الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية تيارت — ثانوية سليمان بن حمزة - عين الذهب -

المستوى : السنة الثالثة علوم تجريبية — السنة الدراسية 2018 / 2019

إختبار الثلاثي الثاني في مادة : الرياضيات — المدة :03 سا

التمرين الأول: (06.5 نقاط)

1) لكل عدد مركب z من مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نضع : $\boxed{P(z)=z^3-3z^2+3z+7}$

ا) تحقق أن $P(-1)=0$.

ب) عين العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z يكون: $\boxed{P(z)=(z+1)(z^2+az+b)}$.

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$

نرمز بـ A ، B ، C و D للنقاط التي لواحقها على الترتيب : $\boxed{z_A=-1 \text{ ، } z_B=2+i\sqrt{3} \text{ ، } z_C=\overline{z_B} \text{ و } z_D=3}$

ا) أحسب المسافات AB ،AC و BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

ب) L عدد مركب معرف كما يلي : $L=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}$

✍ أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب L، ثم استنتج طبيعة المثلث ADC

✍ عين الشكل الجبري والأسي للعدد المركب L

3) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\boxed{\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=12.....(1)}$

ا) برهن أن D هي مرجح الجملة المثقلة : $\boxed{\left\{(A,-1);(B,2);(C,2)\right\}}$

ب) أثبت أن العلاقة (1) مكافئة للعلاقة $\boxed{\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CD}=4.....(2)}$

ج) استنتج طبيعة المجموعة (Γ)

التمرين الثاني: (03.5 نقاط)

كيس يحتوي على أربع كرات تحمل الرقم "1" واثنان تحملان الرقم "e" (أساس اللوغاريتم النيبري) وست كرات تحمل الرقم "$\frac{1}{e}$" (الكرات لانفرق بينها باللمس).

نسحب على التوالي وبالإرجاع كرتين ونسجل x العدد الذي تحمله الكرة الأولى و y العدد الذي تحمله الكرة الثانية.

نرفق بهذه التجربة النقطة M ذات اللاحقة z بحيث : $\boxed{z=\ln x+i\ln y}$

1) شكل شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه الوضعية

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ أحسب احتمال الحوادث التالية:

A : M تنتمي إلى حامل محور الفواصل

B : M تنتمي إلى حامل محور التراتيب

C : قيس الزاوية $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OM})$ يساوي $-\frac{\pi}{4}$

3) ا) هل الحادثتين A و B مستقلتان؟ برر إجابتك؟

ب) علما أن $|z| = 1$ ماهو احتمال أن يكون $arg(z) = \frac{\pi}{2}$

4) X متغير عشوائي يرفق بكل سحبة المسافة OM

ا) عين القيم الممكنة لـ X

ب) عين قانون الإحتمال المتغير العشوائي X

التمرين الثالث: (10 نقاط)

الجـــزء الأول

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال: $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ: $f(x) = 1 + ln(2x-1)$، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ حيث $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = 2cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

2) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$، ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$

4) ا) أثبت أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x) = ln(x+a) + b$ حيث: a ، b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما

ب) استنتج أنه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln"

الجـــزء الثاني

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ بـ: $g(x) = f(x) - x$

1) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} g(x)$ ، ثم بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3) أحسب $g(1)$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

تحقق ان $2 \prec \alpha \prec 3$

4) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ ، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

5) أنشيء المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

6) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن $f(x) \in]1;\alpha[$

الجــــزء الثالث

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول : $U_0 = \frac{3}{2}$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

1) ا) مثل بيانيا الحدود الأربعة الاولى للمتتالية (U_n) (استعن بالمنحنى البياني (C_f) و المستقيم (Δ))

ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n)

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 \prec U_n \prec \alpha$

3) بين أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم أثبت أن $\lim U_n = \alpha$

أحيانا تأتي الصعـــوبات لتضيف المتعة في طريقك نحو النجاح

الحل المفصل لإختبار الفصل الثاني مادة الرياضيات

التمرين الأول:

