التحضير للبكالوريا

BAC 2019

مادة الرياضيات

6. الأعداد المركبة

شعبة: علوم تجريبية
تقني رياضي
رياضيات

M S TM

1. تمارين مقترحة
2. بكالوريات جزائرية
شعبة علوم تجريبية 2008-2018
3. تمارين مغربية

جمع و اعداد الأستاذ
شعبان أسامة

1. تمارين مقترحة

.1

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$.

نضع Z_M لاحقة النقطة M و لتكن A النقطة ذات اللاحقة 4 و B النقطة ذات اللاحقة $4i$

1) لتكن θ عدد حقيقي من المجال $[0;2\pi[$ و r عدد حقيقي موجب تماما .

نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $re^{i\theta}$ و F نقطة بحيث OEF قائم ومتساوي الساقين و $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF})=\frac{\pi}{2}$.

- أوجد بدلالة r و θ لاحقة النقطة F .

2) نختار $\theta=\frac{5\pi}{6}$ و $r=3$, ضع رسما توضح فيه النتائج السابقة .

3) نعتبر النقط P , Q , R , S منتصفات القطع $[AB]$, $[BE]$, $[EF]$, $[FA]$ على الترتيب

أ- بين أن $PQRS$ متوازي أضلاع .

ب- نضع : $Z=\frac{Z_R-Z_Q}{Z_p-Z_Q}$

عين طويلة وعمدة العدد Z ثم إستنتج أن $PQRS$ مربع .

4) أ- أحسب بدلالة r و θ لاحقتي النقطتين P و Q .

ب- أحسب بدلالة r و θ مساحة المربع $PQRS$.

جـ- r عدد ثابت من اجل أية قيمة لـ θ تكون مساحة المربع أعظمية

ما هي لاحقة النقطة F

.2

في المستوي المركب المنسوب إلي المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $2cm$)، نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1. أ- أكتب z_B و z_C على الشكل الأسي .

بـ- علم النقط A، B و C .

1) عين طبيعة الرباعي $OBAC$.

2) عين ، ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z|=|z-2|$.

1) f التحويل الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، $(z\neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=\frac{-4}{z-2}$

أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z=\frac{-4}{z-2}$.

بـ- استنتج صورتي النقطتين B و C بالتحويل f .

جـ- نسمي G مركز ثقل المثلث OAB . عين، ثم علم النقطة G' صورة النقطة G بالتحويل f .

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z\neq 2$: $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$.

بـ- بين أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها . أرسم (γ) .

.3

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

تعطى النقط A ؛ B ؛ C ؛ D التي لواحقها $z_A=-2$ ؛ $z_B=2$ ؛ $z_C=-1+i$ ؛ $z_D=1-3i$.

1) أثبت أن D هي مرجح الجملة المثقلة $A,5$; $B,3$; $C,-6$.

2) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z+2|=|z+1-i|$.

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_B}$ على الشكل الآسي ؛ ثم إستنتج طبيعة المثلث BCD .

4) أ.أكتب العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الآسي.

ب.إستنتج أن D هي صورة C بتحويل نقطي f يُطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.

ج.إستنتج $|z_A-z_{B'}|$ حيث B' هو صورة B بالتحويل f ؛ ثم أحسب عندئذ مساحة المثلث ABB'

5) لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{-1}{2}$.عيّن العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه Ω و يحول D إلى C

.4

$(O;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد و متجانس للمستوى المركب. (i هو العدد المركب الذي يحقق : $i^2=-1$).

A ، B ، C و D هي النقط من المستوى المركب و التي لواحقها ؛ على الترتيب ؛ Z_A ، Z_B ، Z_C و Z_D

حيث : $Z_A=8$ ، $Z_B=8i$ ، $Z_C=Z_Ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و $Z_D=Z_Be^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1) اكتب كلا من Z_A ، Z_B على الشكل المثلثي

2) أعط الطويلة و عمدة لكل من Z_C و Z_D ثم اكتب كلا منهما على الشكل الجبري.

3) بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

4) ارسم الدائرة (Γ) ثم علم النقط A ، B ، C و D .

5) Z_1 ، Z_2 ، Z_3 و Z_4 لواحق الأشعة $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ على الترتيب.

أ- بين أن: $Z_2=\sqrt{3}Z_1$.

ب- احسب كلا من: $|Z_3|$ ، $|Z_4|$.

جـ استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

.5

1). حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

ثم اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

2). المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$, $z_B=\sqrt{3}+i$, $z_C=\overline{z_B}$

وليكن العدد المركب L حيث: $L=\frac{(1-i)z_B}{z_C}$

أ- أكتب العدد L على الشكل الأسي. ثم أحسب L^{2016}

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد L^n تخيلي صرف.

ج- بين أنه يوجد دوران r مركزه B و يحول A إلى C ، يطلب تعيين زاويته.

د- استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته .

3.عين (E_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب.

4.عين (E_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما θ يمسح $\mathbb{R}$

.6

1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب Z

حيث : $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ) بيّن أنه إذا كان: Z_0 حلا للمعادلة $P(z)=0$ ، فإن $\overline{Z_0}$ حلا لها أيضا ($\overline{Z_0}$ مرافق Z_0)

ب) أحسب $P(-1)$ ، ثم بيّن أنه من أجل كل Z من $\mathbb{C}$: $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما .

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2) $(O;\vec{u};\vec{v})$ معلم متعامد و متجانس للمستوى المركب .

نعتبر النقط A ، B و C والتي لواحقها على الترتيب

$Z_A=-1$ ، $Z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $Z_C=2-i\sqrt{3}$.

أ) أحسب $|Z_C-Z_A|$ ، $|Z_B-Z_A|$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين Z_G لاحقة G مرجح الجملة: $\{(A;-1),(B;2),(C;2)\}$.

ج) أحسب طويلة وعمدة للعدد المركب $L = \frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ، ثم أكتب L على الشكل الأسي

د) عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد L^n حقيقيا .

هـ) بيّن أن L^{2015} تخيلي صرف .

و) استنتج طبيعة المثلث GAC

.7

I) السؤال النظري : برهن (باستعمال الشكل الأسي لعدد مركب) أنه من أجل كل عددين مركبين z, z' غير معدومين :

$$\arg(z\times z') = \arg z + \arg z' + 2k\pi \quad / \quad k\in\mathbb{Z}$$

II) نعتبر العدد المركب a حيث $a = 1-3i$ ولتكن المعادلة : $z^3 + 2\alpha z^2 + 14z - 2\beta = 0 ......(I)$

حيث α,β عددين حقيقيين .

1 / إذا كان a حل للمعادلة (I) بين أن $\bar{a}$ حل لها ثم أوجد العددين الحقيقيين α,β .

2 / بوضع $\alpha=-2, \beta=10$ عين حلول المعادلة (I) .

III) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط C, B, A لواحقها على الترتيب :

$$c = \text{Im}(b^2) \ , \ b = 1+i \ , \ a = 1-3i$$

1 / أ- عين d لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

ب - بين أن العدد $\frac{d-b}{a-b}\times\frac{a-c}{d-c}$ هو عدد حقيقي ثم استنتج أن النقط D, C, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة .

د - ليكن θ عدد حقيقي. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$z + e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5}e^{i\theta}$ لما θ يمسح $\mathbb{R}$

2 / أ- برر وجود تشابه مباشر S يحول C إلى D و O نقطة صامدة بواسطة S ثم عين عناصره المميزة .

ب - عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالتحويل S

جـ - E نقطة من المستوي لاحقتها $z_E = -2$ عين $z_{E'}$ لاحقة E' صورة النقطة E بالتحويل S .

د - ماذا تستنتج بالنسبة للمثلثين CEA , $DE'A'$.

