

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I.  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_{n+1} = 2u_n + 1$

(1) احسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$

(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = 2^n - 1$

$(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليتان عدديتان معرفتان على  $\mathbb{N}$ :  $v_n = u_n + 3$  و  $w_n = 2^n$

(3) احسب بدلالة  $n$  ،  $S_n$  ،  $S'_n$  و  $S''_n$

حيث:  $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$  ،  $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء من أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن جميع حدود المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  من  $\mathbb{N}$

(1) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعدد  $u_n$  و  $v_n$

(2) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  بواقي القسمة الإقليدية للعدد  $2^n$  على 3

(ب) عين قيم العدد الطبيعي  $n$  التي نحقق  $v_n \equiv 0[3]$

(ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  التي تجعل الحدين  $u_n$  و  $v_n$  أوليين فيما بينهما

(3) بين أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن:  $S''_n \equiv S'_n[3]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  ذات المجهول  $z$ :

$$(E): \dots z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$$

(أ) بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه ،

(ب) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  ، تعطى الحلول على الشكل الآسي..

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  و  $D$

$$(3) \text{ التي لاحتقاتها على الترتيب } z_A = \sqrt{3} - i ، z_B = \frac{4e^{i\frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6})} ، z_C = 2i \text{ و } z_D = \frac{\sqrt{3}}{3} + i$$

(أ) بين العددين المركبين  $z_A$  و  $z_B$  مترافقان واستنتج أن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  حيث:

$$(z - z_A) = \frac{1}{\bar{z} - z_B}$$

(ب) برر وجود التشابه المباشر  $S$  الذي يحول النقطة  $A$  إلى النقطة  $B$  والنقطة  $O$  إلى النقطة  $D$  ، ثم جد العبارة المركبة له مستنتجا عناصره المميزة

(ج) بين أن النقط  $A$  ،  $C$  و  $D$  في استقامية واستنتج العناصر المميزة للتحاكي  $h$  الذي مركزه  $C$  ويحول  $D$  إلى  $A$  وأن  $B$  هي صورة  $D$  بتشابه مباشر مركزه  $C$  محددًا نسبته وزاوية له.

$$(د) (\delta) \text{ مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ التي تحقق } \|\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MC}\|$$

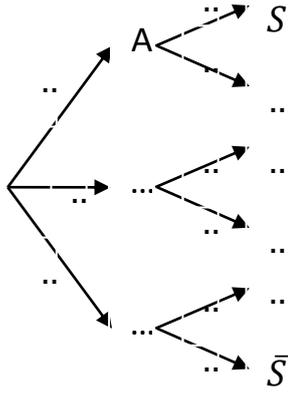
عين صورة المجموعة  $(\delta)$  بالتحويل  $S$ .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يقوم متجر ببيع جزء من مدخراته من قطع الغيار التي تشمل ثلاثة أنواع من السلع  $x$  ،  $y$  و  $z$  تمثل السلعة  $x$  ربع المدخرات بينما  $y$  ثلثها وتمثل  $z$  الباقي ، كانت السلعة تحوي عيوب تشمل 40% من السلعة  $x$  ، 75% من السلعة  $y$  و 24% من السلعة  $z$  ، أخذ زبون قطعة عشوائيا.

لتكن الحوادث التالية:

الحادثة  $A$ : "أخذ الزبون القطعة من السلعة  $x$ "



- الحادثة  $B$  : " أخذ الزبون القطعة من السلعة  $y$  "  
 الحادثة  $C$  : " أخذ الزبون القطعة من السلعة  $z$  "  
 الحادثة  $S$  : " القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوباً "  
 (1) أ) أتمم شجرة الاحتمالات لهذه التجربة

- (ب) ما هو احتمال أن تكون السلعة تحوي عيباً ثم استنتج نسبة السلع السليمة  
 (ج) القطعة التي أخذها الزبون تحوي عيوباً ، ما احتمال أن تكون القطعة من السلعة  $z$   
 (د) علماً أن 180 هو إجمالي عدد القطع المعروضة للبيع ، أنقل ثم أكمل الجدول التالي:

المجموع	$z$	$y$	$x$	نوع القطعة
				عدد القطع
81				عدد القطع ذات عيوب

- (2) بسبب العيوب الواضحة اضطر صاحب المتجر عزل هذه القطع وعرضها للبيع بتخفيضات هامة ، سعر القطعة  $x$  هو  $65 DA$  ، سعر القطعة  $y$  هو  $80 DA$  وسعر القطعة  $z$  هو  $75 DA$   
 نعتبر المتغير العشوائي  $X$  الذي يرقق بكل من هذه الإمكانيات لبيع قطعتين معا مخفضتين سعرهما الإجمالي  
 (أ) ما هي عدد الطرائق الممكنة لبيع قطعتين معا من السلعة المخفضة  
 (ب) ما هي قيم  $X$  الممكنة ( توجد ست قيم )  
 (ج) أكتب قانون احتمال للمتغير العشوائي  $X$   
 (د) أحسب الأمل الرياضياتي ، التباين والانحراف المعياري

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = -xe^x + 2e^x - 1$

- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم أنشئ جدول تغيراتها .  
 (2) أثبت أن المعادلة  $h(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث:  $1.8 < \alpha < 1.9$   
 (3) استنتج إشارة  $h(x)$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

II. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

- (1) أحسب نهاية الدالة  $f$  عند  $+\infty$  وفسرها هندسياً .  
 (2) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم أنشئ جدول تغيراتها .  
 (3) تعطى  $g$  دالة موجبة تماماً على المجال:  $[0; +\infty[$   
 (أ) بين أن:  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$  ، ثم أعط حصر  $f(\alpha)$   
 (ب) استنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  فإن:  $f(x) \in [0; 1]$   
 (ج) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  فإن:  $f(x) - x = \frac{(1-x) \cdot g(x)}{e^x - x}$  ، عين دستور الدالة  $g$   
 (د) استنتج وضعية (C) بالنسبة للمستقيم ( $\Delta$ ) ذو المعادلة:  $y = x$  على المجال  $[0; +\infty[$  .  
 (4) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة  $f$  في معلم متعامد  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  نأخذ:  $\|\vec{i}\| = 5 \text{ cm}$  و  $\|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$   
 (أ) تحقق أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي:  $y = \frac{1}{e-1}(x-1) + 1$   
 (ب) أنشئ ( $\Delta$ ) ، (T) و (C) في نفس المعلم  
 (ج) أحسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المغلق للمستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيم ( $\Delta$ )  
 (د) ناقش بيانها وهذا حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$  عدد الحلول ومجال انتمائها للمعادلة (E) التالية:

$$(E): f(x) = mx + 1 - m$$

III. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_0 = \frac{1}{2}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

- (1) بين أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى وحدد اتجاه تغيرها  
 (2) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة ، ثم أوجد نهايتها  
 (ملاحظة: في هذا الجزء يمكنك توظيف نتائج السؤالين (3) ب) و (3) د) من الجزء II .)

## الموضوع الثاني:

### التمرين الأول: ( 04 نقاط )

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، النقط  $A(3; 1; 0)$ ،  $B(1; 2; 0)$ ،  $C(3; 2; 1)$  و  $D(0; 0; m)$  حيث  $m$  عدد حقيقي موجب.

- (1) أ) احسب الجداء السلمي  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ، ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من  $\widehat{\sin ABC}$  و  $\widehat{\cos ABC}$ .  
ب) احسب مساحة المثلث  $ABC$ .
- (2) بين أن الشعاع  $\vec{n}(1; 2; -2)$  ناظمي للمستوي  $(ABC)$ ، ثم استنتج معادلة ديكرتية له.
- (3) بين أن  $ABCD$  رباعي وجوه، وأن حجمه  $V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6} u \cdot v$  (وحدة الحجم).
- (4) لتكن  $(S_m)$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$ .  
أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $m$  موجب، لدينا:  $(S_m)$  سطح كرة، يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.  
ب) عين قيمة  $m$  حتى يكون المستوي  $(ABC)$  مماس لسطح الكرة  $(S_m)$ .  
ج) اكتب معادلة للمستوي  $(P)$  الموازي تماما للمستوي  $(ABC)$  ويمس  $(S_2)$ .

### التمرين الثاني: ( 04 نقاط )

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  نضع:  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ .

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  لدينا:  $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .
- (2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $k$  غير معدوم فإن:  $PGCD(k; k+1) = 1$ .  
ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $k$  غير معدوم فإن:  $PGCD(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k+1)^2$ .
- (3) أ) عين من أجل كل عدد طبيعي  $k$  غير معدوم  $PGCD(2k+1; 2k+3)$ .  
ب) عين  $PGCD(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ .
- (4) أ) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم  $n$ :  $PGCD(S_n; S_{n+1})$ .  
ب) استنتج  $PGCD(S_{2017}; S_{2018})$ .  
(ملاحظة: يمكن استعمال المبرهنة:  $PGCD(a; b) = PGCD(a^2; b^2)$  يكافئ)

### التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

(1) ليكن  $p(z)$  كثير الحدود للمتغير المركب  $z$  والمعرف كما يلي:  $p(z) = z^2 - \left(\frac{5+i}{2}\right)z + 1 + i$ .  
أ) احسب  $p(2)$ .

