

الاجازات الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات ونصف

التمرين الأول: 5ن

- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$
- 2- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
النقط A, B, C لواحقتها: $z_A = -1+i$ $z_C = 1+\sqrt{3}i$ $z_B = \bar{z}_A$
- أ- أكتب العددين المركبان: z_A, z_C على الشكل الأسّي، استنتج الشكل الأسّي لـ z_B .
- ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.
- ج- استنتج القيمة المضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.
- 3- عيّن النقط D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.
- 4- عيّن العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$.
- 5- عيّن (E_1) و (E_2) مجموعتي النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:
- $$(E_1): |z+1-i| = |\bar{z}+1-i|$$
- $$(E_2): \text{Arg}(z) = \text{Arg}(\bar{z}) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين الثاني: 4ن

- 1- لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $u_0 = e^2$ و $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.
- أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ: $u_n > \frac{1}{e}$.
- ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنّها متقاربة.
- 2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2}$.
- أ- بين أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأوّل.
- ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .
- ج- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 - v_1 - \dots - v_n$
- د- احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين الثالث: 4ن

- (I) - يحتوي كيس U_1 على 9 كريات لا تفرق بينها باللمس 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء وكرتان حمراواتان ونسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الكيس U_1 وليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق كل سحبة بالعدد $2n-1$ حيث n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1 .
- عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$.

- (II) - يحتوي كيس U_2 على 10 كريات لا تفرق بينها باللمس 7 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء.
 نسحب عشوائياً كرتة من الكيس U_2 ثم نضعها في الكيس U_1 بعد تسجيل لونها ثم نسحب كرتة من الكيس U_1 .
 1- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء.
 2- احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء.

التمرين الرابع: 7 ن

f الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$; كما يلي: (C_f) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النهايتين الأخيرتين هندسياً.

2- أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها، ثم بين أن: $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ- بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $\alpha \in]4; 5[$

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

4- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما -2 واكتب معادلتيهما.

5- احسب $f(6), f(-1), f(-4), f(-6)$ ثم ارسم المماسين (Δ) و (Δ') و المنحنى (C_f) .

6- ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1)\ln|x-1|$

7- نعتبر الدالة h والمعرفة على $R - \{-1; 1\}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x)}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة h ؟ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب- بين أن الدالة h زوجية ثم ارسم (C_h) المنحنى الدالة h في نفس المعلم السابق.

8- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً فإن: $g'(x) = e^{-x} f(e^x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

انتهى بالتوفيق للجمع

التمرين الأول: 5

حل المعادلة: $(z-1-\sqrt{3}i)(z^2+2z+2)=0$

يكافئ $z^2+2z+2=0$ أو $z-1-\sqrt{3}i=0$

ومنه $\Delta=i^2 4$ ومنه $z_1=-1+i$ أو $z_2=-1-i$ أو $z=1+\sqrt{3}i$

1- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$z_A = -1+i$ $z_B = \overline{z_A} = -1-i$ $z_C = 1+\sqrt{3}i$

أ- كتابة: z_A, z_C على الشكل الأسّي، استنتاج الشكل الأسّي ل z_B .

$z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $Arg(z_C) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}); |z_C| = 2$

$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ومنه $Arg(z_A) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z}); |z_A| = \sqrt{2}$

لدينا $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

ب- كتابة $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الجبري $\frac{z_C}{z_A} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

الشكل الأسّي ل $\frac{z_C}{z_A}$ هو: $\frac{z_C}{z_A} = \sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ لأن:

$Arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \arg(z_C) - \arg(z_A) = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi; \left|\frac{z_C}{z_A}\right| = \sqrt{2}$

ج- استنتاج القيمة المضبوطة ل: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

$\frac{z_C}{z_A} = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right]$

$= \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا $\frac{z_C}{z_A} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ومنه

$\left\{ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{array} \right.$ ومنه $\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array} \right.$

2- تعيين النقط D لاحقة z_D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع.

يكافئ $\overline{AC} = \overline{BD}$ ومنه $z_D = z_C - z_A + z_B = 1+i(\sqrt{3}-2)$

3- عين العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد: $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$.

