الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة — ثانـــويـــة: زانة البيضاء الجديـــــــــــــــــــــــــــــدة

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية — الموسم الدراسي: 2018/ 2019

اختبار الثلاثي الأول لمادة الريـــاضيـــات — المدة : 3 ساعات

<u>التمرين الاختياري:</u> أجب عن أحد التمرينين التالين التمرين الأول أو الثاني فقط

التمرين الأول:(04 نقاط)

حدد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مبررا إجابتك

1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $y=3y'+2$ هي الدوال من الشكل : $x\mapsto ce^{3x}-\frac{2}{3}$ حيث $c\in\mathbb{R}$:

2) عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 2^{1244} هو: 375

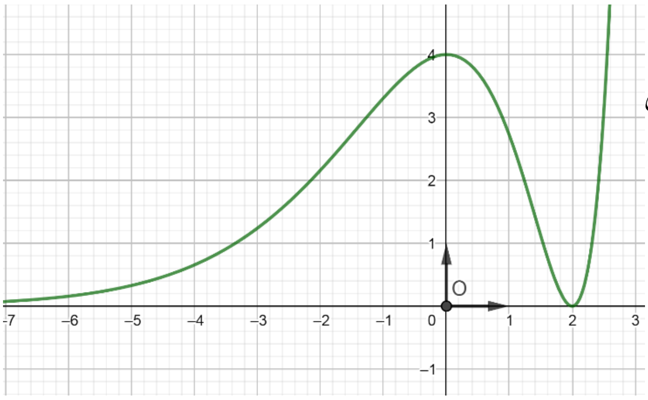
3) مشتقة الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=2^{x\sqrt{x}}$ هي الدالة : $x\mapsto\frac{3}{2}2^{x\sqrt{x}}\sqrt{x}\ln 2$.

4) للمعادلتين $x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+5=0$ و $x^2-126x+125=0$ نفس مجموعة الحلول.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$

و $(C_{f'})$ المنحنى البياني الممثل للدالة f' الدالة المشتقة للدالة f كما هو موضح في الشكل أدناه.



بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية:

1)بين ان المنحنى البياني للدالة f يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتي كل منهما.

2) عين: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{f'(x)}-e^4}{x}$

3)ليكن m وسيطا حقيقيا ، أدرس تبعا لقيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f'(x)=f'(m)$

<u>التمارين الاجبارية:</u>

التمرين الثالث: (07 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــــ : $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها.
2. استنتج أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $g(x)\succ 0$

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــــ : و $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}; & x\in\mathbb{R}^*\\ 0 ; & x=0\end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.حيث : $\|\vec{i}\|=5cm$.

1. أحسب: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ فسر بيانيا النتيجتين المحصل عليهما .

2. أحسب : $\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$ ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .

3. أدرس استمرارية الدالة f عند 0.

4. أ. بين أن النقطة O مبدأ المعلم نقطة زاوية لـــ (C_f).

ب. بين أن: من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.

ج. ضع جدول تغيرات الدالة f .

د. مثل المنحنى (C_f).

التمرين الرابع: (09 نقاط)

الجزء الأول: نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $u(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)$

و $v(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

1. أدرس تغيرات كل من الدالتين u و v، ثم ضع جدول تغيرات كل منهما.

2. استنتج أن: من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

3. بين أن: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $-\frac{1}{2}\le\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ : $g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$

3. أدرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها.

4. استنتج أن : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g(x)\le 0$

الجزء الثالث : نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ : $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}; & x\succ 0\\ 1 ; & x=0\end{cases}$ و

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5. أحسب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها .

6. أ . أدرس استمرارية الدالة f عند 0.

ب. أثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 و أن : $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

7. أ. بين أن: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج. مثل المنحنى (C_f).

