مجلة الرائد في الرياضيات

****

توقعات بكالوريا2019
بين يديك

شعبة –تقني رياضي+رياضيات

التحضير الجيّد لشهادة

BAC2018-2019

إعداد الأستاذ:

بالعبيدي محمد العربي

larbibelabidi@gmail.com

Facebook العربي الجزائري

اختبار 1 في مادة الرياضيات   المـــدة: 04ساعات ونصف

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

1) حلّ ، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $(z+\sqrt{3}-3i)(z^2-6z+12)=0$.

2) يُنسب المستوي المركّب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C التي لواحقها على الترتيب $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ ، $z_C=-\sqrt{3}+3i$.

ا- أكتب كلاّ من z_A و z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشّكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلّث OAC.

ب- أحسب $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1440}+i\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2019}$ (تعطى النّتيجة النهائيّة على الشّكل الجبري).

3) لتكن النّقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل.بيّن أنّ المستقيميْن (AD) و (BC) متعامدان

4) عيّن نسبة و زاوية التّشابه المباشر S الذي مركزه $E\left(3-\sqrt{3},0\right)$ و يحوّل النّقطة A إلى النّقطة C

5) بيّن أنّ النّقط A ، E ، O ، C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني:(04 نقط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=\frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$.

أ) $u_n=-\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$ ، ب)المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، جـ) (u_n) متباعدة

2) في المستوي المركب المستوي المركّب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أ-التحويل T الذي كتابته المركبة $z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه O.

ب-مجموعة النقط $M(z)$ حيث $\arg(z-i)=-\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$

3) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

أ-المستوي (P) الذي معادلته: $x+y-z+1=0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A\ 2;1;-1$ و $\vec{u}\ 1;-1;1$ شعاع توجيه له لايشتركان في أية نقطة .

ب-معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (P) هي: $x-y+z=0$.

التمرين الثالث:(04 نقط)

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 .علبة تحوي n كريه بيضاء و 3 كريات سوداء .

نسحب من هذه العلبة كريتين في آن واحد.

1) احسب بدلالة n احتمال سحب :

أ) كريتين من لونين مختلفين. ب) كريتين بيضاوين. ج) على الأقل كريه سوداء.

2)نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المتبقية بعد السحب

أ) عين القيم التي يأخذها X.

ب) عين بدلالة n قانون احتمال X ثم احسب الأمل الرياضي E(X).

ج) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n التي تحقق : E(X) =1.

التمرين الرابع:(07 نقط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{3}x$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1) أ) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $3y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) .

ج) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

د) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\ln(e^x+1)-\frac{2}{3}x$.

❖ إستنتج نهاية f عند $-\infty$ ، وَ المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{e^x-2}{3(e^x+1)}$ ، ثم استنتج تغيّرات الدالة f .

II) n عدد طبيعي غير معدوم ، نسمي A_n المساحة بـ $(u.a)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) وَ المستقيم (Δ)، وَ المستقيمين اللذين معادلهما : $x=0$ وَ $x=n$.

1) برّر أنّ : $A_n=\int_0^n \ln(e^{-x}+1)dx$.

2) نقبل أنّ من أجل كل عدد حقيقي x : $\ln(1+e^{-x})\le e^{-x}$.

❖ بيّن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\ge 1$ فإنّ : $A_n\le 1$ ، هل المتتالية (A_n) متقاربة

III) (T) هو المماس للمنحي (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

1) ما هو معامل توجيه المماس (T) ؟ .

2) أنشئ كلا من(T) وَ المنحني (C_f) .

3) M وَ N نقطتان من المنحني (C_f) فاصلتاهما غير معدومتين و متعاكستان .

❖ بيّن أنّ المستقيم (MN) يوازي (T) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

n عدد طبيعي غير معدوم . نضع : $L_n = 9C_{n+1}^{2} + 27C_{n+1}^{3} + 81C_{n+1}^{4} + ... + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1/ بيّن أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2/ نضع : $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$ ، احسب S_n بدلالة n

3-أ)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي ن بواقي قسمة 4^n على 7

ب)عين مجموعة الأعداد الطبيعية n حتى يكون $L_n \equiv 0[7]$

4) نعتبر A مجموعة بواقي قسمة 4^n على 7

أ) كم عددا مؤلفا من 10 أرقام يمكن تشكيله من عناصر A ؟.

ب) كم عددا مؤلفا من 3 أرقام مختلفة يمكن تشكيله من عناصر A محصورا بين 200 و 400 ؟.

التمرين الثاني:(04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، ليكن (P) مستو معادلته : $x - 3y + z - 3 = 0$ و النقط : $A(2;-1;2)$ ، $B(2;0;1)$ ، $C(0;-3;-2)$ ، $S(-1;1;2)$

1-تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P).

2- أ-بيّن أن المستقيم (AC) له تمثيل وسيطي من الشكل: $t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$

ب-أثبت أن المستوي (P) والمستقيم (AC) منفصلان.

جـ-احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ ، ثم احسب مساحة المثلث ABC.

د-اكتب معادلة المستوي (Q) الذي يشمل النقطة B و يحوي المستقيم (AC).

3-أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) يشمل النقطة S و يعامد المستوي (Q)

ب) تحقق أن النقطة B مسقط عمودي للنقطة S على المستوي (Q).

جـ) احسب حجم رباعي الوجوه $SABC$.

4-أ) بين أن معادلة المستوي (SAB) هي: $2x + 3y + 3z - 7 = 0$

ب) احسب المسافة بين النقطة C و المستوي (SAB)،ثم استنتج مساحة المثلث SAB.

التمرين الثالث:(04 نقط)

I) ليكن $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث : $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$.

1) بيّن أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$ في المجموعة $\mathbb{C}$

II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$z_A=-1$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=\overline{z_B}$ على الترتيب .

1) التحويل النقطي S، يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=(1+i)z+i$

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عيّن عناصره المميّزة .

ب- لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟

2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقتها العدد المركب z_n .

نضع : $M_0=O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1}=S(M_n)$.

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n=(1+i)^n-1$.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط O ، A و M_n في استقامية

التمرين الرابع:(07 نقط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g وَ شكل جدول تغيّراتها .

3) بين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين 1 وَ 2 .إستنتج إشارة $g(x)$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$ ، (C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة : $\|\vec{i}\|=2cm$ وَ $\|\vec{j}\|=4cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) بيّن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)$.

3) إستنتج إشارة $f(x)'$ ، ثم شكل جدول تغيّرات الدالة f .

4) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(\alpha+1)}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. ثم أرسم المنحني (C) .

III) نريد إيجاد حصرا للمساحة A لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث : $\begin{cases}1\le x\le \dfrac{3}{2}\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$.

1) بيّن أنه من أجل كل $x\ge 1$: $\dfrac{\ln x}{x^2}\le f(x)\le \dfrac{\ln x}{x}$.

2) أ) أحسب العدد I حيث : $I=\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x}dx$.

ب)باستعمال التكامل بالتجزئة جد العدد J حيث : $J=\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x^2}dx$ واستنتج حصرا للمساحة A

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقط)

I 1) α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .- عيّن α و β حيث : $\alpha(\alpha^2-19)=35\beta$

2) لتكن (u_n) متتالية هندسية حده الأول u_0 و أساسها r حيث u_0 و r عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما و $u_0 \prec r$.

أ) اوجد u_0 و r حتى يكون : $35{u_0}^2+19u_1-u_0r^3=0$

ب)نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.اوجد الأعداد الطبيعية n حتى يقبل S_n القسمة على 30

التمرين الثاني:(07 نقط)

m عدد حقيقي . نعتبر التحويل النقطي T_m للمستوي في نفسه و الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=(m+i)z+m-1-i$

الجزء الأول : 1. هل يمكن اختيار قيمة للعدد m من أجله T_m انسحاب ؟

2. عين العدد الحقيقي m بحيث يكون T_m دوران يطلب تعيين مركزه و زاويته

الجزء الثاني : في كل ما سيأتي نضع : $m=1$

1-عين لاحقة النقطة الصامدة A بالتحويل T_1

2-من أجل كل $z\in\mathbb{C}-\{1\}$، احسب $\frac{z'-1}{z-1}$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد $\frac{z'-1}{z-1}$

3-أ- أثبت أن T_1 تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z : $z'-z=i(z-1)$

جـ- استنتج أنه إذا كانت M تختلف عن A فإن المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين

4-نعرف في المستوي المركب تركيب التحويل النقطي T_1 مع نفسه n مرة بالشكل التالي :

$T_1\circ T_1=T^{(1)}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، $T_1\circ T_1\circ....\circ T_1=T^{(n)}$

أ- ما هي طبيعة التحويل النقطي $T^{(n)}$ و ما هي عناصره المميزة

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها التحويل $T^{(n)}$ تحاكي

جـ- عين من بين التحويلات التالية تحاكي محددا نسبته : $T^{(2020)}$ ، $T^{(1440)}$ و $T^{(1962)}$

التمرين الثالث:(08 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الوحدة $2cm$.