$\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}\right)^n = \sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}}$ ومنه

$\sqrt{2}^n e^{-i\frac{5n\pi}{12}} = \sqrt{2}^n \left[\cos\left(\frac{5n\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right) \right]$

$\sin\left(\frac{5n\pi}{12}\right) = 0$ يكافئ $\left(\frac{z_C}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$ ومنه $n=12k$ حيث $(k' \in \mathbb{N})$

4- تعيين (E_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$|z-(-1+i)| = |\overline{z}-(-1+i)|$ يكافئ $|z+1-i| = |\overline{z}+1-i|$

$|z-z_A| = |\overline{z}-z_A|$ ومنه $|z-z_A| = |z-\overline{z_A}|$ ومنه $|z-z_A| = |z-z_B|$

يكافئ: $AM = BM$

ومنه (E_1) مجموعة النقط: محور القطعة $[AB]$

$Arg(z) = Arg(\overline{z}) + \pi + 2k\pi$ يكافئ $Arg(z) = -Arg(z) + \pi + 2k\pi$

ومنه $2Arg(z) = \pi + 2k\pi$ ومنه $Arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه $(i, \overline{OM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ومنه (E_2) مجموعة النقط: محور الترتيب ما عدا المبدأ.

التمرين الثاني: 4

1- المعرفة على N كما يلي: $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = e^2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{e}} \end{array} \right.$ يكافئ $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = e^2 \\ u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}} \end{array} \right.$

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > \frac{1}{e}$

من أجل $n=0$ $u_0 = e^2$ ومنه $u_0 > \frac{1}{e}$ ومنه محققة

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي $u_n > \frac{1}{e}$

نبرهن صحة الخاصية من أجل $P(n+1)$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

لدينا من الفرضية $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $\frac{u_n}{e} > \frac{1}{e^2}$ ومنه $\sqrt{\frac{u_n}{e}} > \sqrt{\frac{1}{e^2}}$

إذا $u_{n+1} > \frac{1}{e}$

ومنه حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع فإن من أجل $n \in N$ $u_n > \frac{1}{e}$

ب- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{u_n}{e}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right)^2 - u_n^2}{\sqrt{\frac{u_n}{e}} + u_n} = \frac{u_n - eu_n^2}{\sqrt{\frac{u_n}{e}} + u_n} = \frac{u_n(1-eu_n)}{\sqrt{\frac{u_n}{e}} + u_n}$

لدينا $u_n > \frac{1}{e}$ ومنه $1-eu_n < 0$ إذا $u_{n+1} - u_n < 0$

ومن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على N

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{e}$ فإنها متقاربة.

التمرين الرابع: 8

الدالة المعرفة على $R - \{1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right) (1 - (x-1) \ln(x-1)) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

المنحنى يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=1$

2- أ- بما أن الدالة معرفة على مجالي تعريفها فإنها قابلة للإشتقاق

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-x}{(x-1)^2}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$ ومزيدة تماما على $]0; 1[$ ، $]1; +\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

3- أ- بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]4; 5[$

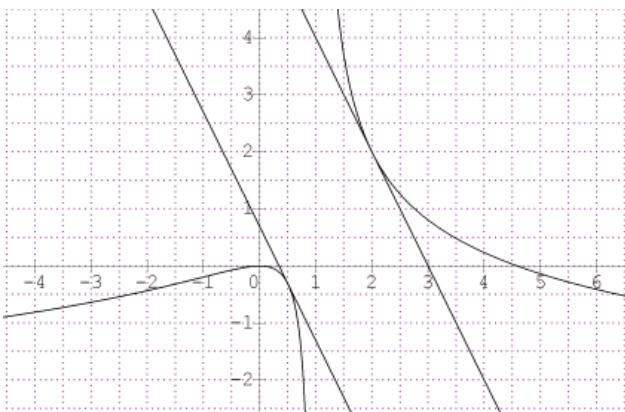
الدالة f مستمرة ورتبية تماما على $]4; 5[$ و $f(4) = 0,2$ $f(5) = -0,14$ ومنه $f(4) \times f(5) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة تقبل حلا

وحيدا $\alpha \in]4; 5[$

4- إيجاد المماسين معامل توجيهها -2 يكافئ $f'(x) = -2$ ومنه $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$

$$(\Delta): y = -2x + 6 \quad (\Delta'): y = -2x + \ln 2$$

انشاء المنحنى (C_f) والمماسين (Δ) و (Δ')



6- المناقشة البيانية: $m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1) \ln|x-1|$

2- (v_n) متتالية معرفة على N : $v_n = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2}$

أ- بيان أن المتتالية (v_n) هندسية ثم تعيين أساسها وحدها الأول.

