بسم الله الرّحمان الرحيم

سلسلة تمارين حول الإحتمالات الشرطية مرفوقة بالحلول

اعداد :أساتذة ثانوية بوكابوس أحمد شعبة العامر

التمرين الأول

كيس A يحوي 3 كريات ، واحدة حمراء وواحدة زرقاء وواحدة سوداء .
كيس B يحوي 3 كريات ،واحدة حمراء واثنان سودوان . كيس C يحوي 3 كريات ،اثنان زرقاوان وواحدة سوداء .
ـ نسحب عشوائيا من كل كيس كرية ، نفرض أنه في كل كيس الإحتمالات متعادلة .

1) أـ ما هو p_0 احتمال عدم الحصول علي كرية سوداء
ب ـ ما هو p_1 احتمال الحصول بالضبط على كرية سوداء
ج ـ ما هو p_2 احتمال الحصول على كريتين سوداوين بالضبط
د ـ ما هو p_3 احتمال الحصول بالضبط على 3 كريات سوداء

2) اذا سحبنا بالضبط كرية سوداء نضيع نقطة ،اذا سحبنا 0 أو 2 سوداء نربح نقطة واذا سحبنا 3 سوداء نحصل على 3نقط .
أ) عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع النقط المحصل عليها
ب) احسب الأمل الرياضي للمتغير X ، هل اللعبة في صالح اللاعب ؟

الحـــل

1)

أ) $p_0 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

ب) $p_1 = p($ كرية سوداء واحدة $)$

$N_1 =($ الكرية السوداء من الكيس A $)$ ، $N_2 =($ الكرية السوداء من الكيس B $)$ ، $N_3 =($ الكرية السوداء من الكيس C $)$ ،
الحوادث N_1 , N_2 , N_3 منفصلة مثنى مثنى

$$p_1 = p(N_1) + p(N_2) + p(N_3)$$

$$p(N_1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \ , \ p(N_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}, \ p(N_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

اذن : $p_1 = \frac{4}{9}$

ج) $p_2 = p($ 2 سوداء بالضبط $)$ ، $p_2 = p(N') \ , \ N' = N'_1 \cup N'_2 \cup N'_2$

مع : $N'_1 = ($ الكريتان السودوان من الكيس A و B $)$ ، $N'_2 = ($ الكريتان السودوان من الكيس C و B $)$
$N'_3 = ($ الكريتان السودوان من الكيس A و C $)$ الحوادث N'_1 ، N'_2 ، N'_3 منفصلة مثنى مثنى

$$p_2 = p(N'_1) + p(N'_2) + p(N'_3) = (\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}) + (\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

د)

$p_3 = p($ 3كريات سوداء $) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

2) قانون الإحتمال للمتغير X : لدينا $X(\omega) = \{-1, 0, 3\}$

x_i	-1	0	3
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{2}{27}$

$E(X) = \frac{-2}{9}$ الأمل الرياضي غير معدوم اذا اللعبة ليست عادلة وبما أن انه سالب إذا اللعبة ليست في صالح اللاعب

التمرين الثاني :

أرنب يتنقل بقفزات متتالية في طريق مستقيم مزود بمعلم $(O,\vec{i})$ نقطة بدايته هي O . يوجد نوعان من القفزات الممكنة :

D) وحدتان نحو اليمين

G) وحدة نحو اليسار

نفرض أن القفزات المتتالية مستقلة عن بعضها البعض وكل نوع من القفزات اها نفس الإحتمال

نفرض أن الأرنب يقوم بثلاث قفزات متتالية .

1) اعط قائمة المسافات المقطوعة الممكنة ،يمكن رسم شجرة الإمكانيات ووضح في كل مرة المسافة بثلاثية مثلا (D,D,G) والتي تعني أن الأرنب يتنقل مرتين إلى اليمين ومرة واخدة الى اليسار

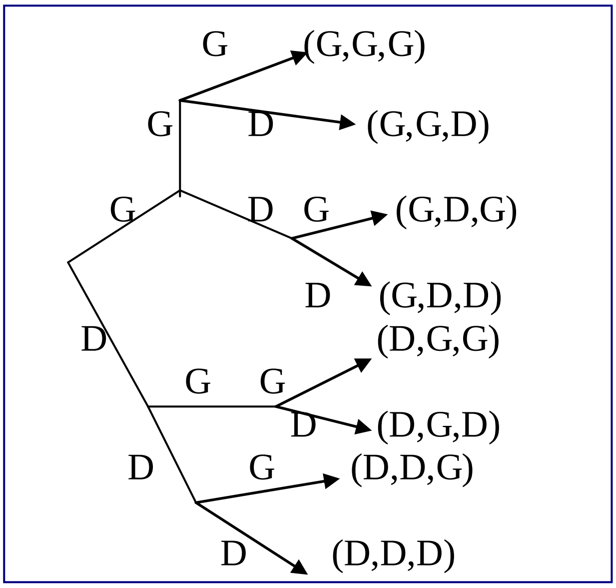
2) في كل ثلاثية اعط فاصلة النقطة المحجوزة من قبل الأرنب بعد ثلاث قفزات

3) ليكن X المتغير العشوائيالذي يرفق بكل مسافة مقطوعة من قبل الأرنب فاصلة النقطة المحجوزة

ـ عين قانون احتمال X ثم احسب أمله الرياضي .

