الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

امتحان الفصل الثاني

الشعبة : علوم تجريبية

ثانويات : 18 فيفري بالحمادية

عبد الحق بن حمودة + بن سخرية الطيب بالمهير

يوم :03 مارس 2019

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 02 سا

التمرين الأول: (07 نقاط)

1) لتكن المتتالية (u_n) معرفة من أجل .ل عدد طبيعي n كمايلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$

ا) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \preceq u_n \preceq 4$.

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج تقارب المتتالية (u_n)

2) لتكن المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \ln u_n - \ln 4$

ا) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) ✍ أكتب عبارة v_n بدلالة n

✍ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 4e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4}$ ثم احسب $\lim u_n$

✍ عين أصغر عدد طبيعي n بحيث : $u_n \succ 3.96$

3) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث : $S_n = 3^0 v_0 + 3^1 v_1 + \cdots + 3^n v_n$

التمرين الثاني: (07 نقاط)

1) ليكن α و β عددين مركبين. حل جملة المعادلتين الآتية: $\begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 6 - 5i\sqrt{3} \end{cases}$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط A، B ، C و D لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_D = \overline{z_C}$

ا) مثل النقاط A ، B ، C و D

ب) بين أن النقاط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها ω ذات اللاحقة $z_\omega = 3$ يطلب تعيين طول نصف قطرها.

ج) لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ

بين أن : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC

3) تحقق أن العدد المركب α عدد حقيقي بحيث : $\alpha = \left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2018} + i\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1439}$

4) بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $(z - z_A)\overline{(z - z_A)} = z_C\overline{z_C}$ عبارة عن دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

5) عين صورة الدائرة (Γ) بالدوران الذي مركزه O ويحول A إلى C

التمرين الثالث: **(06 نقاط)**

يحتوي صندوق U_1 على ثلاث كرات خضراء وكرتين سوداويتين و يحتوي صندوق U_2 على كرتين خضروايتين وثلاث كرات سوداء جميع الكرات لانفرق بينها باللمس

نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من .ل صندوق

1) لتكن الحادثة A : " من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط كرتين لونها أخضر "

بين أن $P(A) = 0.46$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الخضراء المسحوبة

ا) عين قيم المتغير العشوائي X

ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

ج) نعتبر اللعبة التالية : اللاعب يدفع25 دج قبل السحب ويأخذ10 دج لكل كرية حضراء مسحوبة هل اللعبة في صالح اللاعب ؟

3) ماهو احتمال الحصول على كرية واحدة فقط خضراء من الصندوق U_1 علما اننا سحبنا كرتين خضراويتين

حل التمرين الأول: (07 نقاط)

لدينا $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$

1. إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \le u_n \le 4$:

- نسمي الخاصية $P(n)$ الخاصية $1 \le u_n \le 4$
- نتحقق من صحة الخاصية $P(0)$

$P(0) : 1 \le u_0 \le 4$

محققة لأن $u_0 = 1$ و $1 \le 1 \le 4$.

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$:

لدينا $1 \le u_n \le 4$ أي $1 \le \sqrt{u_n} \le 2$

أي $1 \le 2 \le 2\sqrt{u_n} \le 4$

ومنه $1 \le u_{n+1} \le 4$ ومنه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة .

- حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع بما أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n فإن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي $1 \le u_n \le 4$.

2. تعين اتجاه تغير المتتالية (u_n):

$$u_{n+1} - u_n = 2\sqrt{u_n} - u_n = \frac{-u^2{}_n + 4u_n}{2\sqrt{u_n} + u_n}$$

بما أن المقام موجب لأن $1 \le u_n \le 4$ إذن إشارة الفرق من إشارة البسط البسط عبارة من الدرجة الثانية ذات المتغير u_n .

$$-u^2{}_n + 4u_n = 0$$

نجد
$$\begin{cases} u'_n = 0 \\ u''_n = 4 \end{cases}$$

إذن بما أن $1 \le u_n \le 4$ فإن $u_{n+1} - u_n$ تكون موجبة إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

3. استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة نحو 4.