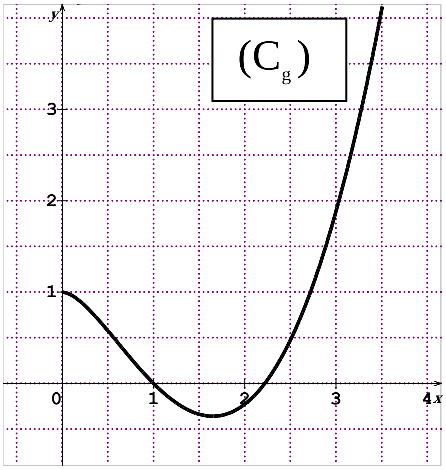
نعتبر الدالة العددية f والمعرفة بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$ و (C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f .

I-1)بيّن أن مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$.

2-أ)احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} e} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} e} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ يطلب تحديده.

جـ) $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.(**لاحظ** : $x(1-\ln x)=x-x\ln x$)



3-أ)بيّن أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$.

ب) بيّن أن الدالة f متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة على كلا من المجالين $[1;e[$ و $]e;+\infty[$

جـ)شكل جدول تغيرات الدالة f على D_f .

II) لتكن الدالة g والمعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$g(x)=1-x^2(1-\ln x)$ و (C_g) المنحنى الممثل لها (أنظر الشكل)

1)أ-حدد بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x)=0$.

ب-نعطي جدول القيم التالية:بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

x	2,1	2,2	2,3	2,4
g(x)	–0,14	–0,02	0,12	0,28

2-أ)تحقق من أنه من أجل كل x من D_f: $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$

ب) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطتين فاصلتاهما 1 و α

جـ) حدد إشارة $g(x)$ انطلاقا من المنحنى (C_g) على المجال $1;\alpha$

بيّن $f(x)-x\le 0$ من أجل كل x من $1;\alpha$.

3) إنشئ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

4)أ- أثبت أن: $\int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{1}{x(1-Lnx)}dx = Ln2$

ب- احسب بـ cm^2 ، A مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=\sqrt{e}$

III)المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من اجل كل n من $\mathbb{N}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1\le u_n\le\alpha$
2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة (يمكن استعمال سؤال الجزء الثاني 2. جـ)
3. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

1) نعتبر المعادلة $5x+4y=12$ حيث x و y عددان صحيحان

أ)جد ثنائية $(u;v)$ من الاعداد الصحيحة حيث $5u+4v=1$ ثم استنتج حل خاص للمعادلة (E)

ب) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) .

2) أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الاكبر للعددين x و y حيث $(x;y)$ حل لـ(E)

ب) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول (E) حيث $PGCD(x,y)=6$

3) الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر

النقاط $A(2;2;-1)$، $B(4;1;-2)$ و $C(-2;1;3)$

- بين ان النقاط A، B و C تعين مستويا(ABC) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

4)نعتبر (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC) و التي تنتمي الى المستوي $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) .

ب) برهن أنه توجد نقطة وحيدة M_0 من (Δ) إحداثياتها أعداد صحيحة حيث: $OM_0=3$

التمرين الثاني:(04 نقط)

الجزء(أ) نعتبر النقطتان A و D من الفضاء . ولتكن I منتصف القطعة AD

1) برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء فإن: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$

2) استنتج المجموعة E مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$

الجزء(ب) الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A\ 3;0;0$ ، $B\ 0;6;0$ ، $C\ 0;0;4$ ، $D\ -5;0;1$

1-تحقق أن $\vec{n}\ 4;2;3$ شعاع ناظمي للمستوي ABC ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي ABC

2/ اوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ العمودي على المستوي ABC ويشمل النقطة D

3/ لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي ABC. استنتج إحداثيات النقطة H

4/ احسب بعد النقطة D على المستوي ABC .

5/ برهن أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة E المعرفة في الجزء (أ)

التمرين الثالث:(04 نقط)

(u_n) المتتالية المعرّفة بـحدها الأول حيث : $u_0>0$ وَ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{5u_n+2}{u_n+4}$.

1) أ)عيّن العددين الحقيقيين a وَ b حيث : $u_{n+1}=a+\dfrac{b}{u_n+4}$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$.

2) عيّن u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

3) نفرض $u_0=3$ ، وَ نضع : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+\alpha}$ حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$.

❖ حدّد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وَ حدها الأول v_0

❖ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

4) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{u_0+1}+\dfrac{1}{u_1+1}+....+\dfrac{1}{u_n+1}$.

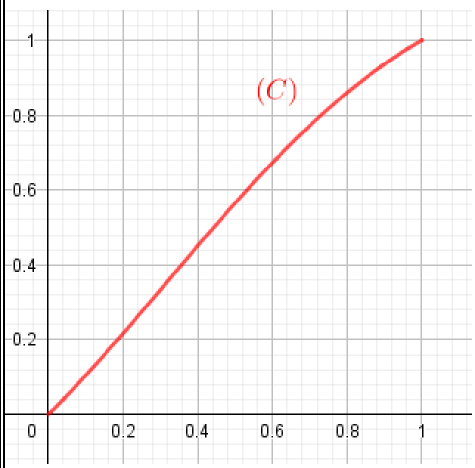
التمرين الرابع:(07 نقط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=e^x-x-1$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g . 2) عيّن إشارة $g(x)$ من أجل كل $x\in[0;+\infty[$.

3) إستنتج مما سبق أنّ : أ) من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $e^x-x>0$.

ب) من أجل كل $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$: $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{e^x-x}\le\dfrac{9}{10}$.



II)نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

(C) هو منحناها كما هو مبيّن في الشكل المقابل .

1) أ)بيّن أنّ: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(e^x-x)^2}$ ، حيث h دالة يطلب تعيينها

ب) ادرس تغيّرات الدالة h على $[0;1]$ ، ثمّ استنتج تغيّرات الدالة f على $[0;1]$

جـ) بيّن أنه من أجل كل $x\in[0;1]$ ، $f(x)\in[0;1]$.

2) (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

أ) برهن أنه من أجل كل x من $[0;1]$: $f(x)-x=\dfrac{(1-x)\times g(x)}{e^x-x}$.

ب) إستنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) على $[0;1]$.

III) نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $u_0=\dfrac{1}{2}$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

1) أ) أرسم (Δ) في الشكل أعلاه ، ثمّ عيّن على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب) أعط تخمينا حول تقارب المتتالية (u_n) .

2)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\dfrac{1}{2}\le u_n\le u_{n+1}\le 1$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ(u_n) ؟ .

3)برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-1\le(\dfrac{9}{10})^n(u_0-1)$. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقط)

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.

1)-أ-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n \succ 0$.

ب-ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n). ج-هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع : $v_n = \frac{u_n}{n}$.

أ- بيّن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1.

ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، نضع : $u_n = \frac{n}{2^n}$.

ج-لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - x\ln 2$.

عين نهاية الدالة f عند $+\infty$، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الثاني:(04 نقط)

تحتوي علبة على 7 كرات لا نميّز بينها عند اللمس ، 4 منها تحمل الرقم 1 وَ كرتان تحملان الرقم 2 وَ كرة واحدة تحمل الرقم 0 .

1) نسحب ثلاث كرات في آن واحد :

أ-أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم " . B : يوجد في الكرات المسحوبة الرقم 0 " .

C : " مجموع الأرقام المسحوبة يساوي 3 " .

ب-علما أنّ مجموع الأرقام التي تحملها الكرات يساوي 3 ،ما هو إحتمال أن تحمل نفس الرقم ؟ .

2) X هو المتغيّر العشوائي الذي يرفق كل سحب 3 كرات بمجموع الأرقام المسحوبة :

❖ أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

3) نسحب الآن ثلاث كرات على التوالي و بدون إرجاع وَ نسجل بالأرقام المسحوبة عددا طبيعيا رقم آحاده هو الرقم المسحوب ثالثا ، وَ رقم عشراته يسحب ثانيا ، وَ رقم المئات هو الرقم المسحوب أوّلا :

❖ أحسب إحتمال سحب عدد يقبل القسمة على 111 .

❖ ماهو إحتمال سحب عدد يقبل القسمة على 5 ؟ .

التمرين الثالث:(04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط:
$A(2;1;3)$،$B(3;2;5)$، $C(-1;7;6)$ و$E(0;4;4)$.

1) أ) بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا.

ب) بين أنه يوجد عددين حقيقيين α و β بحيث : $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. ماذا تستنتج؟

جـ) استنتج أن E مرجح للنقط A،B وC مرفقة بمعاملات يطلب تعيينها.

2) أ) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج $\cos(BAC)$.

ب) بين أن مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{9\sqrt{3}}{2}ua$.

3) أ) بين أن النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة $D(-1;3;5)$ على المستوي (ABC).

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

4) أ)بين أن E' منتصف قطعة المستقيم$[AC]$هي المسقط العمودي لـ E على المستقيم (AC)

ب) بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (DEE') هي: $x-2y-z+12=0$.

التمرين الرابع:(07 نقط)

I) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-\ln x$.

1) أدرس تغيّرات الدالة g . 2) إستنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$ ، و ليكن (C) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، الوحدة : $2cm$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند 0 وَ عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{x}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

4) أ) أثبت أنه توجد نقطة A من المنحني (C) يكون فيها المماس (T) لـ (C) موازيا لـ (Δ)

ب) ثمّ أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .

5) بيّن أنّ (C) يقطع محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α حيث : $0,3<\alpha<0,4$.

