون: $f(\alpha) \approx 0,8$.

(4) (T_{x_0}) هو المماس للمنحني (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0 :

(أ) كتابة معادلة المماس (T_{x_0}) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

(ب) بما أن (T_{x_0}) يشمل النقطة $A(2;0)$ فيكون لدينا : (إحداثياتها يحققان معادلة المماس (T_{x_0})) .

$$\text{أي : } 0 = f'(x_0)(2 - x_0) + f(x_0) \text{ ، أي : } 0 = \left[\ln x_0 + \frac{x_0 - 2}{x_0} \right] (2 - x_0) + 1 + (x_0 - 2) \ln x_0 \text{ ، ومنه :}$$

$$0 = (x_0 - 2) \left[\ln x_0 - \left(\ln x_0 + \frac{x_0 - 2}{x_0} \right) \right] + 1 \text{ ، أي : } (x_0 - 2) \left[-\frac{x_0 - 2}{x_0} \right] = -1 \text{ ، ومنه :}$$

$$-\frac{(x_0 - 2)^2}{x_0} = -1 \text{ ، أي : } -(x_0 - 2)^2 = -x_0 \text{ ، أي : } (x_0 - 2)^2 = x_0 \text{ ، أي : } x_0^2 - 4x_0 + 4 - x_0 = 0 \text{ ،}$$

$$\text{ومنه : } x_0^2 - 5x_0 + 4 = 0 \text{ ، معناه أن : } x_0 = 1 \text{ ، أو } x_0 = 4$$

(ج) إذن المنحني (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A :

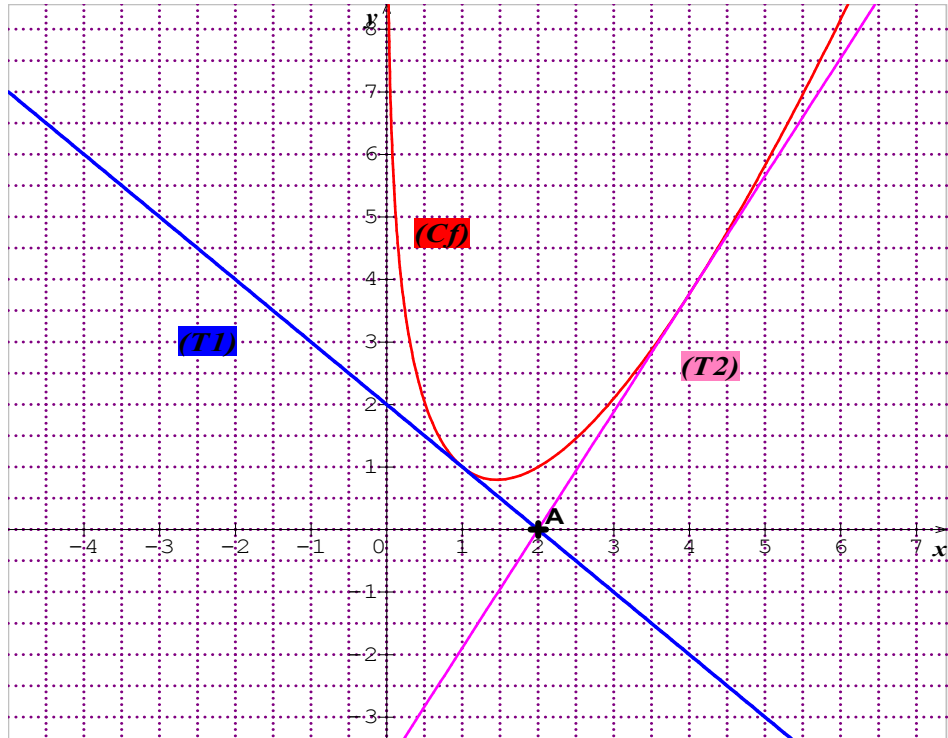
✓ المماس الأول يمس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

✓ المماس الثاني يمس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 4 .

(1) معادلة المماس الأول : $(T_1) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ، ومنه : $(T_1) : y = -x + 2$.

(2) معادلة المماس الثاني : $(T_2) : y = f'(4)(x - 4) + f(4)$ ، ومنه : $(T_2) : y = \left(\ln 4 + \frac{1}{2} \right) x - 2 \ln(4) - 1$.