3 / عين (Γ') مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg\left[(z-z_E)^2\right] = \arg\left(z_B^{2016}\right) + \arg\left(z_E^{29}\right)$

عين صورة (Γ') بالتحويل S .

.8

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ من أجل كل عدد مركب يختلف عن $-1+i$ نضع : $f(z) = \frac{2z+i}{z+1-i}$ حيث $z = x+iy$

حدد $\text{Im}(f(z))$ بدلالة x و y .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث يكون العدد $f(z)$ حقيقيا

حل في C المعادلة $f(z) = z+i$

لتكن النقطة C, B, A لواحقها على الترتيب $Z_C = 9 - i\sqrt{3}, Z_B = 1+i\sqrt{3}, Z_A = 1-i\sqrt{3}$

أ. عين العبارة المركبة للتشابه المباشر s الذي يحول النقطة B إلى C و النقطة 0 إلى A

عين نسبة و زاوية التشابه s

ب. استنتج النسبة و الزاوية للتحويل sos

.9

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z :

$\bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 3\bar{z} + 7 = 0 \ ...(E)$ ، $\bar{Z}$ هو مرافق العدد المركب Z.

أ/ بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(\bar{z}+1)(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 7) = 0$.

ب/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط C, B, A و D لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i\sqrt{3}$ ، $z_C = \overline{z_B}$ ، $z_D = 3$.

أ- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا .

ب/ عين طبيعة المثلث ABC .

1) أ- أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج أن النقطة A صورة D بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب/ أوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACD.

4) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z تحقق: $z+1=2\sqrt{3}.k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ حيث k يمسح المجال $[0;+\infty[$

عين قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{AB})$، ثم استنتج مجموعة النقط (Γ).

5) أ/ عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث يكون: $-\vec{CA}+2\vec{CB}+\alpha\vec{CD}=\vec{0}$.

ب سلطان/ عين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|-\vec{AM}+2\vec{BM}-3\vec{DM}\right\|\le 2\left\|\vec{BM}-\vec{CM}\right\|$

جـ/ استنتج مجموعة نقط تقاطع (E) و (Γ).

.10

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث:

$$\begin{cases} 2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i \end{cases}$$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$.

أ/ اكتب z_A على الشكل الأسي.

ب/ بين أن: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B.

ج/ هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3) أ/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$.

ب/ احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ج سلطان/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث:

$$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$$

د/ عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4) نضع: $f=ros$ (يرمز إلى تركيب التحويلين S و r).

أ/ عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث

- يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

ب أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ/ إذا كان $S(M)=M'$، ما طبيعة المثلث OMM'؟

ب/ عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها: $\vec{AM}\cdot\vec{AM'}=0$

.11

تعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ النقط $A;B;C;D;I$ ذات اللواحق:

$z_A=i$; $z_B=\overline{z_A}$; $z_C=-1+\sqrt{3}i$; $z_D=\overline{z_C}$ ، I منتصف $[CD]$

1. مثل النقط في المعلم
2. أكتب العدد L على الشكل الأسي، حيث: $L=\frac{z_A-z_I}{z_B-z_I}$

استنتج طبيعة المثلث ABI.

عيّن المركز ω و نصف القطر r للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABI

أنشئ الدائرة (C)

3. ليكن R دوران مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$، h التحاكي الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D.

عيّن العبارة المركبة لكل من R و h

ما هي طبيعة التحويل hoR محددا عبارته المركبة و عناصره.

4. عيّن معادلة (C') صورة (C) بالتحويل hoR مستعملا طريقتين.

.12

الجزء الأول:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^3+2z^2-16=0$ .... (E).

1) أ- بين أن 2 حل للمعادلة (E).

بـ أوجد الأعداد الحقيقية a، b، c بحيث يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل:

$$(z-2)(az^2+bz+c=0)=0 .$$

جـ اكتب حلول المعادلة (E) على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

الجزء الثاني:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) علم النقاط: A، B، D ذات اللواحق: $z_A=-2-2i$، $z_B=2$، $z_D=-2+2i$.