6) أرسم كلا من (Δ) ، (T) وَ المنحني (C) .

7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=\frac{1}{2}x+m$.

8)أحسب العدد الحقيقي $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$ وفسر النتيجة هندسيا.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

n عدد طبيعي ، نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a=8n+1$ و $b=7n+1$.

1) بين أن العددين a و b أوليين فيما بينهما.

2) نعتبر المعادلة : $23x-26y=1$ ... (E) حيث x و y عددان صحيحان.

أ) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى تكون الثنائية $(a;b)$ حلا للمعادلة (E).

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل المعادلة (E).

3) استنتج الأعداد الطبيعية a حيث : $\begin{cases} 0 \le a \le 25 \\ 23a \equiv 1[26] \end{cases}$.

التمرين الثاني:(04 نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

I-نعتبر النقط $A(3;-2;2)$، $B(6;-2;-1)$ ، $C(6;1;5)$ ، $D(4;0;-1)$

1-بيّن أن المثلث ABC قائم ثم احسب مساحته

2-بيّن أن الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظم للمستوي (ABC) .

- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3-احسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC)

- احسب حجم رباعي الوجوه ABCD

II - $(\mathcal{Q})$ مستوي معادلته الديكارتية : $x-2y+z-5=0$

1.عيّن الوضعية النسبية للمستويين $(\mathcal{Q})$ و (ABC)

2. $(\mathcal{Q})$ يقطع المستقيمات (DA) ، (DB) و (DC) على التوالي في النقط E ، F و G

- عيّن إحداثيات النقطة E و برهن أنها تنتمي للقطعة $[DA]$.

3.عيّن حجم رباعي الوجوه $EFGD$.

التمرين الثالث:(04 نقط)

أ)حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $(E): (z+\sqrt{3}-1)(z^2-2z+4)=0$

ب)في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A ،B و C التي لواحقها: $z_A=1-\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1-أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم بيّن أن $z_B^{2019}+z_C^{2019}=-2^{2020}$.

2- بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $z_B^n + z_C^n$ عدد حقيقي .
عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $z_B^n + z_C^n = 2^{n-1}$

3-أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\dfrac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$.
استنتج طبيعة المثلث ABC .

4- عين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ثم احسب الطولين BC و GA

5-نسمي (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تتحقق: $BM^2 + CM^2 = 12 ...(1)$

* بين أن النقطة A تنتمي للمجموعة (S)، ثم حدّد المجموعة (S) مع إعطاء عناصرها المميزة
* علم بدقة النقط A، B، C و G ثم أنشئ المجموعة (S).

التمرين الرابع:(07 نقط)

الجزء1:1. ادرس تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(t) = e^t - t - 1$

- ما هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$؟

2. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي t، $e^t \geq t + 1$ و $e^t > t$

الجزء2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 - 2\ln(e^x - x)$

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x^2 - 2x - 2\ln(1 - xe^{-x})$

ب- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (نقبل أن $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$)

2. أ- اشرح لماذا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها . (نقبل أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$)

3.في معلم متعامد ومتجانس (الوحدة: $3cm$). نعتبر القطع المكافئ P الذي معادلته $y = x^2 - 2x$ و(C) المنحني الممثل للدالة f .

أ- بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x^2 - 2x) = 0$. فسر النتيجة هندسيا.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين P و (C).

4.عين معادلة لكل من المماسين D و D' على الترتيب للمنحيين P و (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

5.ارسم في نفس المعلم المماسين D و D' و المنحنيين P و (C)

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية لكل من العددين 3^n و 4^n على 7

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $2\times 2006^{3n+2}+1424^{6n+1}\equiv 0[7]$

3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=2\times 3^n+3\times 4^n$

أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

ب) ما هي قيّم الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها S_n قابلا للقسمة على7 ؟

التمرين الثاني:(05 نقط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z-1+i)\left[z^2-2(2+\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}\right]=0$.

2)ينسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.نعتبر النقط A ، B و C .

التي لواحقها على الترتيب $z_A=1-i$ ، $z_B=2+\sqrt{3}+i$ و $z_C=2+\sqrt{3}-i$.

أ) بين أن $z_B-2=2e^{i\frac{\pi}{6}}$. استنتج إنشاء النقطة B ثم ارسم النقاط A ، B و C .

ب) عين اللاحقة $z_{B'}$ للنقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

ج) اكتب $\frac{z_B}{z_{B'}}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي ، استنتج عمدة العدد المركب z_B.

3) M نقطة متمايزة عن O لاحقتها $z=ae^{i\theta}$ حيث a عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي،

M_1 صورة النقطة M بالدوران r و M' نظيرة النقطة M_1 بالنسبة لحامل محور الفواصل.

أ) بين أن z' لاحقة النقطة M' تساوي $ae^{i(\frac{\pi}{6}-\theta)}$

ب)عين مجموعة قيم θ التي تحقق $z'=z$ ثم استنتج مجموعة النقاط M حيث $M=M'$.

التمرين الثالث:(04 نقط)

يتدرب لاعب على تسديد ضربات الجزاء لكرة القدم .

إحتمال تسجيل ضربة الجزاء الأولى هو $\frac{2}{3}$.

- عند تسجيل ضربة جزاء فإحتمال تسجيل الضربة الموالية هو $\frac{4}{5}$ و عند عدم تسجيل ضربة

جزاء فاحتمال عدم تسجيل ضربة الجزاء الموالية هو $\frac{1}{2}$.

-نسمي من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : A_n الحادثة "ضربة الجزاء من الرتبة n مسجلة "
و $\overline{A_n}$ الحادثة " ضربة الجزاء من الرتبة n غير مسجلة "
p_n إحتمال A_n و q_n احتمال $\overline{A_n}$.

1) أعط p_1 و q_1 ثم احسب p_2 و q_2 (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

2) بين ان من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $p_{n+1}=\frac{3}{10}p_n+\frac{1}{2}$

3) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n=p_n-\frac{5}{7}$

أ) برهن ان (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الاول .

ب) عبر عن u_n بدلالة n ثم استنتج p_n بدلالة n ، ثم عين نهاية المتتالية (p_n) .

4) عين اصغر عدد طبيعي n حيث : $p_n \geq 0,7123$.

التمرين الرابع:(07 نقط)

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+\frac{1}{2})-2x$

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x)=\ln(1-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x})$

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $g(-\ln 2)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

II-نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\ln\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)-\ln 2$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ماذا تستنتج ؟

ب) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ ، ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D)

2) أ) بين $f'(x)=e^{x-f(x)}(2e^{x}-1)$ حيث f' مشتق الدالة f .

ب) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

جـ) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3) أ) عين α فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل.

ب) ارسم (Δ) و (C_f).

4) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني.

أ) عين قيمة β التي تحقق $h(x)=f(x-\ln 2)+\beta$.

ب) استنتج كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من المنحنى (C_f).

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ، $(2\bar{z}-1+9i)(z^2-8z+32)=0$

2) نعتبر النقاط A ، B ، C و Ω ذات اللواحق $z_A=4+4i$ ، $z_B=\bar{z}_A$ ، $z_C=\frac{1}{2}+\frac{9}{2}i$ و $z_\Omega=i$

عين و مثل المجموعة (Γ) للنقاط $M(z)$ من المستوي حيث، $\arg(\bar{z}-4+4i)^2=\frac{\pi}{2}+2\pi k \quad / \ k\in\mathbb{Z}$

3) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=\frac{1}{2}(1+i)(z+1)$

أ) بين ان S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة ثم تحقق ان $S(A)=C$

ب) عين و مثل المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S

4)نعتبر متتالية النقط A_0 ، A_1 ، ... ، A_n حيث $A=A_0$ و من اجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $A_{n+1}=S(A_n)$

- نسمي z_n لاحقة A_n

أ) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n ، $z_n-i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}(z_0-i)$

ب) برهن أن المثلث ΩA_nA_{n+1} قائم في A_{n+1} و متساوي الساقين ثم استنتج طريقة لإنشاء A_2

5) عين أصغر عدد طبيعي n حيث A_n تنتمي الى القرص ذو المركز Ω و نصف القطر 0,02

التمرين الثاني:(04 نقط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 $(u_0\in\mathbb{N})$ و من اجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n=10^n(u_0+1)-1$

نعتبر المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ التالية: $61x-39y=38$

1) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (E) علما ان الثنائية $(23;35)$ حلا خاصا لها .

2) أ) بين ان : $u_{1982}\equiv u_0[33]$.

ب)بين ان $u_{1982}\equiv(39u_0+38)[61]$ لاحظة ان: $10^{60}\equiv1[61]$

جـ) إستنتج ان : $u_{1982}\equiv0[61]$ يكافئ $u_0\equiv35[61]$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7n}\equiv10^n[70]$

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $10^{7^n}\equiv10[70]$

4)في هذا السؤال نفرض ان: $u_0=0$ أنشر العدد 2019 وفق الأساس7ثم عين باقي u_{2019} على 70

التمرين الثالث:(04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقاط:

$A(1;1;0)$،$C(-1;0;1)$ $B(1;-2;4)$ و المستوي (P) الذي معادلته : $2x+y-z+3=0$.

1) ليكن $\vec{n}$ الشعاع الناظمي للمستوي (P).