الحـــل

1) شجرة الإمكانيات :



2) فواصل النقط التي يتوقف عندها الأرنب في الجدول :

الطريق	الفاصلة
(G,G,G)	-3
(G,G,D)	0
(G,D,G)	0
(G,D,D)	3
(D,G,G)	0
(D,G,D)	3
(D,D,G)	3
(D,D,D)	6

3)قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

x_i	-3	0	3	6
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الأمل الرياضياتي $E(X)=\frac{3}{2}$

التمرين الثالث في حفل النادي الرياضي اقترح أحمد اللعبة التالية

- اللعب يسحب ورقة اللعب المكونة من 32 ورقة من بينها 12 بطاقة تحمل صور (4 ملوك ، 4 ملكات و 4 خادمين)
- إذا تحصل اللاعب على ورقة تحمل صورة له حظ أن يسحب تذكرة من السلة ذات الحظ الأكبر التي تحوي 50 تذكرة من بينها 20 رابحة
- إذا لم يتحصل على ورقة تحمل صورة له فرصة أن يسحب تذكرة من السلة ذات حظ أقل والتي تحوي 50 تذكرة من بينها 10 رابحة

الهدف من هذا التمرين هو حساب احتمال أن يربح اللاعب .

- نفرض أن كل السحبات متساوية الإحتمال

1) بين أن احتمال الحادثة A هو $\frac{3}{8}$ مع A هي الحادثة (اللاعب يتحصل على صورة)

استنتج $P(\overline{A})$

2) لتكن G الحادثة (اللاعب يربح)

- احسب $P_A(G)$ احتمال اللاعب يربح علما أنه تحصل على صورة .
- استنتج أن $P(A\cap G)=\frac{3}{20}$
- بين أن $P(\overline{A}\cap G)=\frac{1}{8}$
- استنتج $P(G)$

الحــل

1)

$$1)\quad P(A)=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$$

$$2)\ P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{5}{8}$$

2)

$$1)\ P_A(G)=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$$

$$1)\ P(A\cap G)=P_A(G)\times P(A)=\frac{3}{20}$$

$$2)\ P_{\overline{A}}(G)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}\ ;\ P(\overline{A}\cap G)=P_{\overline{A}}(G)\times P(\overline{A})=\frac{1}{8}$$

$$3)\ P(G)=P(A\cap G)+P(\overline{A}\cap G)=\frac{11}{40}$$

التمرين الرابع

في سرك 10 حيوانات مفترسة من بينها 4 أسود

- في كل تقديم ،المربي يختار 5 حيوانات بطريقة عشوائية

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل احتيار عدد الأسود المختارة

1) عين قانون احتمال X

2) احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$

الحـــل

عدد الإمكانيات هو $C_{10}^{5} = 252$

من أجل كل k من $\{0,1,2,3,4\}$ يوجد C_4^k طريقة لإحتيار k أسد و توجد C_6^{5-k} طريقة لإحتيار $5-k$ حيوانات أخرى فيكون : $P(X=k)=\dfrac{C_4^k \times C_6^{5-k}}{C_{10}^5}$ من أجل $k \in \{0,1,2,3,4\}$

قانون الإحتمال للمتغير X هو :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

E(X)=2

التمرين الخامس:

كيس U_1 به 10 كريات منها 3سوداء و 7 بيضاء

كيس U_2 به 10 كريات منها 5سوداء و5 بيضاء

نختار كيس عشوائيا ثم نسحب منه على التوالي كريتان مع ارجاع الكرية إلى الكيس الذي سحبت منه بعد كل سحب

نضع B_1 الحادثة : الحصول على كرية بيضاء في السحب الأول

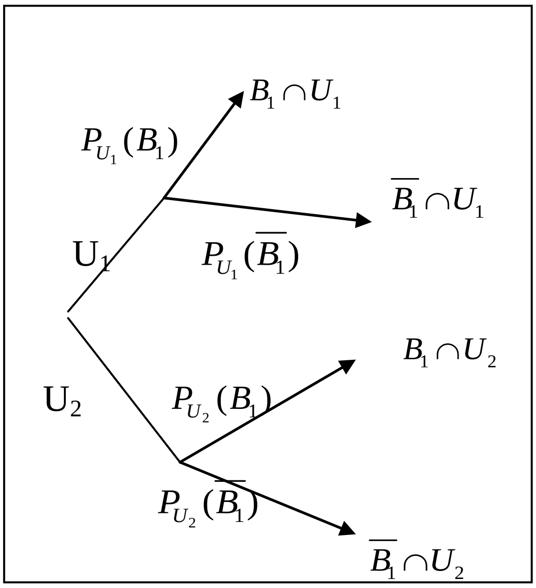
و B_2 الحادثة : الحصول على كرية بيضاء في السحب الثاني

هل الحادثتان B_1 و B_2 مستقلتان

الحـــل

شجرة الإمكانيات لحدوث B_1

ونفس الشجرة لحدوث B_2



$$P(B_1)=P(B_1\cap U_1)+P(B_1\cap U_2)$$
$$=P_{U_1}(B_1)\times P(U_1)+P_{U_2}(B_1)\times P(U_2)$$
$$=\frac{7\times 10}{10^2}\times 0,5+\frac{5\times 10}{10^2}\times 0,5=\frac{120}{200}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$
$$P(B_2)=P(B_2\cap U_1)+P(B_2\cap U_2)$$
$$=P_{U_1}(B_2)\times P(U_1)+P_{U_2}(B_2)\times P(U_2)$$
$$=\frac{10\times 7}{10^2}\times 0,5+\frac{10\times 5}{10^2}\times 0,5=\frac{120}{200}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$$P(B_2\cap B_2)=P_{U_1}(B_1\cap B_2)\times P(U_1)+P_{U_2}(B_1\cap B_2)\times P(U_2)$$
$$=0,5\times\frac{7^2}{10^2}+0,5\times\frac{5^2}{10^2}=\frac{74}{200}=\frac{37}{100}$$

$$P(B_1)\times P(B_2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=\frac{36}{100}$$