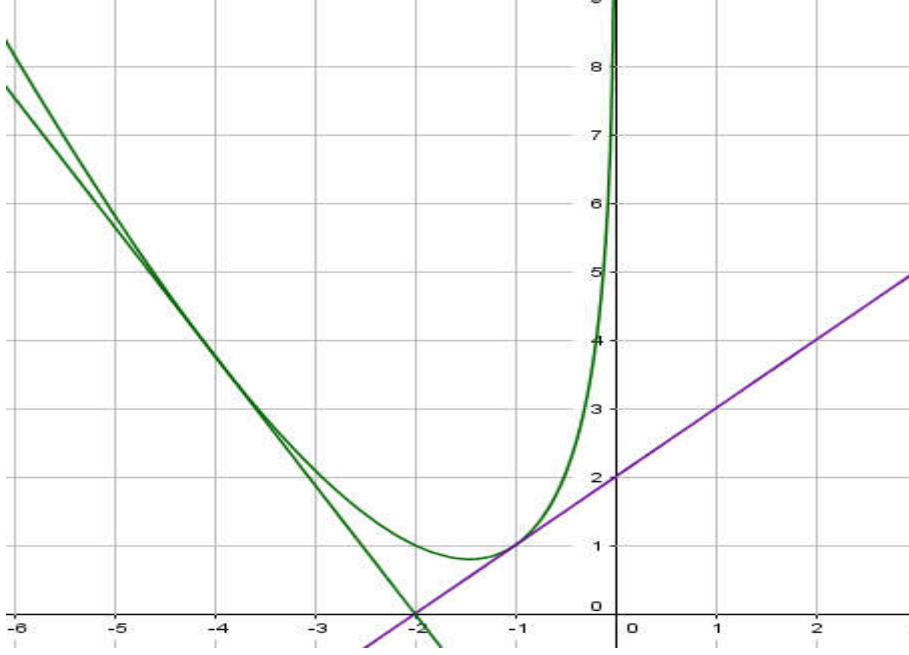
(5) رسم المماسين والمنحني (C_f) :



(6) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]-\infty; 0[$ بما يلي : $h(x) = f(-x)$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الترتيب

رسم المماسين والمنحني (C_h)



الجزء الثالث : $(d_m) : y = mx - 2m$.

(أ) التحقق أن (d_m) يمر بالنقطة A أي : نعوض إحداثيي النقطة A في معادلة المستقيم (d_m) :

$$. \text{ إذن ، } 0 = m(2) - 2m$$

(ب) المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $f(x) = mx - 2m$:

عدد حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (d_m) .

المستقيم (d_m) يتحرك حركة دورانية حول النقطة الثابتة A .

نعلم أن المماسين (T_1) و (T_2) يمران أيضا بالنقطة A .

$$\left. \begin{array}{l} (d_m) : y = mx - 2m \\ (T_1) : y = -x + 2 \\ (T_2) : y = (\ln 4 + \frac{1}{2})x - 2 \ln(4) - 1 \end{array} \right\} \text{ لدينا : ندرس ثلاث حالات :}$$

✓ لما : $m < 0$ ، هناك ثلاث حالات :

(1) $m < -1$ معناه أن (d_m) يقع فوق (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حلين متميزين .

(2) $m = -1$ معناه أن (d_m) هو نفسه (T_1) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 1 .

(3) $-1 < m < 0$ معناه أنّ: (d_m) يقع تحت (T_1) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m = 0$ معناه أنّ: $(d_m) : y = 0$ ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

✓ لما : $m > 0$ ، هناك ثلاث حالات :

(1) $0 < m < \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ: (d_m) يقع تحت (T_2) ، ومنه المعادلة لا تقبل حلول .

(2) $m = \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ: (d_m) هو نفسه (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حل وحيد هو 4 .

(3) $m > \ln 4 + \frac{1}{2}$ معناه أنّ: (d_m) يقع فوق (T_2) ، ومنه المعادلة تقبل حلين متميزين .

👏🌸🌸 في شهادة البكالوريا 2019 🌸👏 بالتوفيق والنجاح 🌸👏

السنة الثالثة

😊 زايدي علاء الدين 😊

😊 بجاخ سورية 😊