أ) هل يوجد عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{n}$ ؟ ماذا تستنتج ؟

ب) بين أن التمثيل الوسيطي للمستوي (Q) الذي يمر بالنقطة A ويوازي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$

(أي $(A;\overrightarrow{AB};\vec{n})$ معلما له) هي الجملة : $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-3t+t' \\ z=4t-t' \end{cases}$ حيث t و t' عددين حقيقيين.

جـ) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (Q)، و أن المستويين (P) و (Q) متعامدان.

2)بين أن C نقطة مشتركة لمستويين (P) و (Q) و أن الشعاع $\vec{u}(14;-11;17)$ يعامد كل من $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ الشعاع الناظمي للمستوي (Q).

3)استنتج التمثيل الوسيطي للمستقيم (D') المسقط العمودي للمستقيم (AB) على (P)

التمرين الرابع:(07 نقط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2\left(1-e^{-x}\right)-x$

1)ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أن للعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم و الأخر α حيث : $\ln 4 \prec \alpha \prec \ln 6$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أثبت أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$ (يمكن وضع $x=2t$) . ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ \succ}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ \prec}}f(x)$ ثم فسّر النتائج هندسيا

3) أ- تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب- بيّن أن f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أنه لكل $x\in\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{e^x.g(x)}{x^3}$

جـ - ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) أنشئ المنحني (C_f) في المجالين $]-\infty;0[\cup]0;5]$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)$

أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\le u_n\le\alpha$

ب-بيّن أن :لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ ، جـ- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

د- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : و $U_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)U_n - \alpha}{U_n}$ $U_0 = 2$ حيث $\alpha \in]0;1[$

1) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $U_n \geq 1$.

ب- بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة ،ثم استنتج أن (U_n) متقاربة واحسب نهايتها .

2) نضع : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - \alpha}$. أ- بيّن أن (V_n) متتالية هندسية أساسها α

ب- اكتب عبارة V_n بدلالة n و α واستنتج عبارة U_n بدلالة n و α.

جـ - تحقق من نتيجة السؤال 1) جـ) وذلك بحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثاني:(05 نقط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1 + iz_2 = 1 + i\sqrt{3} \\ \left(\sqrt{3}+2i\right)z_1 - z_2 = \left(1-\sqrt{3}\right)i \end{cases}$

2) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A = 1 - i$ و $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

أ)أكتب z_A على الشكل الأسي . ب)بين ان: $z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}} z_A$ ، ثم إستنتج الشكل الأسي للعدد z_B

3)أ)جد لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O و زاويته $-\dfrac{\pi}{6}$

ب) احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BD]$ مقدرة بوحدة المساحة .

جـ) عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[\left(z - z_B\right)^2\right] = \arg(z_B) - \arg(z_D)$

4) عين طبيعة المثلث ABC ثم استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$. حيث $z_C = 1 + i$.

5)ليكن التحويل النقطي S المعرف كما يلي: $S = r \circ h$ مع h تحاكي مركزه O و نسبته -2

أ) عين طبيعة التحويل S مع تعيين خصائصه المميزة

ب)نعرف من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \geq 2$ ، التحويل النقطي H_n كما يلي: $H_n = \underbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

- عين قيم n حتى يكون H_n تحاكي يطلب تعيين خصائصه.

التمرين الثالث:(04 نقط) .

1)أثبت أن العدد 251 عدد أولي.

2)حلل العدد 2008 إلى جداء عوامل أولية .

أ)استنتج كل الأعداد الأولية التي مكعب كل منها يقسم العدد 2008.

ب) عين الأعداد الطبيعية a وb بحيث: $m^3+35d^3=2008$

علما أن: $m=PPCM(a;b)$ و $d=PGCD(a;b)$.

التمرين الرابع:(07 نقط)

I) 1) لتكن الدالة u المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $u(t)=3\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}$

- عين اتجاه تغير الدالة u .

2) ليكن الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $\begin{cases} f(x)=x^3\left[\ln(1+x)-\ln x\right] & ; x\in]0;1] \\ f(0)=0 \end{cases}$

أ) أثبت أن f قابلة للإشتقاق على يمين 0 .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;1]$ ، $f'(x)=x^2u\left(\dfrac{1}{x}\right)$

جـ) عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

II) نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $[0;1]$ بـ :

$g(x)=x^3\ln(x+1)$ و $\begin{cases} h(x)=x^3\ln x & ; x\in]0;1] \\ h(0)=0 \end{cases}$.

ليكن على الترتيب (C_f)، (C_g) و (C_h) منحنيات الدوال f ، g و h في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\|=4\ cm$

1) أ) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$: $f(x)=g(x)-h(x)$

ب) عين الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_g) .

2) ليكن (T) و (T') مماسين لـ (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$ على الترتيب .

- أثبت أن (T) و (T') متوازيان .

3) أنشئ المنحنى (C_f)

4) لتكن H الدالة الأصلية الوحيدة لـ h على المجال $[0;1]$ و التي تنعدم عند 1 .

أ) ليكن $\alpha\in]0;1]$ و $A_\alpha=\int_\alpha^1 x^3\ln x\,dx$, عبر عن A_α بدلالة الدالة H

ب) أحسب A_α باستعمال التكامل بالتجزئة ثم أستنتج $H(0)$.

5)عين مساحة الحيز المحددة بالمنحنيين (C_f)و(C_g)والمستقيمين ذو المعادلتين $x=0$ و $x=1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z+3)\left[(z+2-2i)^2-(2-i)^2\right]=0$.

2. في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B وC حيث $z_A=-3$ ، $z_B=i$ و $z_C=-4+3i$.

• عين زاوية الدوران الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C. ماذا تستنتج

3.أ)عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,2);(B,1);(C,-1)\}$ ثم أكتب z_G على الشكل الأسي

ب) عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(\frac{z_G}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا تخيليا صرفا جزءه التخيلي موجب.

جـ) عين وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $2MA^2+MB^2-MC^2=-2$.

د) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $2MA^2-MB^2-MC^2-IB^2=0$

حيث I منتصف قطعة المستقيم [BC].

التمرين الثاني : :(04 نقط)

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (الوحدة 8cm)، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحنى (C) الممثل للدالة f المعرفة على $[0;2]$ بـ: $f(x)=x(2-x)$

2)أ-باستعمال الرسم السابق،مثل على حامل محور الفواصل،دون حساب كلا من u_0، u_1، u_2، u_3

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

3) أ- برهن بالتراجع أنه لكل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متزايدة استنتج أن (u_n) متقاربة ، ما هي نهايتها ؟

4) 3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\ln(1-u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب-استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) أ) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n=(1-u_0)(1-u_1)........(1-u_n)$ ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

التمرين الثالث: :(04نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،

تعطى النقط $A(1,1,-2)$،$B(1,2,-2)$،$C(0,1,1)$.

1)بيّن أنّ النقط A،B،C تعرّف مستويا P.

2)تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}=3\vec{i}+\vec{j}$ ناظمي للمستوي P، ثم استنتج معادلة ديكارتيّة لـ P.

3)ليكن المستوي Q المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم (AC).

ا)أعط معادلة ديكارتيّة للمستوي Q.

ب) برهن أنّ P و Q متعامدان وفق المستقيم (AB).

4) S_m مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث: $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0$ ؛ (m وسيط حقيقي)

ا)برهن أنه مهما كان m، فإنّ S_m هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها I_m ونصف قطرها R_m.

ب)بيّن أنه عندما يتغيّر m في $\mathbb{R}$ فإنّ مجموعة النقط I_m هي المستقيم (AB).

التمرين الرابع : :(07 نقطة)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. وحدة الطول هي 2cm

I)لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)$ و (C_g) تمثيلها البياني

1) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ وفسر النتيجة الأخيرة بيانيا.

2) بيّن أن g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيراتها. ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$ و (C_f) تمثيلها البياني

1- احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

4- ارسم (T) و (C_f)

5- أ/ بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $g(x)+2g'(x)+g''(x)=2e^{-x}$

ب/ استنتج دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

III- لتكن الدالة k المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $k(x)=f(\ln x)$ و (C_k) تمثيلها البياني

1- احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} k(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ وفسر النتيجتين بيانيا.

2-احسب $k'(x)$ ثم بين أن $k'(x)=\dfrac{1}{x^2}g(\ln x)$.

3-ادرس اشارة $k'(x)$ (استعمال اتجاه تغير كلا من g والدالة ln)، ثم شكل جدول تغيرات k

4-ارسم المنحنى (C_k) في المعلم السابق.

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقط)

أ-حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة E . $11x-7y=5$,حيث x و y عددان صحيحان نسبيان .

ب-في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس نعتبر المستقيم D ذو المعادلة $11x-7y-5=0$,نرمز بـ Δ لمجموعة النقط $M(x,y)$ من المستوي بحيث $0\le x\le 50$ و $0\le y\le 70$

1)عين عدد النقاط من D التي تنتمي إلى Δ و التي تكون إحداثياتها أعداد صحيحة نسبية .

2)نعتبر المعادلة F $11x^2-7y^2=5$ حيث x و y عددان صحيحان نسبيان.

أ-أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة F فإن $x^2\equiv 2y^2[5]$.