$P(B_1\cap B_2)\neq P(B_1)\times P(B_2)$ إذن الحادثتان غير مستقلتين

التمرين السادس :

صندوق به 10 كريات بيضاء و n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 ،الكريات لها نفس احتمال السحب
يقوم لاعب بسحب كريات من الصندوق . من أجل كل سحب لكرة بيضاء يربح 2 يورو ومن أجل كل سحب كرية حمراء يخسر 3يورو .
نعتبر X المتغير العشوائي الذي يمثل مقدار الربح (الربح هنا يمكن ان يكون سالبا أي خسارة)

1) يسحب اللاعب الآن كريتان على التوالي دون ارجاع الكرية المسحوبة إلى الصندوق

أ) بين أن $p(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+5)}$

ب) احسب بدلالة n احتمالات القيم الأخرى لـ X

ج) ــ بين أن : $E(X)=\dfrac{-6n^2-14n+36}{(n+10)(n+9)}$

ــ عين قيم n حتى يكون $E(X)\succ 0$

2) نفرض الآن أن اللاعب يسحب 20 كرية على التوالي مع ارجاع الكرية إلى الصندوق بعد كل سحب
عين أصغر قيمة لـ n حتى يكون احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء يكون أكبر تماما من $0,999$

الحــل

1) الحادثة $(X=-1)$ تعني سحب كربة بيضاء ثم حمراء أو العكس أي سحب كرية حمراء ثم بيضاء

عدد امكانيات التجربة هو: $A_{n+10}^2=(n+10)(n+9)$ فيكون $P(X=-1)=\dfrac{10n+10n}{(n+10)(n+9)}$

قيم المتغير X هي $\{-1,4,-6\}$

$$P(X=4)=\frac{90}{(n+10)(n+9)}$$
$$P(X=-6)=\frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)}$$

ومنه $E(X)=\dfrac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}$

$E(X)\succ 0$ يعني

$x_2=-9$, $x_1=\dfrac{20}{3}$, $\Delta=94^2$, $-6n^2-14n+3>0$ ومنه $x\in\left]-9,\dfrac{20}{3}\right[$

بما أن n طبيعي و $n\geq 2$ اذن $n\in\{2,3,4,5,6\}$

3) الحصول على الأقل على كرية بيضاء هو الحادثة A . $P(\overline{A})=\left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$ اذن $P(A)=1-\left(\dfrac{10}{n+10}\right)^{20}$

تعيين n حتى يكون اذن $n\succ 10(10^{\frac{3}{2}}-1)$, $n\geq 5$

التمرين السابع

I. كيس به 9 كريات . كريتان تحملان الرقم 1 ، 4 كريات تحمل الرقم 2 ، و 3 كريات تحمل الرقم 3
نختار عشوائيا كرة من الكيس ،لنعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب رقم الكرية المسحوبة .
ـ عين قانون احتمال X و احسب أمله الرياضياتي

II. الكريات الآن وزعت على كيسين $B;A$
الكيس A يحوي كريتان تحملان الرقم 1 و كريتان تحملان الرقم 2
الكيس B يحوي كريتان تحملان الرقم2 و 3 كريات تحمل الرقم 3
لنعتبر التجربة العشوائية التالية : نأخذ كرية من الكيس A و نضعها في الكيس B ثم نأخذ كرية من الكيس B ونضعها في الكيس A .
لتك الحوادث التالية : A_1 الكرية المسحوبة من الكيس A تحمل الرقم 1
A_2 الكرية المسحوبة من الكيس A تحمل الرقم 2
B_1 الكرية المسحوبة من الكيس B تحمل الرقم 1
B_2 الكرية المسحوبة من الكيس B تحمل الرقم 2

1) احسب ما يلي :
أ) احتمال وقوع A_1 .
ب) احتمال وقوع B_1 علما أن A_1 محققة .
ت) بين أن : $P(A_1\cap B_1)=\dfrac{1}{12}$

2) بين أن : $P(A_2\cap B_2)=\dfrac{1}{4}$

3) احسب احتمال أن يبقى الكيس A في وضعه الأصلي بعد التجربة .

الحـــل

I. أ) $P(X=3)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, $P(X=2)=\dfrac{4}{9}$, $P(X=1)=\dfrac{2}{9}$, $X(\omega)=\{1,2,3\}$

قانون احتمال X هو :

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{1}{3}$

ومنه $E(X)=\dfrac{19}{9}$

II. 1)

أ) $P(A_1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

ب)

$$P_{A_1}(B_1)=\frac{1}{6}$$

$$P(A_1\cap B_1)=P_{A_1}(B_1)\times P(A_1)=\frac{1}{12}$$

2) $P(A_2)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ إذا كانت A_2 محققة فإن الكيس B يحتوي على 6 كريات 3 منها تحمل الرقم 2

اذن :

$$P_{A_2}(B_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(A_2\cap B_2)=P_{A_2}(B_2)\times P(A_2)=\frac{1}{4}$$

3) لكي يبقى الكيس A في وضعه الأصلي بعد التجربة يعني وقوع الحادثة : $A_1\cap B_1$ أو $A_2\cap B_2$ وهما حادثتان غير متلائمتين . اذا رمزنا إلى احتمال أن يبقى الكيس A في وضعه الأصلي بـــ : P فيكون :

$$P=P((A_1\cap B_1)\cup(A_2\cap B_2))=P(A_1\cap B_1)+P(A_2\cap B_2)=\frac{1}{3}$$

التمرين الثامن

بائع أجهزة كهرومنزلية من انتاج ثلاث مصانع $M_3\,,M_2\,,M_1$ ،نصف مخزونه لهذه الأجهزة من انتاج M_1 و $\frac{1}{8}$ مخزونه من انتاج M_2 و $\frac{3}{8}$ من مخزونه من انتاج M_3