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(u_{n+1}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{\frac{u_n}{e}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{u_n}{e}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\ln u_n - \ln e) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\ln u_n - 1) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \ln u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{3}{2}$

ب- كتابة v_n و u_n بدلالة n . $v_n = v_0 \times q^n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا $v_n = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{2}$ ومنه $v_n - \frac{1}{2} = \ln(u_n)$ ومنه $2v_n - 1 = \ln(u_n)$ ومنه $e^{2v_n - 1} = e^{\ln(u_n)}$

$$u_n = e^{2v_n - 1} = e^{2 \left(\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) - 1} = e^{3 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}$$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n

$$S_n = v_0 - v_1 - \dots - v_n = v_0 - (v_1 + \dots + v_n)$$

$$= \frac{3}{2} - \left[v_1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) \right] = \frac{3}{2} - \left[\frac{3}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \right]$$

د- احسب بدلالة n الجداء P_n حيث:

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{2v_0 - 1} \times e^{2v_1 - 1} \times \dots \times e^{2v_n - 1}$$

$$= e^{2v_0 - 1 + 2v_1 - 1 + \dots + 2v_n - 1} = e^{-(n+1) + 2(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}$$

$$= e^{-(n+1) + 2 \left[3 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right]}$$

$$= e^{-n-1+6-2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)} = e^{-n+5-2+2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = e^{-n+3+2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = e^{-n+3+2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = 0 \quad \text{لأن } -1 < q < 1$$

التمرين الثالث: 3

1- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X = 2n - 1$ ومنه $\{1; 3; 5; 7\}$

n عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس U_1

x	1	3	5	7
$P(X=x)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{4}{84}$

$$E(X) = \frac{196}{84} \quad \text{الامل الرياضياتي:}$$

1- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء هو $\frac{1}{5}$

2- احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_2 بيضاء هو $\frac{1}{7}$

دراسة إشارة $e^{-x}f(e^x)$

لدينا $k(x) = f(e^x)$ نضع $e^{-x} > 0$
 الدالة k عبارة عن مركب دالتين $f(x)$ والاسية

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
e^x		+	
$k'(x)$		-	
$k(x)$	$+\infty$		$-\infty$

ومنه نقطة تقاطع مع محور الفواصل $k(x) = 0$

$x = \ln \alpha$ ومنه $e^x = \alpha$ يكفي $f(e^x) = 0$

جدول الإشارة لـ $k(x)$

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$k(x)$	+	-	-

ومنه الدالة g متزايدة تماما $[-\infty; \ln \alpha]$ ومتناقصة تماما $[\ln \alpha; +\infty]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

جدول التغيرات

x	0	$\ln \alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(\alpha)$	0

$$m = \frac{2x^2 - x - x + x}{(x-1)} - \ln|x-1|$$

$$= \frac{2x^2 - 2x}{(x-1)} + \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$$

$$= \frac{2x(x-1)}{(x-1)} + \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$$

$$= 2x + \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$$

$$-2x + m = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$$

$$-2x + m = f(x)$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم

$$y = -2x + m$$

$m \in]-\infty; \ln 2[$ تقبل حلين مختلفين.

$m = \ln 2$ تقبل حل مضاعف

$m \in]\ln 2; 6[$ لا تقبل حلول.

$m = 6$ تقبل حل مضاعف

$m \in]6; +\infty[$ تقبل حلين مختلفين.

1- نعتبر الدالة h والمعرفة على $R - \{-1; 1\}$ كما يلي: $h(x) = f(|x|)$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$h'(0) = f'(0) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0) \quad \text{أ-}$$

$$h'(0) = f'(0) = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

نستنتج أن الدالة h تقبل الاشتقاق عند 0 وتقبل مماس افقي.

ب- دراسة الشفعية: لدينا D_h متناظرة بالنسبة بالمبدأ.

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

ومنه دالة h زوجية.

8- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} \ln(e^x - 1)$

أ- بيان أن $g'(x) = e^{-x} f(e^x)$

$$g'(x) = -e^{-x} \ln(e^x - 1) + \frac{e^x}{e^x - 1} \times e^{-x}$$

$$= e^{-x} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \ln(e^x - 1) \right)$$

$$= e^{-x} f(e^x)$$