ب- ليكن x و y عددين صحيحين نسبيين. أنقل ثم أتمم الجدولين الآتيين :

x	0	1	2	3	4	$\equiv[5]$
x^2						

y	0	1	2	3	4	$\equiv[5]$
y^2						

جـ)استنتج أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة F فإن كل من x و y مضاعف لـ 5 .

3)أثبت أنه إذا كان كل من x و y مضاعف لـ 5 فإن الثنائية (x,y) ليست حلا للمعادلة F .

التمرين الثاني:(05 نقط)

تحتوي علبة على 3 كرات حمراء تحمل الأرقام : 2;1;1 وَ كرتين بيضاوين تحملان الرقمين : 2;1

I) نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من العلبة ، و نعتبر الحادثتين :

A :"الكرتان المسحوبتان حمراوان "B:"الكرتان المسحوبتان تحملان رقمين مجموعهما زوجي "

B : " الكرتان المسحوبتان تحملان رقمين مجموعهما عدد زوجي " .

أ)جد الإحتمالات التالية: $p(A)$ ، $p(B)$ ، $p(A\cap B)$ ، $p(\overline{A\cup B})$،هل الحادثتان A وَ B مستقلتان ؟

ب) إذا كانت الكرتان المسحوبتان حمراوين ، فما هو إحتمال أن يكون مجموع رقميهما زوجي ؟

جـ) ما هو إحتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون وَ الرقم ؟ .

II) التجربة التالية تقتضي سحب كرتين على التوالي وَ بدون إرجاع .

نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي يرفق كل سحب بمجموع الرقمين المحصل عليهما .

1) أكتب قانون إحتمال X . 2) أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع:(10نقط)

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=-4e^{2x}+17e^{x}-4$

بين انه من اجل كل $x\in\mathbb{R}$، $g(x)=-4(e^{x}-4)\left(e^{x}-\frac{1}{4}\right)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^{*}$ بـ : $f(x)=\frac{(4x+9)e^{x}-4x}{9(1-e^{x})}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني

1) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$.

2) عين العددين الحقيقيان a، b بحيث من اجل كل $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)=ax+b+\frac{1}{1-e^{x}}$.

3) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالات مجموعة تعريفهـا.

4) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x، $f'(x)=\frac{g(x)}{9(1-e^{x})^{2}}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتهـا

5) بين انه من اجل كل عدد حقيقي غير معدوم x: $f(-x)=-1-f(x)$. ماذا تستنتج؟

6) أ) بين ان (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان لـ (C_f) معادلتهما على الترتيب: $y=-\frac{4}{9}x-1$ و $y=-\frac{4}{9}x$

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2).

7) أنشئ (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $\frac{e^{x}}{1-e^{x}}=m$

9) أ) عين مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحددة بـ (C_f) و (Δ_2) و المستقيمين الذي معادلتهما $x=-\ln 4$ و $x=\lambda$ مع $\lambda<-\ln 4$ ب) احسب $\lim_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)$.

III) F الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$: $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{e^{t}}{t}dt$ و (C_F) تمثيلها البياني

1) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $F(x)$ ، فسر هندسيا $F(\lambda)$ من اجل $\lambda>1$.

2) t عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$

أ) بين انه اذا كان $1\le t\le x$ فان : $\frac{e}{t}\le\frac{e^{t}}{t}\le\frac{e^{x}}{t}$ و اذا كان $x\le t\le 1$ فان : $\frac{e^{x}}{t}\le\frac{e^{t}}{t}\le\frac{e}{t}$

ب) استنتج انه من اجل: $x\ge 1$: $e\ln x\le F(x)\le e^{x}\ln x$ وانه من اجل $0<x\le 1$: $e^{x}\ln x\le F(x)\le e\ln x$

3) ادرس تغيرات الدالة F ثم شكل جدول تغيراتهـا

4) احسب $F''(x)$ ثم استنتج ان المنحنى (C_F) يقبل نقطة انعطاف Ω يطلب تعيين احداثياها ، ثم أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_F) في النقطة Ω .

5) أنشئ المستقيم (T) و المنحنى (C_F) على المجال $[0;3]$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (P) المستوي الذي معادلة له $x+y-z+2=0$

1. أ) تحقق أن النقطة $I(0;-1;1)$ تنتمي إلى (P).

ب) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) العمودي على (P) في I.

جـ) تحقق أن النقطة $\Omega(1;0;0)$ تنتمي إلى المستقيم (D).

2. (C) الدائرة من (P) التي مركزها I ونصف قطرها 1 و (S) سطح الكرة الذي مركزه Ω ويقطع المستوي (P) في الدائرة (C).

أ) بين أن نصف قطر (S) هو 2.

ب) عين معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

3. m عدد حقيقي و (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث:

$$x^2+y^2+z^2+mx+(m+2)y-(m+2)z+2m+1=0$$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي m، (S_m) سطح كرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

ب) بين مجموعة النقط I_m هي المستقيم (D) عندما يتغير m.

التمرين الثاني : :(05 نقط)

I) نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف كما يلي : $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$

1) بين ان $P(z)$ يقبل جذرا حقيقيا يطلب تعيينه .

2) بين انه من اجل كل $z\in\mathbb{C}$: $P(z)=(z-2)Q(z)$ حيث $Q(z)$ كثير حدود يطلب تعيينه

3) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$

II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=1-i$ و $z_C=1+i$

1) احسب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC

2) r دوران مركزه A و يحول B الى C . عين لاحقة النقطة D صورة C بالدوران r .

3) (γ) دائرة قطرها $[BC]$. عين (γ') صورة (γ) بالدوران r .

4) M نقطة من (γ) تختلف عن C صورتها M' بالدوران r بحيث z و z' لاحقتي M و M' على التوالي

أ) بين وجود عدد حقيقي θ حيث : $z=1+e^{i\theta}$

ب) عبر عن z' بدلالة θ .

5) بين ان : $\frac{z'-z_C}{z-z_C}$ حقيقي ثم استنتج ان النقط M ، M' و C في استقامية .

التمرين الثالث: (04 نقط)

1) عيّن الثنائيات $(a;b)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث : $PGCD(a;b)=48$ وَ $PPCM(a;b)=2160$.

2) عيّن الأعداد الحقيقة x التي تحقّق : $9x\equiv 17[5]$.

3) إستنتج مما سبق حلول المعادلة $432x-240y=816$ ، حيث x وَ y عددان صحيحان .

4) n عدد طبيعي باقي قسمته على 9 هو 2 ، وَ باقي قسمته على 5 هو 3 :

أ) بيّن أنّ باقي قسمة n على 45 هو 17 .

ب) إستنتج قيمة n علما أنه محصور بين 1980 وَ 2025 .

5-أ)حلّل 2016 إلى جداء عوامل أوّلية ،ثم جد الأعداد الطبيعية التي مربّع كل منها يقسم 2016

ب) في أيّ نظام تعداد يكتب 2018 على الشّكل : $\overline{1202}^{x}$.

التمرين الرابع: (07 نقط)

أ- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$

1-ادرس تغيرات الدالة g.

2-بيّن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $0,5\prec\alpha\prec 0,6$ يحقق: $g(\alpha)=0$

-استنتج إشارة $g(x)$

ب-نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right);\ x\succ 0$ و $f(0)=0$

نرمز بـ (C) للمنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول 5cm

1- أ) احسب نهاية $x.f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

ب)استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و فسّر النتيجة بيانيا.

2- أ) أثبت أن : $f(\alpha)=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب) بيّن أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ فإن : $f'(x)=g(x)$

جـ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}$ أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة .

د) بيّن أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=0$ ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للدالة f ؟

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- ارسم بعناية المنحني (C) الممثل للدالة f

5- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=f(e^x)$

أ-ادرس تغيرات الدالة h .

ب-أنشئ التمثيل البياني للدالة h.

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر الشعاع : $\vec{n}=\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$
و النقط $A(3,4,0)$، $B(0,5,0)$ ، $C(0,0,5)$ ، $E(1,2,1)$ ، $D(-1,2,5)$

1. أ- بين أن النقط A، B ، C تعيين مستوي (ABC)
ب- تحقق من أن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة ديكارتية له
2. أ- برهن أن المثلث AOB متساوي الساقين
ب- عين احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ، ثم بين أن : $OI=\frac{3\sqrt{10}}{2}$
جـ- بين أن الشعاع $\overrightarrow{OC}$ عمودي على المستوي (AOB) ثم استنتج حجم الرباعي $OABC$
3. m وسيط حقيقي ، نعتبر (P_m) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق :
$$2mx+(1-m)y+mz-m-2=0$$
أ- بين أن المجموعة (P_m)هي مستوي يطلب تعيين شعاع ناظم له
ب-بين أن جميع المستويات (P_m) مشتركة في مستقيم ثابت (Δ)يطلب تحديد تمثيلا وسيطيا له.
جـ- ما هي علاقة المستقيم (Δ) بالمستقيم (ED)
د- حدد قيمة للعدد m من أجلها يكون المستوي (P_m) عموديا على المستوي (ABC)

التمرين الثاني:(04 نقط)

1)في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$نعتبر النقطتين A و B لواحقهما على الترتيب $z_A=-\sqrt{3}+i$ و $z_B.z_A=-2i$

أ) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ، ثم مثل A و B.