I. لدينا : $v_n = \ln u_n - \ln 4$

1. اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية :

(v_n) متتالية هندسية معناه $v_{n+1} = q.v_n$

لدينا

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - \ln 4 = \ln 2\sqrt{u_n} - \ln 4$$
$$= \ln 2 + \ln\sqrt{u_n} - 2\ln 2 = \frac{1}{2}\ln u_n - \ln 2$$
$$= \frac{1}{2}(\ln u_n - 2\ln 2) = \frac{1}{2}.v_n$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

حدها الأول $v_0 = \ln u_0 - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = -\ln 4$

2. أ. عبارة الحد العام للمتتالية $v_n)$:

(v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 ومنه

$$v_n = v_0.q^n = (-\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4$$

ب. عبارة الحد العام للمتتالية $u_n)$:

لدينا $v_n = \ln u_n - \ln 4$ ومنه $\ln u_n = v_n + \ln 4$

أي $u_n = e^{v_n + \ln 4}$ أي $u_n = 4e^{v_n}$

إذن $u_n = 4e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4}$.

حساب النهاية

$$\lim u_n = \lim 4e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4} = 4$$

ج. تعين أصغر عدد طبيعي n بحيث $u_n > 3.96$:

$$u_n > 3.96 \ \to \ 4e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4} > 3.96 \to e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4} > 0.99$$
$$\to -\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4 > -0.01 \ \to \ \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.007$$
$$\to n\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(0.007) \ \to \ n > 7.18$$

إذن $n = 8$.

3. حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = 3^0 v_0 + \cdots + 3^n v_n$$
$$= -3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0 \ln 4 - 3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 \ln 4 - \cdots - 3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n \ln 4$$
$$= -\left[3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \cdots + 3^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\ln 4$$
$$= -\left[\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \left(\frac{3}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right]\ln 4$$
$$= -\left[\frac{1}{1-\frac{3}{2}}\left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)\right]\ln 4$$
$$S_n = \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right)\ln 16$$

حل التمرين الثاني : (06 نقاط)

1. تعيين حلول جملة المعادلتين الآتية :

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ 2\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 6 - 5i\sqrt{3} \end{cases}$$

الجملة السابقة تكافئ الجملة

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 & \ldots(1 \\ 2\alpha + \beta = 6 + 5i\sqrt{3} & \ldots(2 \end{cases}$$

نضرب (2) في 2 نجد : $4\alpha + 2\beta = 12 + 10i\sqrt{3}$ ... (3)

بجمع (1) و (3) نجد $\alpha = 3 + 2i\sqrt{3}$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد

$$\beta = i\sqrt{3} \quad \Leftarrow \alpha = 3 + 2i\sqrt{3} - 2\beta = 3$$

2. أ. تمثيل النقاط A ، B ، C و D :

ب. إثبات أن النقاط تنتمي لنفس الدائرة ذات المركز ω :

A ، B ، C و D تنتمي لنفس الدائرة ذات المركز ω معناه

$$\omega A = \omega B = \omega C = \omega D$$

$$|z_A - z_w| = |i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$$

$$|z_B - z_w| = |-i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$$

$$|z_C - z_w| = |3 + 2i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$$

$$|z_D - z_w| = |3 - 2i\sqrt{3} - 3| = 2\sqrt{3}$$

إذن النقاط تنتمي لنفس الدائرة ذات المركز ω ونصف القطر $\sqrt{3}$.

ج. إثبات أن : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$:

لدينا $z_E = -3 + 2i\sqrt{3}$

$$\frac{z_C \quad z_B}{z_E - z_B} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} - (-i\sqrt{3})}{-3 + 2i\sqrt{3} - (-i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3 + 3i\sqrt{3}}{-3 + 3i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أن $\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$ و $arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ فإن

$$\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = Re^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث EBC :

بما أن

$$\left|\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right| = 1 \qquad \Rightarrow \quad CB = EB$$

$$\left(\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad (BE, BC) = -\frac{\pi}{3}$$

إذن المثلث EBC متقايس الأضلاع .

3. التحقق أن العدد المركب a عدد حقيقي:

$$a = \left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2018} + i\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1439}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{3}}\right)^{2018} + i\left(\frac{\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{3}}\right)^{1439}$$

$$= e^{i\frac{2018\pi}{2}} + ie^{-i\frac{1439\pi}{2}} = e^{1009i\pi} + ie^{-i\left(719\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= e^{i\pi} + ie^{i\frac{\pi}{2}} = -2$$

4. بين أن (Γ) مجموعة نقط M من المستوي:

$$(z - z_A)(z - z_A) = z_C . z_C \rightarrow |z - z_A|^2 = |z_C$$

$$\rightarrow |z - z_A|^2 = 12 \rightarrow |z - z_A = \sqrt{12}$$

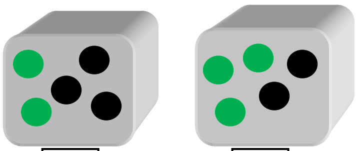
ومنه $AM = \sqrt{21}$ إذن (Γ) عبارة عن دائرة مركزها A

ونصف قطرها $\sqrt{21}$.