د. اعتمادا على السؤال " 2.ب" أحسب النهاية التالية: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

بالتوفيق أبنائي الأعزاء

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية باتنة — **ثانـــويـــة: زانة البيضاء الجديـــــــــــــــــــــــــدة**

الشعبة: الثالثة علوم تجريبية — **الموسم الدراسي :2018/ 2019**

الإجابة النموذجية لاختبار الثلاثي الأول لمادة الريـــاضيـــات

التمرين الاختياري: أجب عن أحد التمرينين التالين التمرين الأول أو الثاني فقط

حل التمرين الأول:(04 نقاط)

تحديد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع التبرير

1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية: $y = 3y'+2$ هي الدوال من الشكل: $x \mapsto ce^{3x} - \frac{2}{3}$ حيث: $c \in \mathbb{R}$:

خاطئة

التبرير:

لدينا: $y = 3y'+2$

ومنه: $y' = \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}$.................(1)

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة التفاضلية (1) هي الدوال من الشكل : $x \mapsto ce^{\frac{1}{3}x} + 2$

2) عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 2^{1244} هو: 375 : العبارة صحيحة

التبرير:

لدينا : $\left[\log 2^{1244}\right] \le \log 2^{1244} \prec \left[\log 2^{1244}\right] + 1$

ومنه : $374 \le \log 2^{1244} \prec 375$

إذن : $10^{374} \le 2^{1244} \prec 10^{375}$

وبالتالي: عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد 2^{1244} هو: 375

3) مشتقة الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ : $f(x) = 2^{x^{\sqrt{x}}}$ هي الدالة : $x \mapsto \frac{3}{2}2^{x\sqrt{x}}\sqrt{x}\ln 2$: خاطئة

التبرير:

لدينا: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \left(x^{\sqrt{x}}\right)' 2^{x^{\sqrt{x}}} \ln 2$$

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right)' 2^{x^{\sqrt{x}}} \ln 2$$

$$f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right)' 2^{x^{\sqrt{x}}} \ln 2$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\ln x\right)' e^{\sqrt{x}\ln x} 2^{x^{\sqrt{x}}} \ln 2$$

$$f'(x) = \left(\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}\right) x^{\sqrt{x}} 2^{x^{\sqrt{x}}} \ln 2$$

4) للمعادلتين $x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+5=0$ و $x^2-126x+125=0$ نفس مجموعة الحلول: صحيحة

لدينا: $x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+5=0......(1)$

بوضع : من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $t=x^{\frac{1}{3}}$

أي: من أجل كل $t\in]0;+\infty[$: $x=t^3$

ومنه : المعادلة (1) تكافئ $\begin{cases} t^2-6t+5=0............(2) \\ t\succ 0 \end{cases}$.

بما أن : $1-6+5=0$ فإن : 1 و 5 حلان للمعادلة (2) .

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي S حيث : $S=\{1;125\}$

ولدينا 125 و 1 هما حلان لمعادلة من الدرجة الثانية من الشكل : $x^2-126x+125=0$

حل التمرين الثاني:(04 نقاط)

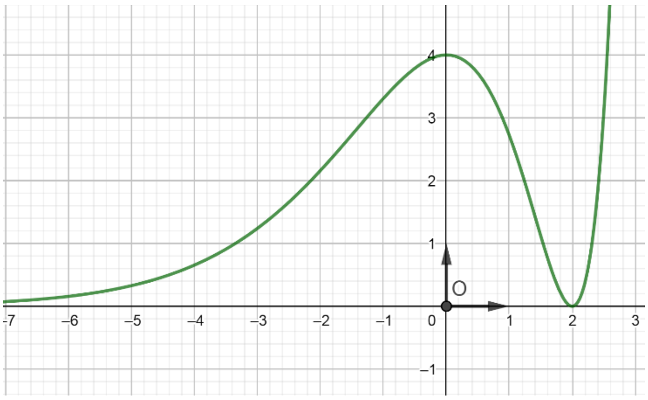
1) اثبات ان المنحنى البياني للدالة f يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتي كل منهما:

لدينا :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

بما أن المشتقة الثانية تنعدم عند كل من القيمتين 0 و 2 مغيرة اشارتها عند كل منهما فان المنحنى البياني للدالة f يقبل نقطتي انعطاف فاصلتي كل منهما 0 و 2 .