① التحقق أن $P(-1)=0$

$$P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$$

تعيين العددين a و b

لدينا: $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz+z^2=az+b$

ومنه $\boxed{P(z)=z^3+(a+1)z^2+(a+b)z+b}$ بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} a+1=-3 \\ a+b=3 \\ b=7 \end{cases}$$ ومنه $\boxed{b=7 \text{ و } a=-4}$ إذن:

$$\boxed{P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)}$$

حل المعادلة $P(z)=0$ في $\mathbb{C}$

$P(z)=0$ معناه: $z+1=0$ أو $z^2-4z+7=0$

حل المعادلة: $z^2-4z+7=0$

لدينا: $\Delta=-12=12i^2$ ومنه $\sqrt{\Delta}=2i\sqrt{3}$ أو $\sqrt{\Delta}=-2i\sqrt{3}$

وعليه: $z_1=\dfrac{4-2i\sqrt{3}}{2}=2-i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{4+2i\sqrt{3}}{2}=2+i\sqrt{3}$

إذن: $\boxed{S=\left\{z_0=-1\,,\,z_1=2+i\sqrt{3}\,,\,Z_2=2-i\sqrt{3}\right\}}$

② حساب الأطوال AB ، AC و BC

$$AB=|z_B-z_A|=|3+i\sqrt{3}|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$$

$$AC=|z_C-z_A|=|3-i\sqrt{3}|=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=|2i\sqrt{3}|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

إذن : المثلث ABC مثلث متقايس الأضلاع.

③ التفسير الهندسي للعدد L

التفسير الهندسي للطويلة :

$|L|=\left|\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right|=\dfrac{|z_A-z_C|}{|z_D-z_C|}=\dfrac{AC}{CD}=\sqrt{3}$ ومنه: $\boxed{AC=\sqrt{3}DC}$

التفسير الهندسي للعمدة :

لـدينا : $\arg(L)=\arg\left(\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_C}\right)=(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})$

ومنه: $(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\arg(z_A-z_C)-\arg(z_D-z_C)$

ومنه : $\arg(z_A-z_C)=\arg(-3+i\sqrt{3})=\dfrac{5\pi}{6}$

و $\arg(z_D-z_C)=\arg(1+i\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}$

إذن : $\boxed{(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA})=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}}$

وعليه المثلث ADC قائم في C

الشكل الجبري والأسي للعدد المركب L

لدينا L عدد مركب طويلته هي "$\sqrt{3}$" وعمدته $\arg(L)=\dfrac{\pi}{2}$ إذن :

شكله الجبري هو: $\boxed{L=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=i\sqrt{3}}$

وشكله الأسي هو : $\boxed{L=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$

④ إثبات أن D مرجح :

D مرجح الجملة المثقلة : $\left\{(A,-1);(B,2);(C,2)\right\}$ معناه :

$$\boxed{z_D=\frac{-z_A+2z_B+2z_C}{3}=\frac{1+4+\cancel{2i\sqrt{3}}+4-\cancel{2i\sqrt{3}}}{3}=3}$$

إثبات أن العلاقة (1) تكافئ (2) :

لدينا : $\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=12$

تكافئ: $\left(-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=12$

تكافئ $\left((-1+2+2)\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=12$

لدينا : D مرجح الجملة المثقلة : $\left\{(A,-1);(B,2);(C,2)\right\}$

معناه : $-\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ بالتعويض نجد:

$3\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CD}=12$ تكافئ $\boxed{\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CD}=4}$

إستنتاج طبيعة المجموعة (Γ):

