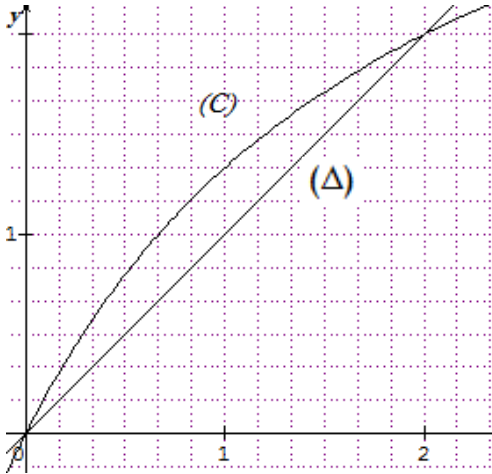


على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{4x}{x+2}$  .  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . و ليكن  $(\Delta)$  المستقيم ذا المعادلة  $y = x$  .



$(U_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول :  $U_0 = 1$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$   $U_{n+1} = f(U_n)$  .

1. أ) تحقق أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$  .

ب) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية  $(U_n)$  (بدون حساب الحدود) موضحا خطوط التمثيل، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(U_n)$  و تقاربها.

2. أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq U_n < 2$  .

ب) بين أن المتتالية  $(U_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  ، ماذا تستنتج ؟ ثم أحسب نهاية  $(U_n)$  .

3. نعتبر المتتالية  $(V_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$  .

أ) برهن أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  محددًا حدها الأول  $V_0$  .

ب) أكتب  $V_n$  بدلالة  $n$  و استنتج عبارة  $U_n$  بدلالة  $n$  .

4. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|U_n - 2|$  .

ثم استنتج أن :  $|U_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$  و أحسب  $\lim U_n$  .

5. أحسب المجموعين  $S_n$  و  $S'_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$  .

$$S'_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \dots + \frac{1}{U_n}$$

## التمرين الثاني: (04 نقاط )

1. صندوق يحتوي على 6 كريات تحمل العدد 1 و 3 كريات تحمل العدد 2 و واحدة تحمل العدد (-2) .  
نسحب عشوائيا و في أن واحد كريتين من الصندوق.  
1. أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على كريتين تحملان نفس العدد " .

B : " الحصول على كرية على الأقل تحمل العدد 1 " .

2. ليكن  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء العددين الظاهرين في الكريتين المسحوبتين.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي  $X$  .

(ب) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  ، ثم أحسب أمله الرياضياتي.

11. فيما يلي نعتبر الصندوق يحتوي على 10 كريات منها  $n$  كرية تحمل العدد 1 و واحدة تحمل العدد (-2) و باقي الكريات تحمل العدد 2 .

نسحب عشوائيا و في أن واحد كريتين، و لتكن الحادثة  $C$  : "سحب كريتين تحملان نفس العدد "

1. أحسب  $P(C)$  بدلالة  $n$  .

2. عين قيم  $n$  بحيث:  $P(C) = \frac{4}{5}$

## التمرين الثالث: (04 نقاط )

1. نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  كثير الحدود  $P(Z)$  للمتغير  $Z$  حيث :

$$P(Z) = Z^3 - 4Z^2 + 6Z - 4$$

(أ) أحسب  $P(2)$  ثم عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث :

$$P(Z) = (Z - 2)(Z^2 + aZ + b)$$

(ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $P(Z) = 0$  .

2. نعتبر في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A, B, C$  التي لواحقتها على

$$\text{الترتيب : } Z_A = 2, \quad Z_B = 1 - i, \quad \text{و} \quad Z_C = \overline{Z_B}$$

(أ) أكتب  $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$  على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث  $ABC$  .

(ب) أكتب  $Z_B$  و  $Z_C$  على الشكل الأسّي.

$$\text{(ج) تحقق أن : } \left(\frac{Z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1440} + \left(\frac{Z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2019} = \frac{Z_A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} Z_B$$

3. عين  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $Z$  ( التي تختلف عن  $B$  و  $C$  ) التي تحقق:

$$\arg\left(\frac{Z_C - Z}{Z_B - Z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

حيث  $k$  عدد صحيح.

4. ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $A$  و يحول النقطة  $B$  إلى النقطة  $C$ .

(أ) عين زاوية الدوران  $R$ .

(ب) أكتب العبارة المركبة للدوران  $R$  ثم عين لاحقة النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالدوران  $R$ .

(ج) عين طبيعة المجموعة  $(\Gamma')$  صورة  $(\Gamma)$  بالدوران  $R$ ، محددا عناصرها.

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بـ :  $g(x) = x^3 - x + 3 - 2 \ln x$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$ .

2. (أ) أدرس إتجاه تغير الدالة  $g$  و شكل جدول تغيراتها.

(ب) استنتج إشارة  $g(x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ .

II. لتكن الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

(C) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

2. (أ) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ :  $h(x) = x - 1 + \ln x$

أحسب  $h(1)$  و أدرس اتجاه تغير الدالة  $h$  على  $]0; +\infty[$  ، ثم استنتج إشارة  $h(x)$ .

(ب) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x - 1$  مقارب مائل لـ  $(C)$  بجوار  $+\infty$ .

(ج) استنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحنى  $(C)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  ثم استنتج اتجاه تغير الدالة

$f$  و شكل جدول تغيراتها.

4. (أ) أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C)$  عند النقطة  $A(1;0)$ .