البائع يعلم أن في مخزنه 13% من الأجهزة من صنع M_1 لونها أحمر و 5% من الأجهزة من صنع M_2 لونها أحمر و 10% من الأجهزة من صنع M_3 لونها أحمر

نختاربطريقة عشوائية جهاز مغلف من المخزن

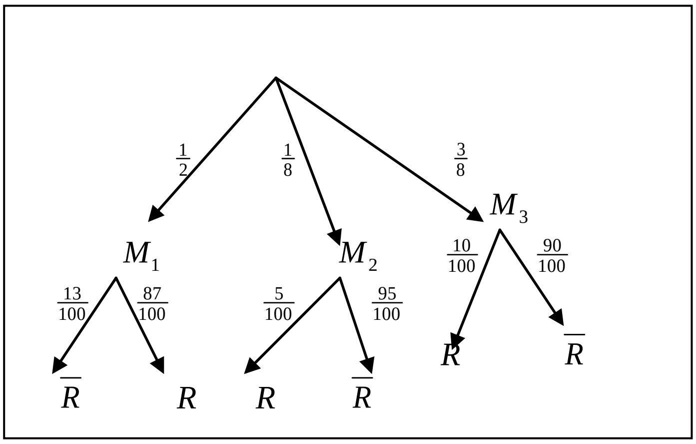
1) احسب احتمال أن يكون هذا الجهاز من صنع M_3
2) احسب احتمال أن يكون الجهاز أحمر علما أنه من انتاج M_2
3) ما هو احتمال أن لا يكون الجهاز لونه أحمر
4) بعد فتح الغلاف نلاحظ أن الجهاز ذو لون أحمر ، ما هو احتمال أن يكون من صنع M_1 ؟

الحـــل

نضع R : الجهاز المختارلونه أحمر

و $"M_i"$ $i\in\{1,2,3\}$ يعني الجهاز المختار من صنع المصنع M_i

شجرة الإمكانيات :



1) $P(M_3)=\frac{3}{8}\,,P(M_2)=\frac{1}{8},P(M_1)=\frac{1}{2}$

2)

$$P_{M_2}(R)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}\quad,\quad P_{M_1}(R)=\frac{13}{100}\quad,\quad P_{M_3}(R)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

3) الحوادث M_1 , M_2 , M_3 هي تجزئة للمجموعة الشاملة ومنه

$$P(\overline{R})=P_{M_1}(\overline{R})\times P(M_1)+P(\overline{R})+P_{M_2}(\overline{R})\times P(M_2)+P_{M_3}(\overline{R})\times P(M_3)$$
$$=\frac{87}{100}\times\frac{1}{2}+\frac{95}{100}\times\frac{1}{8}+\frac{90}{100}\times\frac{3}{8}=\frac{713}{800}$$

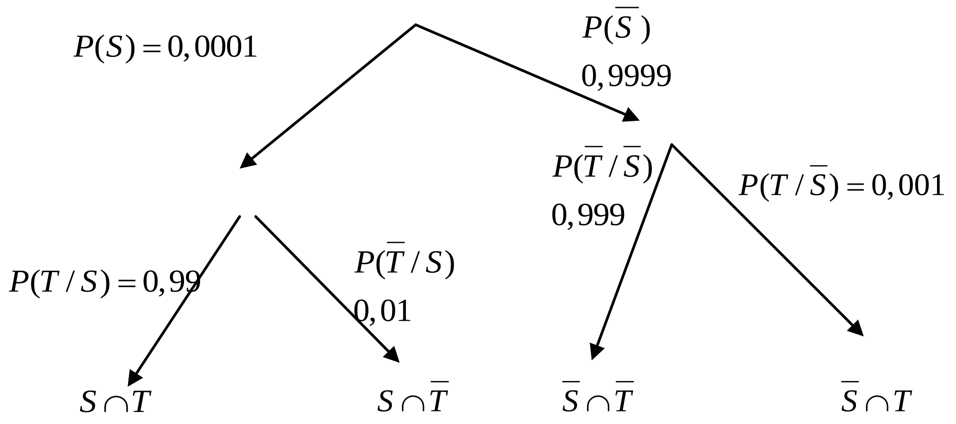
4) لنحسب $P_R(M_1)$:
$$P_R(M_1)=\frac{P(M_1\cap R)}{P(R)}=\frac{P_{M_1}(R)\times P(M_1)}{1-P(\overline{R})}=\frac{\frac{13}{100}\times\frac{1}{2}}{\frac{87}{800}}=\frac{52}{87}$$

التمرين التاسع:

في مجتمع يتكون من10000 ، يوجد شخص واحد مريض
نختار من هذا المجتمع شخصا واحدا . احتمال الكشف عن المرض تتم كما يلي :
ـ احتمال أن يكون لشخص مريض اختبار موجب هو $0,99$ واحتمال أن يكون لشخص سليم اختبار سالب هو $0,999$
السؤال : ما هو احتمال أن يكون الشخص المختار مريض اذا كان اختباره موجب .