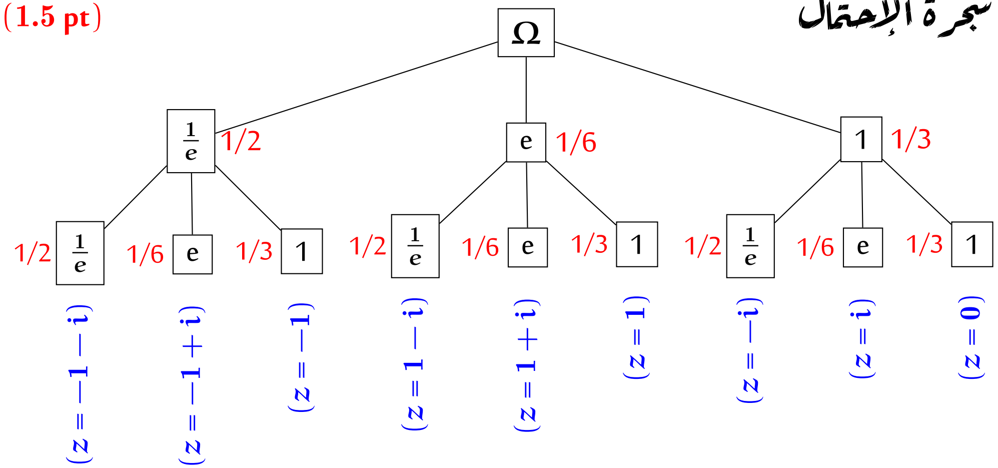
لدينا : $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{CD}=4$ بالتعويض نجد: $\begin{pmatrix}x-3\\y-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}=4$

ومنه: $x-3-\sqrt{3}y=4$ إذن $\boxed{x-\sqrt{3}y-7=0}$

وعليه: المجموعة (Γ) هي مستقيم شعاع توجيهه $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

التمرين الثاني :

① شجرة الإحتمال **(1.5 pt)**



② حساب احتمال الحوادث A، B و C **(1.0 pt)**

لدينا : $A=\left\{z=-1,z=0,z=1\right\}$ ومنه $\boxed{P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}}$

لدينا : $B=\left\{z=-i,z=0,z=i\right\}$ ومنه $\boxed{P(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{3}}$

لدينا : $C=\left\{z=1-i\right\}$ ومنه $\boxed{P(C)=\frac{1}{12}}$

③ استقلالية الحادثتين A و B

لدينا : $P\left(A\cap B\right)=P\left(\{z=0\}\right)=\frac{1}{9}$

ومن جهة أخرى : $P(A)\times P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

إذن الحادثتان A و B مستقلتان لأن $\boxed{P\left(A\cap B\right)=P(A)\times P(B)}$

✍ حساب احتمال أن يكون $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ إذا كان $|z| = 1$

لتكن E هي الحادثة $|z| = 1$ ومنه $E = \{-i, -1, i, 1\}$ إذن $P(E) = \frac{4}{9}$

ولتكن F هي الحادثة $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $E = \{i\}$ إذن $P(F) = \frac{1}{8}$

إذن: $\boxed{P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{32}}$

4 ✍ تعيين القيم الممكنة للمتغير X

X متغير عشوائي يرفق بكل سحبة المسافة OM

أي أنه يرفق بكل عدد مركب z طويلته : $|z|$ إذن : $\boxed{X = \{0, 1, \sqrt{2}\}}$

✍ قانون احتمال المتغير X

(0.5 pt)

$X = x_i$	0	1	$\sqrt{3}$
$P(X = x_i)$	$1/9$	$4/9$	$4/9$

التمرين الثالث :

الجزء الأول

1 حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف

$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$ و $\boxed{\lim_{x \xrightarrow{>} \frac{1}{2}} f(x) = -\infty}$ ومنه "$x = \frac{1}{2}$" مستقيم مقارب لـ (C_f)

2 إثبات أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق.