2) تعيين: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f'(x)}-e^4}{x}$



لدينا : $f'(0)=4$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f'(x)}-e^4}{x}=\dfrac{0}{0}$ (ح ع ت)

إزالتها : نضع : $g(x)=e^{f'(x)}-e^4$

ومنه :

$g(0)=0$

$g'(x)=f''(x)e^{f'(x)}$

$g'(0)=f''(0)e^{f'(0)}$

$g'(0)=0\times e^{4}$

$g'(0)=0$

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f'(x)}-e^{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(x)}{x-0}=g'(0)=0$

3) دراسة تبعا لقيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $f'(x)=f'(m)$..............(1)

نضع من أجل كل $m\in\mathbb{R}$: $m'=f'(m)$ ($m'\in[0;+\infty[$)

ومنه : المعادلة (1) تكافئ $f'(x)=m'$.............(2)

مجموعة الحلول البيانية للمعادلة (2) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى $(C_{f'})$ مع المستقيم $(\Delta_{m'})$ ذو المعادلة : $y=m'$

والذي يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها m'

إذا كان: $m'=0$ (أي: $m=2$) فان المعادلة (1) تقبل حلا مضاعفا موجبا .

إذا كان: $m'\in]0;4[$ (أي: $m\in]-\infty;0[\cup]0;2[\cup]2;\alpha[$ ، حيث: $f'(\alpha)=4$ و $\alpha\neq 0$) فان المعادلة (1) تقبل حلين موجبين وحلا سالبا.

إذا كان: $m'=4$ (أي: $m=0$ أو $m=\alpha$) فان المعادلة (1) تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

إذا كان: $m'\in]4;+\infty[$ (أي: $m\in]\alpha;+\infty[$) فان المعادلة (1) تقبل حلا وحيدا موجبا.

التمارين الاجبارية:

حل التمرين الثالث: (07 نقاط)

حل الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــــ : $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$

1. دراسة تغيرات الدالة g ثم وضع جدول تغيراتها:

حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=2$	$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}}\left[e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1\right]=1$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1\right]=+\infty$

حساب المشتقة :

لدينا : من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $g'(x)=-\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

إشارة المشتقة : لدينا من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
variations de f	2	$\searrow$	$1-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$1 \;\|\; +\infty$	$\searrow$	2

2. استنتج أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $g(x) \succ 0$

لدينا من جدول التغيرات أعلاه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $g(x) \succ 0$

حل الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــــ : و $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} ; & x \in \mathbb{R}^* \\ 0 ; & x=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.حيث : $\|\vec{i}\|=5cm$.

1. حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

التفسير البياني للنتيجتين المحصل عليهما :

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ فإن: (C_f) لا يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل .

2. حساب : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-\frac{x}{2}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{2}\left[\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\right)\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right]=-\frac{1}{4}$$

التفسير البياني للنتيجة المحصل عليها:

بما أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=-\dfrac{1}{4}$ فإن: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$ حيث:

$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$ معادلة له.

3. دراسة استمرارية الدالة f عند 0:

لدينا: $\lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\underset{<}{\to}0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0=f(0)$ لأن: $\lim\limits_{x\underset{<}{\to}0} e^{\frac{1}{x}}=0$.

و $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0=f(0)$ لأن: $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$.

ومنه الدالة f مستمرة عند 0

4. أ. إثبات أن النقطة O مبدأ المعلم نقطة زاوية لـ (C_f):

لدينا: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1$

و: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق في 0 و المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماس معامل توجيه كل منهما 0 و 1 والنقطة O هي نقطة زاوية.

ب. إثبات أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$:

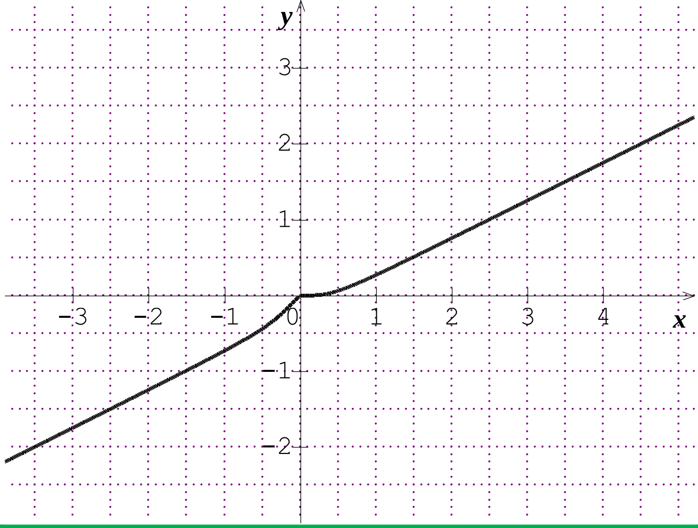
لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} x e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