الحـــــل

نضع (S) الحادثة : الشخص مريض
ونضع (T) الحادثة : الشخص اختباره موجب
شجرة الإحتمالات :



$$P_T(S)=\frac{P(T\cap S)}{P(T)}=\frac{P(T\cap S)}{P(T\cap S)+P(T\cap\overline{S})}=\frac{0,99\times10^{-4}}{0,99\times10^{-4}+0,9999\times10^{-3}}=0,090$$

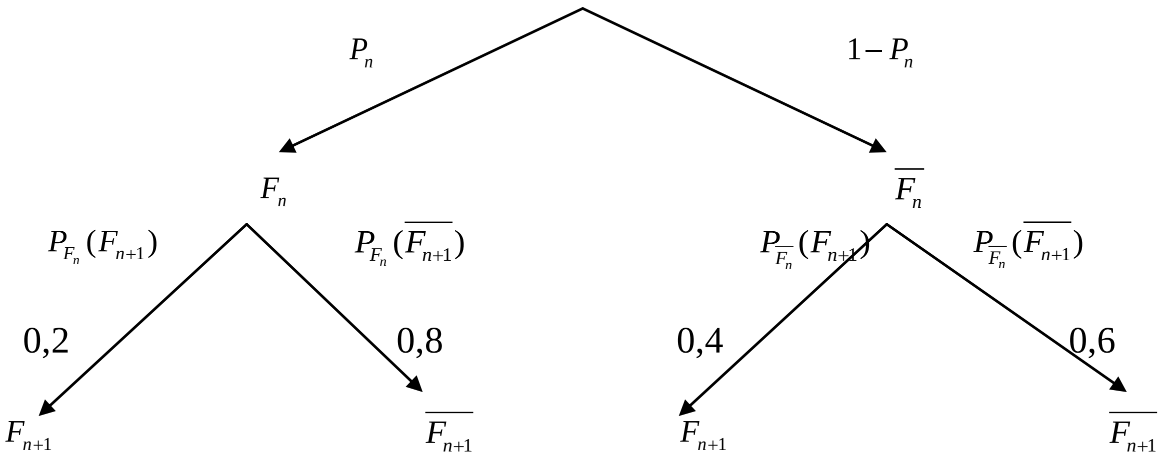
الخلاصة : حتى اذا كان الإختبار موجب لدينا بالتقريب 9 حظوظ من 100 لعدم الإصابة بالمرض.

التمرين العاشر:

مدخن يريد أن يقلص استهلاكه للسجائر . نفرض أنه يتبع دائما الشروط التالية :
C_1 : اذا بقي يوم بدون تدخين فاحتمال أن يدخن في اليوم التالي هو $0,4$
C_2 : اذا دخن في يوم فإن احتمال أن يدخن في اليوم التالي هو $0,2$
نضع P_n احتمال أن يدخن هذا الشخص في اليوم الذي مرتبه n
ـ عين نهاية P_n ثم اعطا الخلاصة .

الحـــــل

نضع F_n الحادثة " الشخص يدخن في اليوم ذي المرتة n ، نوضح في الشجرة حالة اليوم ذي المرتبة n و المرتبة $n+1$



$$P_{n+1} = P(F_{n+1}) = P(F_{n+1} \cap F_n) + P(F_{n+1} \cap \overline{F_n}) = P_{F_n}(F_{n+1}) \times P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \times P(\overline{F_n})$$

$$= P_{F_n}(F_{n+1}) \times P_n + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \times (1-P_n) = 0,2P_n + 0,4(1-P_n) = -0,2P_n + 0,4$$

ليكن ω العدد الحقيقي الذي يحقق : $\omega = -0,2\omega + 0,4$ اذن $\omega = \dfrac{1}{3}$

$P_{n+1} - \omega = -0,2(P_n - \omega)$ و هذا يعني أن المتتالية $(P_n - \omega)$ هندسية أساسها $q = -0,2$ ومنه :

$P_n - \omega = (-0,2)^n p_0$ لا نعلم P_0 ولكن بما أن $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0,2)^n = 0$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \omega = \dfrac{1}{3}$

الخلاصة : من المعطيات ولزمن طويل المدى ،هذا الشخص يواصل التدخين يوم عل 3أيام . ولهذا لا يمكن أن ينقطع عن التدخين تحت الشرطين C_1 و C_2 ، وبما أن النهاية مستقلة عن P_0 نقول أن هذا الشخص سواء اكان استهلاكه للسجائر كثيرا أو قليلا فإنه في النهاية سيدخن يوم واحد على ثلاثة أيام .

التمرين الحادي عشر:

مصنع لقطع الهاتف النقال ، 2% من انتاجه معطوب فقررت الإدارة مراقبة الإنتاج المعطوب عن طريق برنامج مبني على القواعد التالية :

" اذا كانت القطعة صالحة تقبل باحتمال قدره 0,96 واذا كانت القطعة تالفة ترفض باحتمال قدره 0,98 "

1) نفرض الحادثتين الحادثتين E_1 و E_2 حيث :

E_1 تعني " القطعة تالفة ومقبولة " E_2 تعني " القطعة صالحة و مرفوضة "

أ ـ احسب احتمال الحادثة E_1

ب ـ احسب احتمال الحادثة E_2

جـ ـ احسب احتمال وجود خلل في البرنامج

2) احسب احتمال أن القطعة صالحة علما أنها رفضت .

الحـــــل

نرمز بـ A,R,D,B للحوادث التالية على الترتيب : القطعة صالحة ـ القطعة تالفة ـ القطعة مرفوضة ـالقطعة مقبولة

أ حساب $P(E_1)$

$$P(E_1)=P(D\cap A)=P(D)\times P(A/D)$$
$$P(D)=2\%=0,02$$
$$P(A/D)=1-P(R/D) \quad , \; P(R/D)=0,98$$
:
$$P(A/D)=0,02$$
$$P(E_1)=0,02\times 0,02=0,0004$$

ب ـ حساب $P(E_2)$

$$P(E_2)=P(B\cap R)=P(B)\times P(R/B)=\frac{98}{100}\left[1-P(A/B)\right]=0,98(1-0,96)=0,0392$$