ومشتقتها هي : $\boxed{f'(x) = \frac{2}{2x+1}}$

من أجل x من $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ لدينا : $f'(x) \succ 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما

جدول التغيرات

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3 إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا للمستقيم (Δ)

لدينا : $(\Delta) : y = x$ معامل توجيهه هو 1، ومنه فاصلة النقطة التي يكون فيها المماس موازيا لـ (Δ) هي حل المعادلة $f'(x) = 1$ في المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

لدينا : $f'(x) = 1$ معناه $\frac{2}{2x-1} = 1$ ومنه $2x - 1 = 2$ إذن $\boxed{x = \frac{3}{2}}$

4 إثبات وجود عددين حقيقيين a و b حيث : $f(x) = \ln(x+a) + b$

لدينا: $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$ ومنه $f(x) = 1 + \ln2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

ومنه $f(x) = 1 + \ln2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$

إذن : $\boxed{\text{f تكتب على الشكل } f(x) = \ln(x+a) + b \text{ حيث } a = -\frac{1}{2} \text{ و } b = 1 + \ln2}$

✍ استنتاج رسم المنحنى (C_f) من المنحنى (C)

لدينا $f(x) = 1 + \ln2 + \ln\left(x - \frac{1}{2}\right)$

أي تكتب على الشكل $f(x) = u(x+a) + b$ حيث $u(x) = \ln x$ ومنه

(C_f) صورة (C) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ أي $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 + \ln2 \end{pmatrix}$

الجزء الثاني

① حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة التعريف

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[1-x+\ln(2x-1)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (2x-1)\left[\frac{1-x}{2x-1}+\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}\right] = -\infty$$

لأن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{2x-1}=-\frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}=0}$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1-x+\ln(2x-1)\right] = -\infty}$$

② دراسة اتجاه تغير الدالة g

لدينا : $g(x)=f(x)-x$ ومنه من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

يكون $\boxed{g'(x)=f'(x)-1=\frac{-2x+3}{2x-1}}$

من أجل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ يكون : $2x-1\succ 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+3$

أي من أجل $x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ تكون $g'(x)\succ 0$ ومن أجل $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ تكون $g'(x)\prec 0$

جدول التغيرات

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g\left(\frac{3}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

③ إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$

✍ لدينا: $g(1)=1-1+\ln 1=0$

✍ لدينا : $g\left(\frac{3}{2}\right)\succ 0$ ومن جدول تغيراتها نلاحظ ان g مستمرة ومتناقصة تماما وتغير إشارتها في المجال $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ ومنه المطلوب - حسب مبرهنة القيم المتوسطة -

✍ التحقق أن $2\prec\alpha\prec 3$

لدينا: $g(2)=0.1$ و $g(3)=-0.4$ أي $g(2)\times g(3)\prec 0$

④ الإشارة والوضع النسبي من جدول تغيرات الدالة g، ينتج:

✍ من أجل $x\in\left]\frac{1}{2},1\right[\cup\left]\alpha,+\infty\right[$ تكون $g(x)\prec 0$

معناه $f(x)-x\prec 0$ إذن $\boxed{\text{يكون } (C_f) \text{ أسفل } (\Delta)}$

✍ من أجل $x\in\left]1,\alpha\right[$ تكون $g(x)\succ 0$

معناه $f(x)-x\succ 0$ إذن $\boxed{\text{يكون } (C_f) \text{ فوق } (\Delta)}$

⑤ أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]1;\alpha\right[$ فإن $f(x)\in\left]1;\alpha\right[$

الدالة f متزايدة تماما في المجال $\left]1;\alpha\right[$.

