مديرية التربية لولاية البويرة		ثانوية كريم بلقاسم - البويرة

إختبار الفصل الاول في مادة الرياضيات

ديسمبر 2018

المستوى: 3 رياضي

التمرين الاول : 12 نقطة - الدوال العددية
التمرين الثاني: 08 نقاط - المتتاليات العددية

السنة الدراسية : 2019/2018

إختبار الفصل الأول — المدة: 2 سا

التمرين الأول: (12نقطة)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x-2+\ln\sqrt{x}$

1) أ) احسب نهايتي g عند 0 و عند $+\infty$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2)أ) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ ثم بين ان $1,72<\alpha<1,73$

ب) عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

II) f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x \quad ; \; x>0 \end{cases}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) أدرس إستمرارية الدالة f عند 0

ب) أدرس قابلية إشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4) بين ان: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ ثم اعط حصرا لـ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

5) احسب $f(1)$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ثم ارسم المنحنى (C_f) .

6) عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ ثلاثة حلول .

التمرين الثاني : (08 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $]-\infty;2[$ بـ : $g(x)=\ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-\infty;2[$

II) (u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases}u_0=-2\\u_{n+1}=g(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=0\\v_{n+1}=g(v_n)\end{cases}$

1) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$

2) استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) ، ثم بين انهما متقاربتان.

3) أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-u_{n+1}\le\frac{v_n-u_n}{2-v_n}\le\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

إرشاد: من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln(x)\le x-1$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le v_n-u_n\le\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$

4) بين ان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

5) نعتبر الدالة h المعرفة و المتناقصة تماما على $]-\infty;0[$ كما يلي : $h(x)=e^{-x}+x-2$

ا) بين ان المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1,14<\alpha<-1.15$

ب) استنتج نهاية لكل من (u_n) و (v_n)

بالتوفيق   بكالوريا 2019

التمرين الاول: 12 نقطة

I) أ) حساب النهايات: ... 2×0.5 ن

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x-2+\ln\sqrt{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} x-2+\frac{1}{2}\ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\ln\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-2+\frac{1}{2}\ln x\right] = +\infty$$

ب) تعين اتجاه تغير الدالة f : ... 1ن

من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=1+\frac{1}{2x}$ منه: $f'(x)>0$

الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول التغيرات: ...0.5ن

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ) تبيان ان $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α : ... 0.75ن

g دالة مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty\end{cases}$. بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α من $]0;+\infty[$.

- تبيان ان $1.72<\alpha<1.73$: ... 0.25ن

بما ان $\begin{vmatrix} g(1.72)= \\ g(1.73)= \end{vmatrix}$ اي $g(1.72)\times g(1.73)<0$ فان : $\alpha\in]1.72\ ;1.73[$.

ب) إشارة $g(x)$: ... 0.5ن

بما ان $g(\alpha)=0$ و g دالة متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فان:

x	0 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

استنتاج اشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$: ___ 0.5ن

$g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ من اجل $\frac{1}{x}=\alpha$ اي $x=\frac{1}{\alpha}$ و يكون $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ من اجل $\frac{1}{x}>\alpha$ اي $0<x<\frac{1}{\alpha}$

منه نلخص اشارتها في الجدول التالي:

x	0 $\qquad$ $\frac{1}{\alpha}$ $\qquad$ $+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

II) أ) دراسة استمرارية الدالة f عند 0 :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right]=0=f(0)$ لان : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[x^2\ln x\right]=0$

اذن الدالة f مستمرة عند 0 . 0.75 ن

ب) دراسة قابلية الاشتقاق عند 0 من اليمين : 1ن + 0.25 ن

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left[-\frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4}x \ln x\right] = 1$$

اذن f دالة قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين و عددها المشتق هو $f'_d(0) = 1$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معامل توجيهه 1 .

2) حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: ... 0.75ن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x\right] = -\infty$$

3) أ)حساب $f'(x)$: ... 0.75ن

من اجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = -\frac{7}{8}(2x) + 1 - \frac{1}{4}\left[(2x).\ln(x) + \frac{1}{x}(x^2)\right] = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}[2x\ln x + x] = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x$$

من جهة اخرى: $xg\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln x\right) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x\ln x$

إذن: $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

ب) إتجاه تغير الدالة f : ... 0.5ن

من اجل كل x من $]0;+\infty[$: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

f دالة متزايدة تماما على $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$.