ب)جدطويلة وعمدة العدد $\frac{z_A}{z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABO وقيسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$

جـ) مثل النقطة C حتى يكون الرباعي ACBO معين ، ثم عين لاحقة النقطة C

3) f تحويل نقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M(z) النقطة M'(z') حيث: $z'=e^{-\frac{\pi}{6}i}z$

أ) تعرف على طبيعة التحويل f وعيّن عناصره المميزة.

ب)عيّن على الشكل الأسي لواحق النقط 'A، 'B و'C صور النقط A، B وC على الترتيب f

، ثم احسب مساحة المثلث $A'B'C'$ بطريقتين مختلفتين

التمرين الثالث:(04 نقط)

(u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 (تعطى النتائج بتقريب 10^{-2}) ثم أعط تخمينا حول اتجاه تغير (u_n).

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \le n+3$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. ثم استنتج صحة تخمينك.

3) نسمي (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n - n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$. ثم عين نهاية المتتالية (u_n).

4) من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$، نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

أ) عبر عن S_n بدلالة n.   ب) عين نهاية المتتالية (T_n).

التمرين الرابع:(07 نقط)

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} - \ln|x-1|$. و (C_f) المنحنى البياني للدالة f

1-أ) جد $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ب) جد $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

2-أ- بيّن أن الدالة f قابلة للاشتقاق على مجالي تعريفها ، ثم بيّن أن : $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ) تحقق أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in]4;5[$

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيتيها.

جـ) أثبت أن (C_f) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيه كل منهما (2-) وأكتب معادلتيهما.

د) أحسب $f(6)$ ، $f(10)$، $f(-1)$ ، $f(-4)$ و $f(-8)$ ثم ارسم المماسين (Δ) و (Δ') و (C_f)

هـ) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة:

$$m(x-1) = 2x^2 - x - (x-1)\ln|x-1|$$

4- نعتبر الدالة g والمعرفة على $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x) = e^{-x}\ln(e^x - 1)$

أ) بيّن أنه من كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن: $g'(x) = e^{-x}f(e^x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير g .

ب) احسب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x)$ وبيّن أن $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g.

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(05 نقط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

1.) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(z^2-2+i2\sqrt{3}\right)\left(z^2-8\sqrt{3}z+64\right)=0$.

2.) A،B نقطتان من المستوي لاحقتاهما $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$ على الترتيب.

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسي.ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

ب-عين لاحقة D صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ علما أن $z_C=-\sqrt{3}+i$

3.) لتكن G مرجح الجملة $\{(O;-1),(D;1),(B;1)\}$

أ-) تحقق أن G موجودة و احسب لاحقتها z_G ب-)أنشئ النقط A،B ، C،D و G.

عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MG}\right\|$

جـ-) أحسب العدد المركب $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}$ ثم استنتج أن النقط C، D و G في إستقامية.

و أن G صورة النقطة D بتحويل نقطي H يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .

د) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

4.) عيّن النقطة F حتى يكون الرباعي ACGF معين و احسب مساحته

التمرين الثاني : :(04 نقط)

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث: $U_0=1$ و $\ln U_1+\ln U_2=-3\pi$

أ)عين q أساس هذه المتتالية ، وأحسب U_n بدلالة n .

ب) نسمي P_{n+1} المجموع : $U_0+U_1+......+U_n$.أحسب P_{n+1} بدلالة n ، ثم جد $\lim_{n\to+\infty}(P_{n+1})$

2) $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كمايلي: $V_n=\ln(U_n)$

أ) بين أن $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب) نسمي S_{n+1} المجموع : $V_0+V_1+......+V_n$.أحسب S_{n+1} بدلالة n، ثم بين أن $\sin(S_{n+1})=0$

3- أ) نضع : $A_{n+1}=V_0\times V_1\times......\times V_n$ و $B_{n+1}=U_0\times U_1\times......\times U_n$

و برهن أن $A_{n+1}=\left(V_0\times q^{\frac{n}{2}}\right)^{n+1}$ ثم أحسب كلا من A_{n+1} و B_{n+1} بدلالة n

ب) عين الحد U_p بحيث يكون : $B_{p+1}=e^{-6\pi}$

التمرين الثالث :(04 نقط)

1) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-2y=1$ .... (E)

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . أ) بين أن الثنائية $(14n+3;21n+4)$ حلا للمعادلة (E) .

ب) استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما .

3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$.

أ) بين أن $d=1$ أو $d=13$. ب) بين أن $n\equiv 6[13]$ يكافئ $d=13$.

4) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ نضع : $B=28n^3-8n^2-17n-3$ و $A=21n^2-17n-4$.

أ) بين أن A و B قابلان للقسمة على $(n-1)$ في المجموعة $\mathbb{Z}$.

ب) حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الرابع:(07 نقط)

I- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x، $\frac{1}{1+e^{-x}}=1-\frac{1}{e^x+1}$. ثم بين أن f دالة فردية .

2. احسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ثم استنتج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3. أ) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$، $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$ ثم استنتج جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $1-\frac{2}{e^x+1}\leq\frac{1}{2}x$.

4. احسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

5. ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلة له $y=-\frac{1}{2}x+1$ والمنحنى (C_f).

6. أ) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^x+1}$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتهما على الترتيب، $x=-1$ و $x=0$.

II- (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1. إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$ بين أن $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$.

2. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $2^n.u_n\leq 1$ ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقط)

1. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 1885 ، 580

2. α عدد صحيح . نعتبر المعادلة $1885x-580y=\alpha......1$

- أوجد الشرط اللازم و الكافي الذي يحققه α حتى تقبل المعادلة 1 حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

3. نفرض فيما يلي أن: $\alpha=1305$ - حل المعادلة 1

- أوجد الحلول x,y بحيث يكون العدد x قاسما للعدد y.

التمرين الثاني : :(05نقط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء , لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس . نسحب عشوائيا دون إرجاع 3 كريات من الصندوق .

1)أحسب احتمال الأحداث التالية :

A سحب كرة من كل لون ، B سحب ثلاث كرات من نفس اللون

C سحب لونين فقط ، D سحب الكرة الصفراء

2)نسحب من هذا الصندوق 3 كريات في آن واحد (كل السحبات لها نفس الاحتمال) ونعتبر أن سحب كرية سوداء يعطي ربحا قدره m دينارا وأن سحب كرية غير سوداء يعطي خسارة قدرها 100دينارو ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب الربح الجبري المحصل عليه

أ- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي .

ب-عين قيمة العدد m حتى تكون اللعبة عادلة.

جـ-نفرض أن $m=140$ ، احسب احتمال الحادثة $X\succ100$.

التمرين الثالث :(04 نقط)

1) (U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : $\ln U_1+\ln U_5=-12$ و $\ln U_2-\ln U_4=4$

*عين أساسها وحدها الأول U_0، ثم أكتب U_n بدلالة n

* نضع $S_n=U_0+U_1+.......+U_n$ أحسب S_n بدلالة n ثم نهاية S_n لما تؤول n إلى $+\infty$

2) (V_n)المتتالية العددية المعرفة كمايلي: مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $V_n=\ln U_n+\ln U_{n-1}$

* بين أن (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

نضع $T_n = V_0 + V_1 + ... + V_n$ عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $T_n^2 = 2^{2020}$

التمرين الرابع:(07.5 نقط)

الجزء الأول :لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + x + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة g

2. أ- برهن أن المعادلة : $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-1.3 < \alpha < -1.2$

ب- عين حسب قيم x إشارة $g(x)$

الجزء الثاني :نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+e^x}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ - (الوحدة : $5cm$)

1. أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ مفسرا بيانيا النتيجة المحصل عليها

ب- بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

جـ- برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته : $y = x$

ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{e^x.g(x)}{(1+e^x)^2}$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f تحقق أن: $f(\alpha) = \alpha + 1$ ثم شكل جدول التغيرات للدالة f

3- $H(x;0)$ نقطة من المستوي و المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب (yy') والمار من H يقطع (C_f) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ولنضع : $K(x) = MN$

أ- بين أن : $K(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$

ب- بين أنه من أجل كل $x \geq 0$: $K'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \times g(-x)$

جـ- استنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عند $(-\alpha)$

3. أ- برهن أن : $f'(-\alpha) = 1$

ب- بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ)

جـ- أنشئ في نفس المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

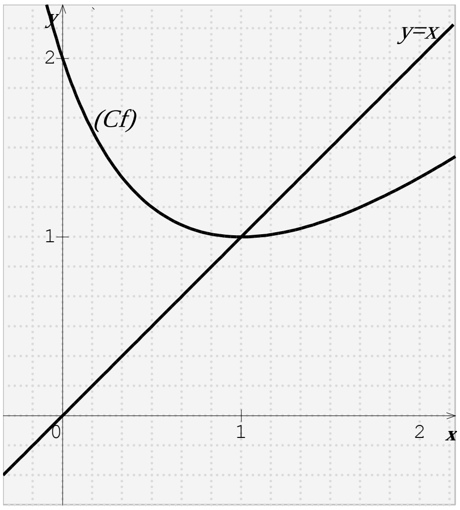
4. أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$، لدينا : $\dfrac{e^x}{1+e^x} \leq f(x) \leq x$

ب- استنتج باستعمال المتباينة السابقة ، حصرا لمساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = -\alpha$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0,2]$ بـ : $f(x)=\frac{x^2-x+2}{x+1}$



1. ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0,2]$

استنتج أنه إذا كان $x\in[1,2]$ فإن $f(x)\in[1,2]$

2. نعرف المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من اجل كل عدد طبيعي n

أ- أنقل الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 مبرزا خطوط الرسم

ب- ما هو تخمينك حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n)

3. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1<u_n\leq 2$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

جـ- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

4. أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_{n+1}-1\leq\frac{1}{3}(u_n-1)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n-1\leq\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و أوجد مرة أخرى $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$

جـ- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=u_1+u_2+......+u_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $n<S_n\leq n+\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني:(04 نقط)

أ- عين العدد المركب α حيث : $\alpha(1+i)=1+3i$ ب- تحقق من أن : $i\alpha^2=-4+3i$

1. من أجل كل عدد مركب z نضع: $f(z)=z^2-(1+3i)z-4+3i$

أ- بين أن: $f(z)=(z-\alpha)(z-i\alpha)$

ب- استنتج في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $f(z)=0$

ب :نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين $z_A=2+i$ و $z_B=-1+2i$ على الترتيب.