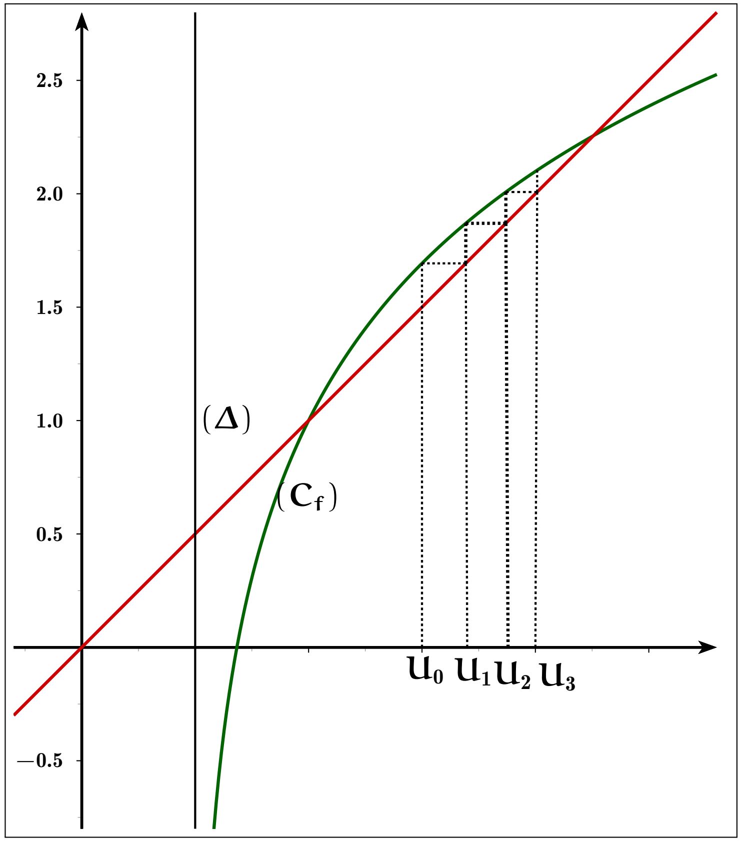
ومنه من أجل $x\in\left]1;\alpha\right[$ فإن $f(x)\in\left]f(1);f(\alpha)\right[$

ولدينا: $f(x)=g(x)+x$ ومنه $f(\alpha)=g(\alpha)+\alpha=0+\alpha=\alpha$ ولدينا أيضا $f(1)=1$

إذن : $f(x)\in\left]1;\alpha\right[$

الجزء الثالث

1 ✍ تمثيل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (U_n)



✍ التخمين حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n)

من البيان نلاحظ أن $U_0 \prec U_1 \prec U_2 \prec U_3$ ومنه المتتالية (U_n) متزايدة ومتقاربة نحو نقطة تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ)

2 برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $1 \prec U_n \prec \alpha$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $1 \prec U_n \prec \alpha$

❶ التحقق من أجل $n = 0$ لدينا : $U_0 = \frac{3}{2}$ و $1 \prec \frac{3}{2} \prec \alpha$

إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

❷ نفرض أن $1 \prec U_n \prec \alpha$ ونثبت أن : $1 \prec U_{n+1} \prec \alpha$

لدينا: $1 \prec U_n \prec \alpha$ ومنه $f(1) \prec f(U_n) \prec f(\alpha)$

إذن $1 \prec U_{n+1} \prec \alpha$

3 إثبات أن (U_n) متقاربة وتعيين نهايتها

مما سبق لدينا المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ α إذن فهي متقاربة.

إثبات أن $\lim U_n = \alpha$

بما أن المتتالية (U_n) متقاربة فإن نهايتها تساوي عدد حقيقي l أي : $\lim U_n = \lim U_{n+1} = l$

لدينا : $U_{n+1} = f(U_n)$ ، ومنه : $\lim U_{n+1} = f(\lim U_n)$

إذن: لتعيين النهاية نحل المعادلة $f(l) = l$ ومنه : $f(l) - l = 0$ إذن $g(l) = 0$

وبالتالي $l = 1$ أو $l = \alpha$ معناه أن : $\lim U_n = 1$ أو $\lim U_n = \alpha$

وبما أن (U_n) متزايدة و $U_0 = \frac{3}{2}$ فإن $\boxed{\lim U_n = \alpha}$

انتهـــــــى...

تمنياتي لكـــم بالتفـــــوق في بكـــــــالوريا جوان 2019