(ب) أرسم كلا من  $(\Delta)$  ،  $(T)$  و  $(C)$ .

5.  $m$  عدد حقيقي. المستقيم  $(\Delta_m)$  حيث :  $y = mx - m$  معادلة له.

(أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي  $m$  ، النقطة  $A$  تنتمي إلى المستقيم  $(\Delta_m)$ .

(ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  حتى يكون للمعادلة  $f(x) = mx - m$  حلان مختلفان.

6. (أ) بإستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن :  $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$ .

(ب) أحسب بـ  $u.a$  مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى  $(C)$  و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x = e \text{ و } x = 1$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط )

نعتبر المعادلة ( $E$ ) ذات المجهولين الصحيحين  $x$  و  $y$  حيث:  $14x + 9y = 13$

1. حل في  $Z^2$  المعادلة ( $E$ ) علما أن الثنائية  $(-1; 3)$  حلا خاصا لها.

2. ليكن  $N$  عددا طبيعيا حيث يوجد عدنان طبيعيان  $a$  و  $b$  يحققان: 
$$\begin{cases} N = 14a - 9 \\ N = 9b + 4 \end{cases}$$

(أ) بين أن الثنائية  $(a; -b)$  حل للمعادلة ( $E$ ).

(ب) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد  $N$  على 126.

3. حل في المجموعة  $Z^2$  المعادلة:  $14x + 9y = 130$

4. لتزيين قسم السنة 3 تقني رياضي إشتراك مجموعة تلاميذ القسم في دفع 130 قطعة نقدية حيث دفع كل ذكر 14

قطعة نقدية و دفعت كل أنثى 9 قطع نقدية .

. ماهو عدد الذكور و عدد الإناث في هذا القسم ؟

### التمرين الثاني: (05 نقاط )

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $Z$  و الوسيط الحقيقي  $\alpha$  التالية:

$$(Z - \alpha i)(Z^2 - 4Z + 13) = 0 \quad (E) \dots$$

II. في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  نعتبر النقط  $A, B, C$  و  $G$  التي

لواحقها على الترتيب:  $Z_A = \alpha i, Z_B = 2 + 3i, Z_C = \overline{Z_B}, Z_G = 5$  و

1. بين أن  $Z_E$  لاحقة النقطة  $E$  صورة النقطة  $B$  بالتشابه الذي مركزه  $A$  و نسبته  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$  هي

$$Z_E = \left( \frac{\alpha - 1}{2} \right) + i \left( \frac{5 + \alpha}{2} \right)$$

2. عين  $Z_F$  لاحقة النقطة  $F$  صورة النقطة  $G$  بالدوران  $R$  الذي مركزه  $I$  منتصف  $[AB]$  و زاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

3. أحسب  $Z_G - Z_A$  و  $Z_F - Z_E$ ، ثم أكتب العدد  $\frac{Z_G - Z_A}{Z_F - Z_E}$  على شكله الأسّي، ماذا تستنتج؟

4. (أ) بين أن 
$$\frac{Z_F - Z_E}{Z_A - Z_E} = \frac{(2\alpha^2 - 12\alpha + 50)}{(1 - \alpha)^2 + (\alpha - 5)^2} + i \frac{(2\alpha^2 - 10)}{(1 - \alpha)^2 + (\alpha - 5)^2}$$

(ب) عين قيمتي  $\alpha$  التي من أجلها تكون النقط  $A, E$  و  $F$  في استقامة.

(ج) من أجل قيمتي  $\alpha$  المتحصل عليهما سابقا بين أن  $A$  تنتمي إلى الدائرة ( $C$ ) التي قطرها  $[BC]$ .

### التمرين الثالث: (04 نقاط )

نعتبر المتتالية  $(U_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $U_0 = 2$  و بالعلاقة :  $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n+1$

1. نعتبر المتتالية  $(V_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة :  $V_n = U_n - n$ 
  1. (أ) برهن أن المتتالية  $(V_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
  2. (ب) عبر عن  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب نهاية  $(U_n)$  ، ماذا تستنتج؟
2. أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$
11. لتكن المتتالية  $(W_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بالعلاقة :  $W_n = \ln(V_n)$ 
  1. برهن أن المتتالية  $(W_n)$  حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
  2. (أ) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $A_n = W_0 + W_1 + W_2 + \dots + W_n$
  2. (ب) استنتج بدلالة  $n$  الجداء :  $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

### التمرين الرابع: (07 نقاط )

1. نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 1 + 4x e^{2x}$ 
  1. أدرس اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.
  2. استنتج إشارة  $g(x)$  من أجل كل عدد حقيقي  $x$  .
11. لتكن الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x+1$  ، و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  . (الوحدة  $2cm$ )
  1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
  2. أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .
  3. (أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x + 1$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  .
  3. (ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و المستقيم  $(\Delta)$  .
  4. أكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  عند النقطة  $O$  .
  5. بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .
  6. أنشئ المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  و المنحنى  $(C_f)$  .
  7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد و إشارة حلول المعادلة:  $(2x-1)e^{2x} + x = x + m + 1$
  8. (أ) بين أن الدالة:  $H : x \mapsto (x-1)e^{2x}$  هي دالة أصلية للدالة :  $h : x \mapsto (2x-1)e^{2x}$
  3. (ب) أحسب بـ  $cm^2$  مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_f)$  و المماس  $(T)$  و المستقيمين اللذين معادلتاهما:  $x=0$  و  $x=1$  .

انتهى الموضوع الثاني