وبالتالي إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$. وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ج. و ضع جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

د. تمثيل المنحنى (C_f):



حل التمرين الرابع: (09 نقاط)

الجزء الأول:

1. دراسة تغيرات كل من الدالتين u و v، ثم وضع جدول تغيرات كل منهما:

أولا : دراسة تغيرات الدالة u:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(1+x)^3\left(\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^3}-\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)}{(1+x)^3}\right)\right]=-\infty$

حساب المشتقة :

لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $u'(x)=\frac{1}{(1+x)}-(1-x+x^2)=-\frac{x^3}{1+x}$

إشارة المشتقة : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $u'(x)\le 0$

جدول تغيرات الدالة u:

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	0 $\quad -$
$u(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

ثانيا: دراسة تغيرات الدالة v:

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right]=+\infty$

حساب المشتقة: لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $u'(x)=\frac{1}{(1+x)}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$

إشارة المشتقة: من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $u'(x)\ge 0$

جدول تغيرات الدالة v:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$v'(x)$	0 $\qquad$ $+$
$v(x)$	$0 \nearrow +\infty$

استنتاج أن: من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$:

لدينا من الجدولين السابقين : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $u(x)\le 0$ و $v(x)\ge 0$.

ومنه : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\le 0$ و $\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\ge 0$

اذن : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

2. إثبات أن: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $-\frac{1}{2}\le\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$:

لدينا : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

ومنه: من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $-\frac{1}{2}\le\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

حل الجزء الثاني: نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$

3. دراسة تغيرات الدالة g ثم وضع جدول تغيراتها:

حساب النهاية : $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\right]=-\infty$

حساب المشتقة : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(1+x)}=\frac{-x}{(1+x)^2}$

إشارة المشتقة : من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $g'(x)\le 0$

جدول تغيرات الدالة :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	0 $\quad -$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

4. استنتاج أن: من أجل كل $x \in [0;+\infty[$: $g(x) \leq 0$

من جدول التغيرات نجد النتيجة مباشرة

حل الجزء الثالث: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x}; & x \succ 0 \\ 1 \quad ; & x = 0 \end{cases}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5. حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$$

التفسير البياني للنتيجة المحصل عليها: بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فان المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب مواز لحامل محور الفواصل لــ (C_f) بجوار $+\infty$

6. أ . دراسة استمرارية الدالة f عند 0:

بما أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \succ}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$ فإن: الدالة f مستمرة عند 0.

ب. إثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 و أن : $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ \succ}} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

وبالتالي: الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 و أن : $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

التبرير :

لدينا : من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}$:

وبما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \succ}} \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

فإن حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

7. أ. اثبات أن: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$:

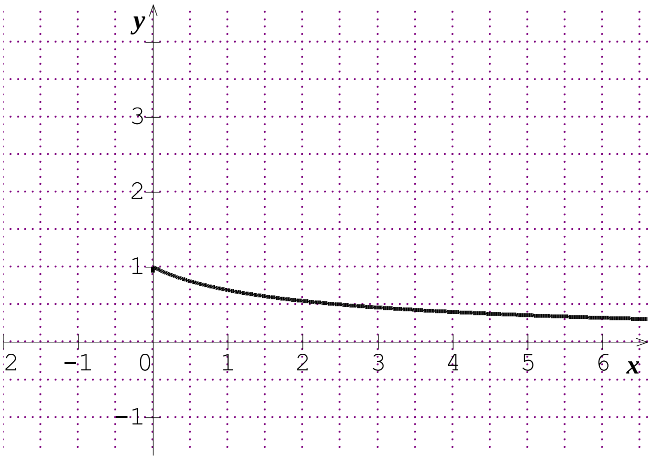
لدينا: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ومنه: من أجل كل $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) \prec 0$

ب. وضع جدول تغيرات الدالة f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$-1/2$		$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	0

ج. التمثيل البياني للمنحنى (C_f):



د. اعتمادا على السؤال " 2.ب" حساب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$

بوضع: $t=e^x-1$ أي: $x=\ln(1+t)$.

لما $x\to 0$ فإن: $t\to 0$.

وبالتالي : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{\ln(1+t)^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}}{\dfrac{\ln(1+t)^2}{t^2}}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2}}{\left(\dfrac{\ln(1+t)}{t}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$

بالتوفيق أبنائي الأعزاء