جدول التغيرات: ... 0.5ن

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

4) حساب $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$: ... 0.75ن

لدينا، $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}\ln\alpha$

بما ان $g(\alpha) = 0$ نجد : $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln\alpha = 0$ اي $\ln\alpha = 2(2-\alpha) = 4 - 2\alpha$

منه: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}(4-2\alpha) = \frac{-7+8\alpha+2(4-2\alpha)}{8\alpha^2} = \boxed{\frac{4\alpha+1}{8\alpha^2}}$

- تعيين حصرا لـ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$: ...0.5ن

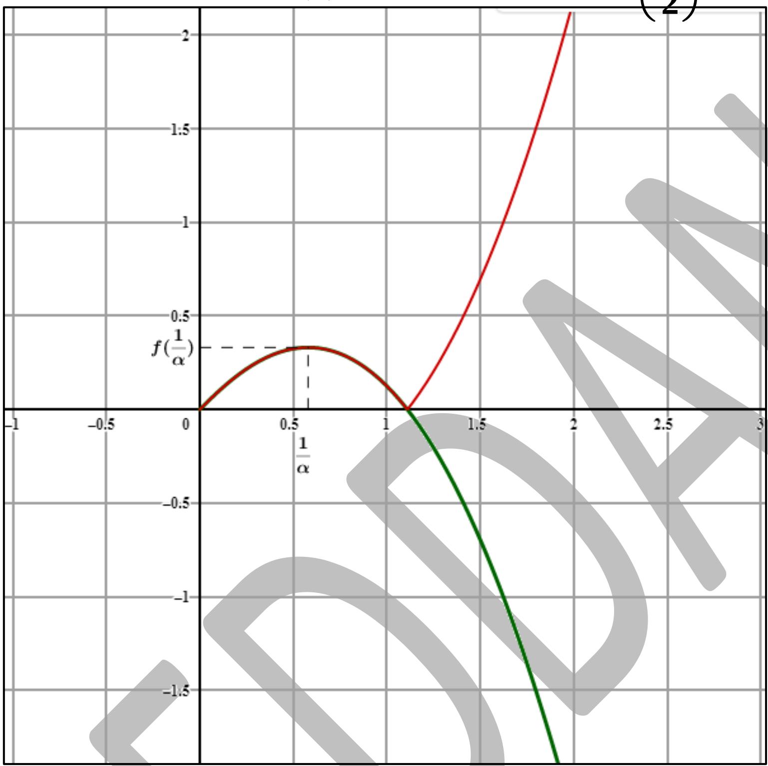
لدينا ، $1.72 < \alpha < 1.73$ منه $(1.72)^2 < \alpha^2 < (1.73)^2$ اي $8(1.72)^2 < 8\alpha^2 < 8(1.73)^2$ اي

$\frac{1}{8(1.73)^2} < \frac{1}{8\alpha^2} < \frac{1}{8(1.72)^2}$ اي $0.0418 < \frac{1}{8\alpha^2} < 0.0423$

من جهة اخرى: $4(1.72)+1 < 4\alpha+1 < 4(1.73)+1$ اي $7.88 < 4\alpha+1 < 7.92$

منه نستنتج ان : $0.0418\times 7.88 < f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0.0423\times 7.92$ اي $\boxed{0.33 < f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0.34}$.

5) **الرسم:** $f\left(\frac{5}{2}\right) \simeq -4.4$; $f(1) \simeq 0.13$



0.25ن + 0.75 ن

6) **تعيين قيم m** : ...0.75 ن

حلول المعادلة $|f(x)| = m$ يعود حلها الى تعيين فواصل نقط تقاطع $(C_{|f|})$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$

لدينا من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$ اي $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; x \in]0;x_0] \\ -f(x) & ; x \in [x_0;+\infty[\end{cases}$

إذن: $(C_{|f|})$ منطبق على المنحنى (C_f) على المجال $]0;x_0]$

$(C_{|f|})$ متناظر مع المنحنى (C_f) على المجال $[x_0;+\infty[$ ، حيث $1 < x_0 < 1.5$

بقراءة بيانية نجد ان المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل ثلاثة حلول من اجل $\boxed{0 < m < f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$.

التمرين الثاني : 6 نقاط

I) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $]-\infty;2[$: ... 0.75 ن

من اجل كل x من $]-\infty;2[$: $g'(x)=\dfrac{1}{2-x}$

من اجل كل x من $]-\infty;2[$ نلاحظ ان $g'(x)>0$ ، إذن g دالة متزايدة تماما على $]-\infty;2[$

II) 1) البرهان انه من اجل كل عدد طبيعي n، $-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$: ... 1.25ن

نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $P(n):-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_n\le v_{n+1}\le 0$

المرحلة 01: التأكد من صحة $P(0)$

من اجل $n=0$: لدينا $\begin{cases}u_0=-2\\ v_0=0\end{cases}$ و $\begin{cases}u_1=g(u_0)=g(-2)=-\ln 4\\ v_1=g(v_0)=g(0)=-\ln 2\end{cases}$ منه: $-2\le u_0\le u_1\le v_1\le v_0\le 0$