أ-مثل النقطتين A و B في مستوي مركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

1-أثبت أن المثلث OAB قائم في O ومتساوي الساقين.

2- عين لاحقة النقطة D التي من أجلها يكون المثلث OCD قائم في O ومتساوي الساقين.(مباشر)

1. نسمي M منتصف القطعة $[BC]$

أ- عين لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{DA}$, ثم بين أن المستقيمين (OM) و (DA) متعامدان

ب- استنتج أن : $OM = \frac{1}{2}DA$

2. نسمي J ، K و L منتصفات القطع $[CD]$, $[DA]$ و $[AB]$ على الترتيب .

أ- بين أن الرباعي $JKLM$ متوازي أضلاع

ب- باستعمالالجزء الأول من التمرين , بين أن الرباعي $JKLM$ مربع

التمرين الثالث:(05 نقط)

1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n, بواقي قسمة 3^n على 5 .

استنتج بواقي القسمة الإقليدية للعددين $(1439)^{2018}$ و $(1962)^{1954}$ على 5 .

2)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد :

$(2018)^{4n+3} - 2\times(1962)^{1954} + (1439)^{2018}$ مضاعف لـ 5

3)عين الأعداد الطبيعية n حتى يقبل العدد $3^{4n+1} + 2017^n - 6$ القسمة على 5 .

التمرين الرابع:(07 نقط)

I -نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2-x)e^x + 2$

1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2)بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.3$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \dfrac{e^x + 2x}{e^x + 2}$. نسمي (C_f) تمثيلها البياني.

1) أ)بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = \dfrac{1+2xe^{-x}}{1+2e^{-x}}$ ثم احسب نهاية الدالة f عند $\pm\infty$

ب)جد $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)$ ، استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين،حددا وضعية كل منهما و (C_f)

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) نقبل أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا β على المجال $]-0.4;-0.3[$.

• بين أن معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة التي ترتيبها 0 هي: $y = x - \beta$. وبين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$.

3) ارسم كل من المستقيمين المقاربين (C_f) .

III- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

1) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\beta < u_n \le 1$.

ب) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها.

الاختبار 9 في مادة الرياضيات المـــدة:04ساعات ونصف

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقط)

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ لتكن النقط $A(2;1;1)$ ، $B(1;1;0)$ و $C(1;0;1)$

1.احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ثم $\cos A$ استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2.ما هي طبيعة المثلث ABC ؟ ، احسب مساحته .

3.عين العددالحقيقي α بحيث الشعاع $\vec{n}(1;\alpha;\alpha)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم جد معادلة ديكارتية له

4. من اجل كل عدد حقيقي m ليكن المستوي (P_m) الذي له معادلة ديكارتية :

$$(m+2)x+my+(2m+1)z+m+1=0$$

ا) بين أن كل المستويات (P_m) تحتوي مستقيم ثابت يطلب تمثيلا وسيطيا له .

ب) بين ان المستوي (ABC) هو احد المستويات (P_m) .

5. لتكن النقطة $D(2;0;0)$ ، بين أن $ABCD$ رباعي وجوه ثم احسب حجمه V .

6. ليكن سطح الكرة (S) الذي مركزه $E(\frac{3}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ ويشمل D .

ا) بين أن (S) يشمل A و B .

ب) بين أن المستوي (ABC) يقطع (S) وفق الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC .

ج) ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل E ويعامد (ABC) ، اكتب تمثيلا وسيطيا له .

د) عين إحداثيات I مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

هـ) لتكن F نظيرة D بالنسبة إلى I بين أن حجم رباعي الوجوه $ABCF$ هو V .

التمرين الثاني:(05 نقط)

في المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر في مايلي النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=4-3i$ ، $z_B=4+3i$ و $z_C=7$ على الترتيب .

عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية :

1)المعادلة $z^3-15z^2+81z-175=0$ للمتغيّر المركّب z حيث $z_0=7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي: أ) $S=\{7,4-3i,4+3i\}$ ب) $S=\{7,-4-3i,-4+3i\}$، ج) $S=\{-7,4-3i,4+3i\}$

2)العدد $(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C})^{2018}$ يساوي: أ) 1 ، ب) 0 ، ج) -1.

3)لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ المثلّث ABC: أ)قائم ، ب)قائم في C ومتساوي الساقين، ج) متقايس الاضلاع

4)العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = 4$ و يُحوّل النقطة C إلى النقطة B هي : أ) $z' = iz + 4 - 4i$ ، ب) $z' = 2iz + 3 - 4i$ ، ج) $z' = iz + 3 - 4i$.

5) (T) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركّب حيثُ يكون $\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ هي

أ)المستقيم (AB)، ب) دائرة قطرها $[AB]$ ، ج) هي نصف دائرة قطرها $]BC[$

التمرين الثالث:(04 نقط)

يحتوي كيس على 10 كريات بحيث 5 كرات حمراء تحمل الأرقام :0 ، 1، 1- ، 2 و 2-

و3كرات خضراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1- و كرتين سوداوين تحملان الرقمين 0 و 1-.

1-نسحب عشوائيا كرتين من هذا الصندوق وفي أن واحد.

احسب احتمالات الحوادث التالية : A : " الكرتين المسحوبتين تحملان نفس الرقم "

B : الكرتين المسحوبتين تحملان من لونين مختلفين " . C : " مجموع الأرقام المسحوبة معدوم " .

2- X هو المتغيّر العشوائي الذي يرفق كل سحبة من هذا الكيس ممكنة العدد الحقيقي $\ln|x+y|$ حيث x و y هما الرقمان المسجلان على الكرتين المسحوبتين من هذا الكيس.

أ- عيّن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب-أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

التمرين الرابع:(06 نقط)

I. لتكن g الدالّةالعدديّة المُعرّفة على المجال بـ : $g(x) = x + 2 - 2\ln(x)$: $]0,+\infty[$.

1) أدرس تغيرات الدّالّة g، ثمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) تحقق أن $g(2) > 0$ ثم استنتج أن $g(x) > 0$

II. لتكن f الدالّة العدديّة المُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x) = x - (\ln(x) - 1)^2$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1)أحسُب نهايات الدّالّة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا .

2)أثبت أن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغيُّر الدّالّة f . شكّل جدول تغيُّراتها.

3)أثبت أن المستقيم (Δ) ذاالمعادلة $y = x$ مماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e. ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).

4)بين أن $f''(x) = \dfrac{2}{x^2}(\ln(x) - 2)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعين احداثياتها

5)أنشئ (C_f) و (Δ) ثم ناقش، بيانيّاً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x، حيثُ $(\ln(x) - 1)^2 = -m$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4.5 نقط)

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 10 .

2) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $33^{16n+2}-2\times 109^{8n+1}-11\equiv 0[10]$.

3) عيّن الأعداد الطبيعية n حيث : $7\times 3^{n+1}-1\equiv 0[10]$ وَ $10<n\leq 25$.

4)Aعدد مكتوب بـ: $\overline{xx0xx02}$ في النظام ذي الأساس3و مكتوب بـ: $\overline{y612}$ في النظام ذي الأساس7

أ- عيّن كلا من x وَ y .   ب- أحسب العدد A في النظام العشري .

جـ- أكتب العدد A في النظام ذي الأساس 9 .

5) يحتوي صندوق على 4 كرات لا نفرق بينها عند اللمس و مرقمة ببواقي قسمة 3^n على 10

نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد .

- أحسب إحتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2019 .

6) ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .

- عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني:(4.5 نقط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعرّف التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=-\left(\sqrt{3}+i\right)z-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

1) حدّد طبيعة التحويل T ، ثمّ عيّن عناصره المميّزة . نسمي I النقطة الصامدة بالتحويل T .

2) لتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 حيث : $z_0=\frac{\sqrt{3}}{4}+i\frac{3}{4}$ وَ Ω لاحقتها i .

- أحسب المسافة ΩM_0 ، ثمّ جد قيسا بالراديان للزاوية الموجهة $\left(\vec{u};\overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.