- ب) عين العددين المركبين  $a$  و  $b$  حيث:  $p(z) = (z-2)(az+b)$ .  
ج) حل في  $\mathbb{C}$  مجموعة الأعداد المركبة المعادلة:  $p(z) = 0$  (نضع  $z_0$  الحل الحقيقي و  $z'$  الحل الآخر).  
(2) نعتبر في المستوي المركب المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . الوحدة  $5 \text{ cm}$ .  
نضع  $z_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $z_{n+1} = z' z_n$  (حيث  $z'$  حل المعادلة في السؤال الأول) ونسمي النقطة  $A_n$  صورة العدد المركب  $z_n$ .

- (1) أ) احسب الأعداد المركبة  $z_1, z_2, z_3$  و  $z_4$ .  
ب) مثل النقط  $A_0, A_1, A_2, A_3$  و  $A_4$ .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نعرف المتتالية  $(u_n)$  كما يلي:  $u_n = |z_n|$ .  
أ) بين أن المتتالية  $(u_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.  
ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية  $(u_n)$ .  
ج) احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ ، ماذا تستنتج حول تقارب المتتالية  $(u_n)$ ؟
- (4) .

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا:  $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = i$ .

ب) استنتج طبيعة المثلث  $OA_n A_{n+1}$ .

(5) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نسمي  $L_n$  طول الخط المنكسر المحدد بالنقط  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ .

- (أ) احسب الأطوال:  $A_0A_1$ ،  $A_1A_2$  و  $A_2A_3$ .  
 (ب) تحقق أن:  $\frac{A_2A_3}{A_1A_2} = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .  
 (ج) عبر عن  $L_n$  بدلالة  $n$  ثم حدد نهاية  $L_n$ .

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) باستعمال قابلية اشتقاق الدالة  $\ln$  عند 1، بين أن:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\ln x}{x-1} \right) = 1$ ، ثم استنتج أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = 1$ .  
 (II) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ، وليكن  $(C)$  تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $(x \geq 1)$  لدينا:  $f(x) = \ln x + \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right)$ .

(ب) من أجل  $(x \geq 1)$ ، بين أن:  $x - 1 = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \left( x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right)$ .

(ج) بين أن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند 1، وفسر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) احسب النهاية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[1; +\infty[$ ، لدينا:  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

(ج) ارسم المنحنى  $(C)$ .

(3) ليكن  $S$  مساحة الحيز  $D$  المستوي المحدد بالمنحنى  $(C)$ ، محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين  $x = 1$

و  $x = 3$ ، ولتكن  $A$  و  $B$  نقطتان من المنحنى  $(C)$  فاصلتهما على الترتيب 1 و 3،

والنقطتان  $P(1; 2 \ln(1 + \sqrt{2}))$  و  $Q(3; 0)$  من المستوي.

(أ) احسب مساحة كل من المستطيل  $APBQ$  والمثلث  $ABQ$ .

(ب) استنتج أن  $2 \ln(1 + \sqrt{2}) \leq S \leq 4 \ln(1 + \sqrt{2})$ .

(III) نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بـ:  $g(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$  و  $(C_g)$  تمثيلها البياني.

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  لدينا:  $g(x) \geq 1$ .

(2) (أ) بين أن:  $(g \circ f)(x) = x$ ، ثم بين أنه إذا كانت النقطة  $M(x; y)$  من المنحنى  $(C)$  فإن النقطة  $M'(y; x)$  من المنحنى  $(C_g)$ .

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين  $(C)$  و  $(C_g)$ ؟ أنشئ  $(C_g)$  في المعلم السابق.

(3) ليكن  $S'$  مساحة الحيز  $D'$  المحدد بالمنحنى  $(C_g)$  والمستقيمتين التي معادلاتها  $x = 0$ ،  $x = 2 \ln(1 + \sqrt{2})$

و  $y = 3$ .

(أ) بين أن:  $S' = 6 \ln(1 + \sqrt{2}) - \int_0^{2 \ln(1 + \sqrt{2})} g(x) dx$ .

(ب) احسب  $\int_0^{2 \ln(1 + \sqrt{2})} g(x) dx$  ثم استنتج قيمة  $S$ .