المرحلة02: نفرض صحة $P(n)$ من اجل n عدد طبيعي كيفي و نبرهن صحة: $P(n+1)$

لدينا من فرضية التراجع: $-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$

بما ان g دالة متزايدة تماما نجد: $g(-2)\le g(u_n)\le g(u_{n+1})\le g(v_{n+1})\le g(v_n)\le g(0)$

منه : $-\ln 4\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le -\ln 2$

منه: $-2\le u_{n+1}\le u_{n+2}\le v_{n+2}\le v_{n+1}\le 0$ إذن $P(n+1)$ محققة

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n ، $-2\le u_n\le u_{n+1}\le v_{n+1}\le v_n\le 0$

2) استنتج اتجاه تغير المتتاليتان (u_n) و (v_n) : ... 0.5ن

من السؤال السابق: من اجل كل عدد طبيعي n نجد: $\begin{cases}v_{n+1}\le v_n\\ u_n\le u_{n+1}\end{cases}$ منه:

(u_n) متتالية متزايدة و (v_n) متتالية متناقصة

- تبيان التقارب: ...0.5 ن

(u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 0 فهي متقاربة

(v_n) متتالية متناقصة و محدودة من الاسفل بالعدد 2- فهي متقاربة

3) أ) تبيان انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-u_{n+1}\le\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\le\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$: 1.25ن

من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-u_{n+1}=\ln\left(\dfrac{1}{2-v_n}\right)-\ln\left(\dfrac{1}{2-u_n}\right)=-\ln(2-v_n)+\ln(2-u_n)=\ln\left(\dfrac{2-u_n}{2-v_n}\right)$

لدينا من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln(x)\le x-1$ منه: $\ln\left(\dfrac{2-u_n}{2-v_n}\right)\le\dfrac{2-u_n}{2-v_n}-1$

اي $\ln\left(\dfrac{2-u_n}{2-v_n}\right)\le\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$

من اجل كل عدد طبيعي n ، $-2\le v_n\le 0$ منه: $2\le 2-v_n\le 4$ اي $\dfrac{1}{2-v_n}\le\dfrac{1}{2}$

منه: $\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\le\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$ لان: $v_n-u_n\ge 0$

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1}-u_{n+1}\le \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\le \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.

ب) استنتج من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$: ... 1.25ن

- من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\le v_n$ اي $0\le u_n-v_n$ ...(1)

- من اجل كل عدد طبيعي n ، $P(n): v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$

المرحلة01: التاكد من صحة $P(0)$. لدينا من اجل $n=0$: $v_0-u_0\le \dfrac{1}{2^0}(v_0-u_0)$ منه ، $P(0)$ محققة .

المرحلة02: نفرض صحة $P(n)$ من اجل n عدد طبيعي كيفي و نبرهن صحة $P(n+1)$.

- لدينا من فرضة التراجع: $v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$ منه $\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)\le \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)\right]$

حسب السؤال أ) $v_{n+1}-u_{n+1}\le \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$ نجد: $v_{n+1}-u_{n+1}\le \dfrac{1}{2^{n+1}}(v_0-u_0)$ منه: $P(n+1)$ محققة .

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$ ...(2)

من (1) و (2) نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0\le v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$.

4) استنتاج العلاقة بين (u_n) و (v_n) : ... 1ن

لدينا، $0\le v_n-u_n\le \dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)$ بما ان: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}(v_0-u_0)\right]=0$ فانه نجد: $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

بما ان (u_n) متتالية متزايدة تماما و (v_n) متتالية متناقصة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ نستنتج ان المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

5) أ)تبيان ان المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد : 0.75ن

h دالة مستمرة و متناقصة تماما على $[-1.14;-1.15]$ و لدينا ،
$f(-1.14)=$
$f(-1.15)=$

بما ان $f(-1.14)\times f(-1.15)<0$ فان حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $h(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1.14<\alpha<-1.15$

ب) استنتاج نهاية (u_n) و (v_n) : 0.75ن

(u_n) و (v_n) متجاورتان فانهما متقاربتان نحو نفس النهاية ℓ حيث ℓ هي حل للمعادلة $g(x)=x$

ℓ هي حل للمعادلة $g(x)=x$ معناه $g(\ell)=\ell$ اي $\ln\left(\dfrac{1}{2-\ell}\right)=\ell$ اي $\dfrac{1}{2-\ell}=e^{\ell}$ اي $2-\ell=e^{-\ell}$ اي

$e^{-\ell}+\ell-2=0$ اي $h(\ell)=0$ اي $\ell=\alpha$.

الخلاصة: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\alpha$.

------/////////////-----------------------/////////////////////////-----------------/////////////////-