3)نعتبر متتالية النقط للمستوي (P) و المعرّفة بـ : من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ يكون : $M_{n+1}=T\left(M_n\right)$

نسمي z_n لاحقة النقطة M_n . أنشئ كلا من النقط : Ω ، M_0 ، M_1 وَ M_2 .

4) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n-i=2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0-i\right)$.

ب- أحسب ΩM_n بدلالة n .

جـ- حدّد مجموعة النقط $M(z)$ حيث : $\mathrm{Im}(z)=1$ وَ $\mathrm{Re}(z)\geq 0$.

5)جد مجموعة الأعداد n من $\mathbb{N}$ حيث M_n تنتمي إلى نصف المستقيم الذي مبدؤه Ω وشعاع توجيهه $\vec{u}$

التمرين الثالث:(4نقط)

1)في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط :

$A(1;1;1)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(1;2;0)$ ، $D(-1;0;3)$ وَالمجموعة (Γ) للنقط من الفضاء التي تحقق

المعادلة : $x^2-2(x+y+z-yz)+3=0$

أ- بيّن أنّ النقط : A ، B وَ C تقع على إستقامة واحدة .

ب- أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقط A ، B وَ C .

جـ- أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقطة D و العمودي على (Δ) .

د- أحسب إحداثيات النقطة D' المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (Δ) .

2) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من مجموعة النقط (Γ) و نعتبر النقطة $M'(x';y';z')$ نظيرة M بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

أ- بيّن أنّ إحداثيات النقطة M' تحقّق : $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-z \\ z'=2-y \end{cases}$ ، ثمّ استنتج أنّ النقطة M' تنتمي إلى (Γ) .

ب- برهن أنه مهما تكن النقطة M من المجموعة (Γ) فإنّ الشعاعين : $\overrightarrow{AM}$ وَ $\overrightarrow{AM'}$ يكونا متعامدين

ج- بيّن أنّ كل نقطة من المستقيم (AM) تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

د- برهن أنّ مجموعة النقط المشتركة بين المجموعة (Γ) و المستوي (P) هي دائرة مركزها D' يطلب تحديد نصف قطرها .

التمرين الرابع:(07 نقط)

I. لتكن g الدالةالعدديةالمُعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=-x-1+e^{x}$.

1) أدرس تغيُّرات الدّالّة g ، ثمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

2) استنتج أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II. لتكن f الدالّة العدديّة المُعرّفة بـ $\begin{cases} f(x)=e^{-x}+\ln(x+1)..............x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}+1...................x<0 \end{cases}$ ،

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

1) أحسُب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ فسِّر هندسيّاً النتيجة.

2) أ) بين أنّ الدّالّة f مستمرة عند 0 .

ب)أدرُس قابليّة اشتقاق الدّالّة f عند $x_0=0$. فسِّر هندسيّاً النتيجة

3) أ) عين الدّالّة المشتقة للدّالّة f على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدّالّة f ثمّ شكّل جدول تغيُّراتها.

4) أرسم (C_f).

5) لتكن H دالّة عدديّة مُعرّفة على $]0,+\infty[$ بـ $H(x)=-x-1-e^{-x}+(x+1)\ln(x+1)$

بين أن H دالة أصلية لـ f على المجال $]0,+\infty[$ ، ثم أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و $x=1$.

على كل مترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول:(05 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. نعتبر النقط $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

1)أثبت أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

2) ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$.

بين أن المستقيم (Δ)يُعامد المستوي (ABC)،ثم أكتُب معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC).

3)بين H النقطة المشتركة بين (Δ)و(ABC)هي مرجح الجملة المثقلة $(A,-2);(B,-1);(C,2)$

4)نعتبر $(T_1),(T_2)$ مجموعتي النقط من الفضاء و التي تحقق :

$(T_1):(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$ و $(T_2):\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

عين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1),(T_2)$، ثم عين طبيعة تقاطعهما .

التمرين الثاني:(04نقط)

نعتبر الأعداد الصحيحة N التي تحقق الجملة : $(S)\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$

1) تحقق أنّ العدد 239 حلٌ للجملة (S).

2) أثبت أن العدد N يكتب على الشكل $N=1+17x=5+13y$،حيث x و y عددان صحيحان نسبيان يحققان $17x-13y=4$.

3) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $17x-13y=4$، للمجهولين الصحيحين x و y.

4) استنتج أنه يوجد عدد صحيح k يحقق $N=18+221k$ ، ثم استنتج حلول الجملة (S).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1)نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف بـ $P(z)=z^3-(8+3i)z^2+(25+24i)z-75i$

أ)أحسب $P(3i)$ ثمّ حلّل $P(z)$ إلى جداء عاملين.

ب)حل، في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

1) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=-1+2i$، $z_B=4+3i$، $z_C=3i$ و $z_D=4-3i$.

أ) بين أن النقط A، B، C وD تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها ω ذات اللاحقة $z_\omega=2$.

ب)أكتب على الشكل الأسي العددين $L_1=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ و $L_2=\frac{z_C-z_B}{z_D-z_B}$.

-استنتج طبيعة المثلثين ACD و BCD.

جـ)عين قيمة العدد n حتى يكون $((L_1)^{2018})^n$ حقيقي.

2)أوجد z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AD}$، ثمّ علّمها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I)نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

2) عين إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$.

II) f الدالةالمعرفة على $]-1;+\infty[$حيث: $f(0)=1$ و $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$ من اجل $x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 .

2)أ) احسب النهايتين: $\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب)أدرس اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$.

شكل جدول التغيرات (نقبل ان f قابلة للإشتقاق عند 0)

جـ) أكتب معادلة للمماس (T) لـ (C_f) عند المبدأ. تعطى : $f'(0)=-\frac{1}{2}$

3)نعتبر الدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $h(x)=f(x)+\frac{1}{2}x-1$

أ)بين ان إشارة $h'(x)$ على $]-1;+\infty[$ من نفس إشارة $k(x)$ حيث : $k(x)=x^2(f'(x)+\frac{1}{2})$

ب)بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$، $k'(x)=\frac{x^2(x+2)}{(x+1)^2}$ ثم عين اتجاه تغير k .

جـ) استنتج إشارة $h'(x)$ ثم إشارة $h(x)$ ثم عين الوضع النسبي بين (C_f) و (T).

4) أرسم (C_f) و (T) .

5) نعتبر m وسيط حقيقي و المعادلة ذات المجهول الحقيقي x مع $x>-1$: $f(x)=(\ln m)(x-2)$

- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة (E) .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;0;1)$ ، $B(2;-1;1)$ و $C(0;1;1)$

1) تحقق أنّ النقط A ، B و C لا تعين مستويا وحيدا .

2) (P_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $mx-y+2(2-m)z+m+4=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$:

3) أ- بيّن أنّ (P_m) مستوي من أجل كل عدد حقيقي m .

ب-بيّن أنّ جميع المستويات (P_m) تتقاطع في نفس المستقيم (Δ) الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

4)أ-عيّن إحداثيات النقطة H المعرفة بـ: $2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ (e أساس اللوغاريتم النيبري)

ب- أحسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ) .

5)أ-جد (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{5}(1+e)$

ب- عيّن المستويات (P_m) التي تمس المجموعة (S) .

التمرين الثاني:(05 نقاط)

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ: $P(z)=z^3+(2-\sqrt{3})z^2+(3-2\sqrt{3})z+6$.

أ-أحسب $P(-2)$، ثم عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث يكون: $P(z)=(z+2)(z^2+\alpha z+\beta)$.

ب- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2)في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$،نعتبر النقط:

A، B و C لواحقها على الترتيب: $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

أ- أكتب كل من الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

ج- عيّن ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط ذات اللاحقة حيث: $\overline{z}=ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}$.

3) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد: $L=\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.

ب- إستنتج أنّ A هي صورة B بتحويل نقطي يطلب تعيين عناصره المميزة .

ج- حدّد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

د- عيّن اللاحقة z_D للنقطة D حتى يكون الرباعي ABCD متوازي أضلاع .

التمرين الثالث(04 نقط)

يحتوي كيس على أربع كرات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ، 1 ، 1 و 2

و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 2 و 2

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس .

1) أحسب احتمال الحصول على :

أ- ثلاث كرات من نفس اللون .

ب- ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .

جـ- ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .

2)ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1

أ- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(X)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $2cm$).

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$

الجزء 01: لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول التغيرات

2)أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ و تحقق أن: $0,35\le\alpha\le0,36$.

إستنتج اشارة $g(x)$ على المجموعة $\mathbb{R}$، حسب قيم العدد الحقيقي x

الجزء 02: 1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$

2) أحسب $f'(x)$، و استنتج تغيرات الدالة f

3) أثبت أن: $f(\alpha)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$، و استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4)أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$، ثم حدد وضعية (C_f) و (Δ)

5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6) أرسم (Δ)، (T) و (C_f)

7)لتكن المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي x و m وسيط حقيقي : $-m-1+(x^2+2)e^{-x}=0...(e)$

عين بيانيا قيم m بحيث تقبل المعادلة (e) حل وحيد موجب

8) جد الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث تكون الدالة h: $h(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة المعرفة بـ: $x\mapsto(x^2+2)e^{-x}$

9)جد مساحة الحيز $A(\alpha)$ المحدد بـ (C_f) المستقيم (Δ) والمستقيمين ذي المعادلتين $x=0$ و $x=\alpha$.