حل التمرين الثالث(07 نقاط)

نسحب في آن واحد كرتين

من كل صندوق :



U_2 U_1

عدد الحالات الممكنة هو : $C_5^2 \times C_5^2 = 100$

1°) احتمال الحادثة "A": من بين 4 كرات مسحوبة سحب

- الحالات الملائمة :

($1V$ و$1N$ من U_1 و$1V$ و$1N$ من U_2) أو

($2V$ من U_1 و$2N$ من U_2) أو ($2V$ من U_1 و$2N$ من U_2)

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

ومنه:

$$= \frac{(C_3^1 \times C_2^1 \times C_2^1 \times C_3^1) + (C_3^2 \times C_3^2) + (C_2^2 \times C_2^2)}{C_5^2 \times C_5^2}$$

$$= \frac{36 + 9 + 1}{100} = \frac{46}{100} = 0,46$$

2°) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الخضراء المسحوبة :

أ) قيم X الممكنة هي: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

ب) تعريف قانون الإحتمال:

- لما $(X = 0)$: عدم سحب أي كرة خضراء (سحب 2سوداء من U_1 و2سوداء من U_2)

$$P(X = 0) = \frac{C_2^2 \times C_3^2}{C_5^2 \times C_5^2} = \frac{3}{100}$$

- لما $(X = 1)$: سحب 1 كرة خضراء (سحب 1خضراء و1سوداء من U_1 و2سوداء من U_2 أو سحب 2سوداء من U_1 و 1خضراء و1سوداء من U_2)

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_3^2 + C_3^1 \times C_3^1 \times C_2^2}{C_5^2 \times C_5^2}$$

$$= \frac{18 + 6}{100} = \frac{24}{100}$$

- لما $(X=2)$: سحب 2 خضراء

$$P(X=2)=P(A)=\frac{46}{100}$$

- لما $(X=3)$: سحب 3 كرات خضراء (سحب 1 خضراء و 1 سوداء من U_1 و 2 خضراء من U_2 أو سحب 2 خضراء من U_1 و 1 خضراء و 1 سوداء من U_2)

$$P(X=3)=\frac{C_3^2\times C_2^1\times C_3^1+C_2^2\times C_3^1\times C_2^1}{C_5^2\times C_5^2}$$

$$=\frac{24}{100}$$

- لما $(X=4)$: سحب 4 كرات خضراء (سحب 2 خضراء من U_1 و 2 خضراء من U_2)

$$P(X=4)=\frac{C_3^2\times C_2^2}{C_5^2\times C_5^2}=\frac{3}{100}$$

- ومنه نعرف قانون الإحتمال كمايلي:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{46}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{3}{100}$

ج) معرفة إذا كانت اللعبة في صالح اللاعب أم لا حيث:

عدم سحب أي كرية خضراء يخسر 25 دينار أي $(X=-25)$

سحب 1 كرة خضراء يسترجع 10 دينار أي $(X=-15)$

سحب 2 كرة خضراء يسترجع 20 دينار أي $(X=-5)$

سحب 3 كرة خضراء اللاعب يربح 5 دينار أي $(X=5)$

سحب 4 كرة خضراء اللاعب يربح 15 دينار أي $(X=15)$

ومنه الجدول التالي:

x_i	-25	-15	-5	5	15
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{46}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{3}{100}$

من الجدول يكون لدينا الأمل الرياضياتي هو:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}x_iP(X=x_i)=-5\ <\ 0$$

إذن اللعبة ليست في صالح اللاعب لأن $E(X)$ سالب

2°) نسمي الحادثة "B" حادثة "سحب كرة واحدة خضراء من U_1" ولدينا الحادثة "A": سحب كرتين خضراوين بالضبط

- الإحتمال $P(A\cap B)$ معناه سحب كرتين خضراوين U_1 والأخرى من U_2

أي أننا نسحب $(1V$ و $1N$ من U_1 و $1V$ و $1N$ من $U_2)$

ومنه إحتمال الحادثة "B" علما أن الحادثة "A" محققة هو:

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{C_3^1\times C_2^1\times C_2^1\times C_3^1}{C_5^2\times C_5^2}}{\frac{46}{100}}$$

$$=\frac{\frac{36}{100}}{\frac{46}{100}}=\frac{36}{46}=\boxed{\frac{18}{23}}$$