جـ ـ يكون الخلل في البرنامج اذا كانت القطعة صالحة و مرفوضة أو اذا كانت تالفة و مقبولة أي $P(E_1\cup E_2)$ اذا

$$P(E_1\cup E_2)=P(E)+P(E_2)=0,0004+0,0392=0,0396$$

3) الإحتمال P' كون القطعة صالحة علما أنها رفضت

$$P'=P(B/R)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{P(B\cap R)}{P((B\cap R)\cup(\overline{B}\cap R)}=\frac{P(B\cap R)}{P(B\cap R)+P(\overline{B}\cap R)}$$

$$P'=\frac{0,98\times 0,04}{0,98\times 0,04+0,02\times 0,98}=\frac{0,04}{0,06}=\frac{2}{3}$$

التمرين الثاني عشر:

في تحقيق حول زبائن وكالة خطوط جوية وجد أن 40% من الزبائن يستعملون الوكالة من أجل الأعمال و 35% يستعملونها من اجل السياحة و الباقي من أجل أسباب أخرى

40% من الزبائن يسافرون في الدرجة الأولى والباقي في الدرجة الثانية

60% من الزبائن الذين يسافرون من أجل الأعمال يختارون الدرجة الأولى و 20% من زبائن السياحة يسافرون في الدرجة الأولى

نختار بصفة عشوائية زبون من هذه الوكالة و نعتبر الحوادث التالية :

A " الزبون يسافر من أجل الأعمال "

T " الزبون يسافر من أجل السياحة "

D "الزبون يسافر لأسباب أحرى"

V " الزبون يسافرفي الدرجة الأولى"

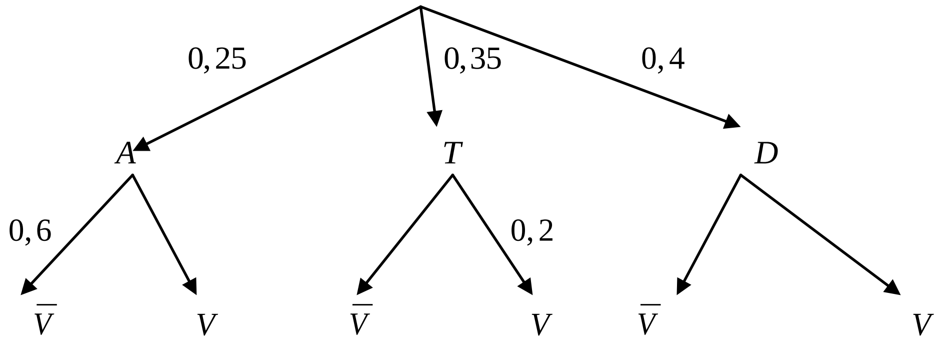
1) احسب $P_T(V)$, $P_A(V)$, $P(V)$, $P(T)$, $P(A)$

2) احسب احتمال أن الزبون المختار يسافر في الدرجة و لأسباب أحرى .

3) احسب احتمال أن الزبون المختار يسافر في الدرجة و لأسباب سياحية .

4) استنتج احتمال أن الزبون المختار يسافر من أجل الأعمال علما أنه يسافر في الدرجة الأولى.

الحــــل



(1

$$P(A)=0,4\ ,\ P(T)=0,35\ \ ,\ P(V)=0,4\ ,\ P_A(V)=0,6\ \ ,\ P_T(V)=0,2$$

(2

$$P(A\cap V)=P_A(V)\times P(A)=0,6\times 0,4=0,24$$
$$P(T\cap V)=P_T(V)\times P(T)=0,2\times 0,35=0,07$$

(3

$$P(V)=P(A\cap V)+P(T\cap V)+P(D\cap V)$$
$$P(D\cap V)=P(V)-P(A\cap V)-P(T\cap V)=0,4-0,24-0,07=0,09$$

(4

$$P_V(A)=\frac{P(A\cap V)}{P(V)}=\frac{0,24}{0,4}=0,6$$

التمرين الثالث عشر

في مخيم صيفي، منحت 3تربصات للمصطفين أطفال وراشدين وأجريت في نفس التوقيت ومحتواها السحر، المسرح والتصوير الفوتغرافي،150شخص سجلوا أنفسهم في أحد التربصات من بينهم 90راشد:

- نصف الأطفال و 26% من الراشدين اختاروا السحر
- 27 راشد و 10% من الأطفال اختاروا التصوير

1) املأ وأتمم الجدول التالي:

	السحر	المسرح	التصوير	المجموع
الراشدين				
الأطفال				
المجموع				

نستدعي أحد الأشخاص المسجلين في أحد التربصات عشوائيا

2) ما هو احتمال أن يكون الشخص المستدعى طفل

3) ما هو احتمال أن يكون الشخص المستدعى اختار التصوير علما أنه راشد

4) ما هو احتمال الشخص المستدعى اختار المسرح علما أنه راشد

5) بين أن احتمال أن يكون المستدعى اختار السحر هو 0,32

6) مدير المخيم اختار شخصا من بين المتربصين في السحر ويقول أن هناك حظين من ثلاثة كي يكون طفلا هل هذا محقق؟ برر اجابتك

الحـــل:

(1

	السحر	المسرح	التصوير	المجموع
الراشدين	18	45	27	90
الأطفال	30	24	6	60
المجموع	48	69	33	150

❖ نضع: A : الحادثة الشخص المختار راشد
B : الحادثة الشخص المختار اختار السحر
C : الحادثة الشخص المختار اختار المسرح
D : الحادثة الشخص المختار اختار التصوير

(2 $P(\overline{A})=\frac{60}{150}=\frac{2}{5}$

(3 $P_A(D)=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}$

(4 $P(A\cap C)=\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$

(5 $P(B)=\frac{48}{150}=\frac{8}{25}=0,32$

(6 $P_B(\overline{A})=\frac{30}{48}=\frac{5}{8}\neq\frac{2}{3}$

اذن هو غير محقق

التمرين 14:

اخترع سعيد وأحمد لعبة بأوراق اللعب (32 بطاقة) وعلبة حلوى

قانون اللعبة هو:

نسحب بطاقة ونرى إذا كانت ملك ،نسحب بطاقة أخرى بدون ارجاع الأولى

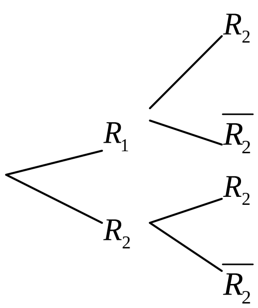
- إذا كانت إحدى البطاقتين ملك نربح 10 حبات حلوى
- إذا كانت البطاقتين ملك نربح 20 حبات حلوى

نضع: R_1 الحادثة سحب ملك في السحبة الأولى
R_2 الحادثة سحب ملك في السحبة الثانية

برر ما يلي:

(1 $P(R_1)=\frac{1}{8}$,$P_{R_1}(R_2)=\frac{3}{31}$,$P_{\overline{R_1}}(R_2)=\frac{4}{31}$

(2 أتمم شجرة الاحتمالات التالية:



(3 أحسب احتمالات الحوادث التالية:

A : سحب ملك في السحبة الأولى والثانية

B : سحب ملك في احدى السحبتين

(4 نهتم الآن بعدد الحلويات X التي تربح أثناء اللعبة، أتمم الجدول التالي الذي يعطي قانون الاحتمال X

عدد الحلويات x_i	0	10	20
$P[X=x_i]$		$0,226$	

➢ أحسب الأمل الرياضي E القانون

الحــل:

يوجد 4 أوراق ملك في لعبة 32ورقة

1) (سحب 1من 4 من 32ورقة) $P(R_1)=\frac{4}{32}$

(سحب 1من 3 من 31 وقة لأنه $P_{R_1}(R_2)=\frac{3}{31}$

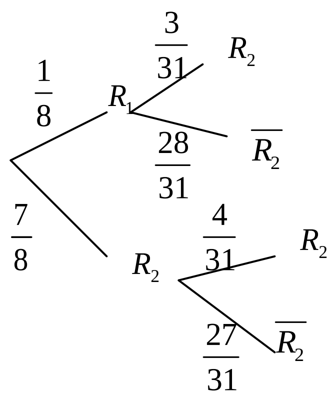
تم سحب ملك في السحبة الأولى)

(يوجد 4 ملك لكن تنقص $P_{\overline{R_1}}(R_2)=\frac{4}{31}$

ورقة واحدة التي سحبت في

المرحلة الأولى)

2)



3) $P(A)=P(R_1\cap R_2)=P(R_1)\times P(R_2)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{31}=\frac{3}{248}=0012$

$P(B)=P(R_1\cap\overline{R_2})\cup P(\overline{R_1}\cap R_2)=P(R_1\cap\overline{R_2})+P(R_1\cap\overline{R_2})$

$=\frac{1}{8}\times\frac{28}{31}+\frac{7}{8}\times\frac{4}{31}=\frac{7}{31}=0,226$

منه: $E=2,5$

عدد الحلويات x_i	0	10	20
$P[X=x_i]$	$0,762$	$0,226$	$0,012$

التمرين15:

في مؤسسة يوجد ورشتان تصنعنان نفس القطعة الورشة رقم 1 تجهيزها أحسن ولها طاقة انتاج أسرع بمرتين على الورشة رقم 2 ، ونسبة القطع التالفة في الانتاج تقدر بـ 3% بالنسبة للورشة 1 وبـ 4% بالنسبة للورشة 2

نأخذ قطعة عشوائيا من مجمل الانتاج

أحسب احتمال الحوادث التالية:

1) القطعة صادرة من الورشة رقم 1

2) القطعة تالفة

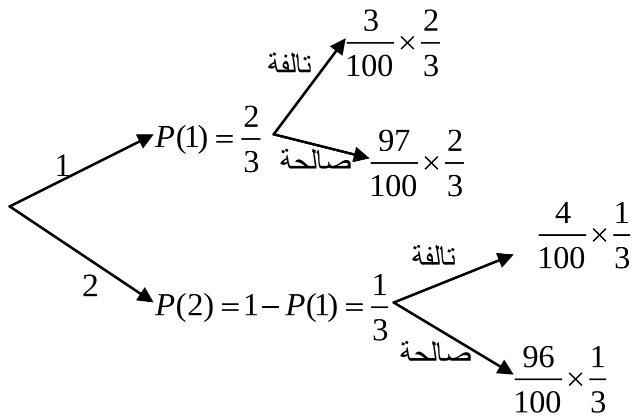
3) القطعة صادرة من الورشة رقم 1 علما أنها تالفة

الحــل:

لنرمز بـ: i للحادثة :القطعة صادرة من الورشة رقم i

لنرمز بـ : D للحادثة: القطعة تالفة

نجد عندئذ مخطط شجرة الاحتمالات التالي:



ومنه نحصل على النتائج التالية:

(1 $P(1)=\frac{2}{3}$

(2

$$P(D)=P(D\cap 1)+P(D\cap 2)=P(1)\times P(D/_1)+P(2)\times P(D/_2)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{100}=\frac{1}{30}$$

(3 $$P(1/_D)=\frac{P(1\cap D)}{P(D)}=\frac{P(1)\times P(D/_1)}{P(D)}=\frac{3}{5}$$

التمرين16:

نفرض 3 أواني u_1 ,u_2 ,u_3 بحيث:

الاناء u_1 يحتوي كرتين سوداوين وثلاث كرات حمراء

الاناء u_2 يحتوي كرة سوداء وأربعة كرات حمراء

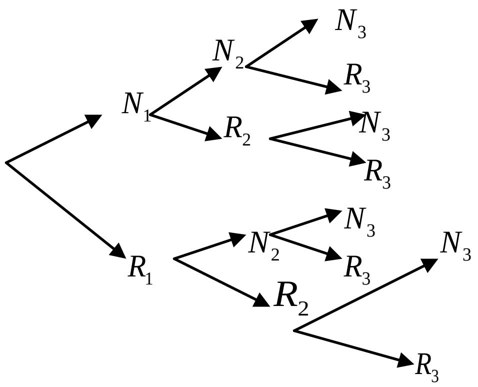
الاناء u_3 يحتوي ثلاث كرات سوداء وأربعة كرات حمراء

والتجربة تقتضي سحب عشوائيا كرة من u_1 وكرة من u_2 ووضعهما في الاناء u_3 ثم نسحب كرة من u_3

ونرمز بـ N_i للحادثة سحب كرة سوداء من الاناء u_i حيث i يأخذ القيم 3,2,1

ونرمز بـ R_i للحادثة سحب كرة حمراء من الاناء u_i حيث i يأخذ القيم 3,2,1

1)أعد رسم شجرة الاحتمالات التالية مع احتمالها



2) أحسب احتمال الحادثتان التاليتان: $N_1\cap R_2\cap N_3$ و $N_1\cap N_2\cap N_3$

3) استنتج احتمال الحادثة $N_1\cap N_3$

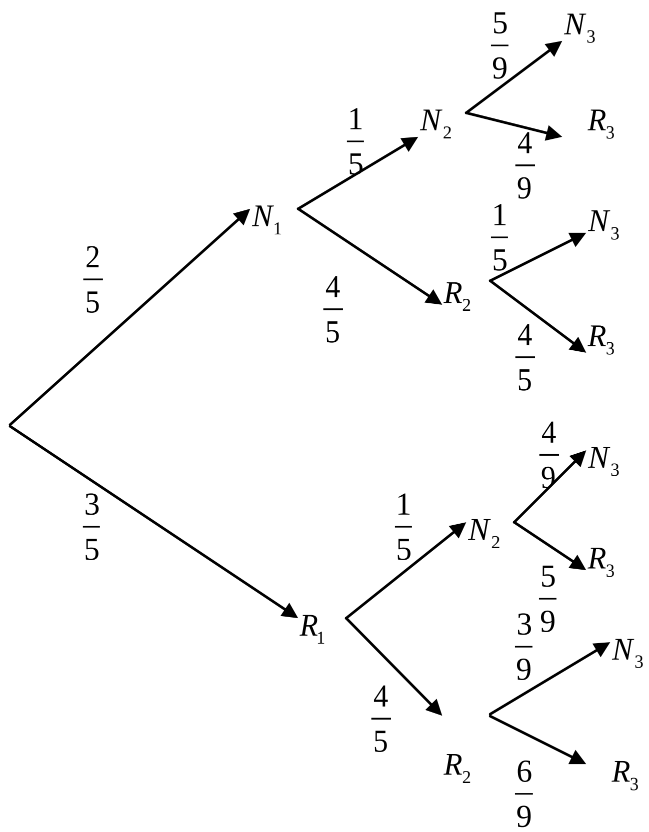
4) أحسب بطريقة مماثلة احتمال الحادثة $R_1\cap N_3$ ثم استنتج احتمال الحادثة N_3

5) هل الحادثتين N_1 و N_3 مستقلتان

6) نفرض أن الكرة المسحوبة من u_3 سوداء ،ماهو الاحتمال أن تكون الكرة المسحوبة من u_1 حمراء

الحـــل:

1) شجرة الاحتمالات:



2) حساب $P(N_1\cap N_2\cap N_3)$ و $P(N_1\cap R_2\cap N_3)$:

$P(N_1\cap N_2\cap N_3)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{5}{9}=\frac{2}{45}$ لأن: $P(N_1\cap N_2\cap N_3)=P(N_1)\times P_{N_1}(N_2)\times P_{N_1\cap N_2}(N_3)$

$$P(N_1\cap R_2\cap N_3)=P\left(N_1\right)\times P_{N_1}(R_2)\times P_{N_1\cap R_1}(N_3)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{9}=\frac{32}{225}$$

3) حساب $P(N_1\cap N_3)$:

$$P(N_1\cap N_3)=P(N_1\cap N_2\cap N_3)+P(N_1\cap R_2\cap N_3)=\frac{2}{45}+\frac{32}{225}=0{,}18$$

لأن (R_2,N_2) جملة كاملة من الحادثات

بنفس الطريقة نجد أن: $P(R_1\cap N_3)=0{,}213$

4)حساب $P(N_3)$:

نلاحظ أن (R_1,N_1) جملة كاملة من الحادثات وبتطبيق صيغة الاحتمال الكلي نجد :

$$P(N_3)=P(R_1\cap N_3)+P(N_1\cap N_3)=\frac{14}{75}+\frac{16}{75}-\frac{30}{75}=0{,}4$$

5) تكون N_1 و N_2 مستقلتان اذا وفقط اذا كان: $P(N_1\cap N_3)=P(N_1)\times P(N_3)$

لدينا: $P(N_1\cap N_3)=\frac{14}{75}$ و $P(N_1)\cap P(N_3)=\frac{12}{75}$ اذن: N_1 و N_2 غير مستقلتان

6) نعلم أن الحادثة N_3 محققة ولنبحث عن احتمال R_1 : $P_{N_3}(R_1)=\frac{P(R_1\cap N_3)}{P(N_3)}=\frac{8}{15}$