2) احسب اللاحقة z_C للنقطة C حيث ABCD متوازي أضلاع. علم النقطة C.

3) لتكن E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$، ولتكن F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ – احسب: z_E، z_F لاحقتي النقطتين: E، F على الترتيب.

ب – علم النقطتين: E، F.

4) أ – تحقق أن: $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$.

ب – استنتج طبيعة المثلث AEF.

.13

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A , B , C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=1$, $z_B=1+2i$, $z_C=1+\sqrt{3}+i$ و $z_D=\overline{z_C}$.

1) أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي، ثم فسر هندسيا $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ) استنتج طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C.

2) حدد طبيعة الرباعي $ABCD$، ثم أحسب مساحته.

3) لتكن z_k لاحقة النقطة k صورة النقطة E ذات اللاحقة $z_E=i$ بواسطة التحويل r.

- بيّن أن: $z_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}+1$، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

4) أكتب العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 3.

5) أ) أكتب العبارة المركبة للتحويل $S=r\circ h$ محددا عناصره المميزة.

ب) ليكن $AB'C'D'$ صورة الرباعي $ABCD$ بالتحويل S.

بيّن أن مساحة الرباعي $AB'C'D'$ هي $18\sqrt{3}$ (مقدرة بوحدة المساحة)

.14

1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z، $z^2-6z+21=0....(I)$.

ب) استنتج حلول المعادلة:

$$\left(\bar{z}+3+i\sqrt{3}\right)^2-6\bar{z}-i\sqrt{108}+3=0....(II).$$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$، $z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

أ) بيّن أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=3$ ويطلب تعيين نصف قطرها.

ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O، بين أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC.

3) بيّن أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C، يطلب تعيين زواياته.

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'+i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z+i\sqrt{3}\right).$$

أ) عيّن طبيعة التحويل S و حدد عناصره المميزة.

ب) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $(z-z_\Omega)(\bar{z}-z_\Omega)=-(z_A-z_B)^2$.

جـ) عيّن طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S، محددا عناصرها المميزة

.15

1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة C :

$$\left(z-\sqrt{3}\right)\left(z^{2}-\sqrt{3}\,z+1\right)=0 .$$

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم $\left(O;\vec{i};\overrightarrow{\ }\right)$ ،

لتكن A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ، $z_B=\sqrt{3}$ ، $z_C=\overline{z_A}$.

أثبت أن $z_A^{1962}+z_C^{2016}=0$ ثم عين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^{n}$ حقيقي موجب

3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛ ثم بين أن النقط A ؛ C و E في استقامية .

5) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z-z_A}{z-z_C}$ تخيليا صرفا ؛ ($z\neq z_C$) .

.16

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$z^{2}-6z+10=0$.

استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$\left(\overline{z}+2\right)^{2}-6\left(\overline{z}+2\right)+10=0$$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B، C، D لاحقاتها

$z_A=3-i$ و $z_B=3+i$ و $z_C=1+i$ و و $z_D=1-i$

عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

3) E النقطة التي لاحقتها $z_E=7-3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F=5+3i$

عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$

4) مثل النقاط A، B، E، F و H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z=1-i+ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^{*}$.

عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z-1-i|=|z-1+i|$.

.17

1 / حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$z^{2}-2\sqrt{2}\,z+3=0$.

2 / المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C ، D و G لواحقها على الترتيب $z_A=\sqrt{2}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2\sqrt{2}$ ، $z_D=-\sqrt{2}+3i$ و $z_G=2i$.

أ. أثبت أن النقطتين A و B تنتميان إلى دائرة مركزها C يطلب تعيين نصف قطرها .

ب. تحقق أن $z_C=z_A+z_B$ و $|z_A|=|z_B|$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $OACB$ و احسب مساحته .

جـ. بين أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(C;1),(D;2)\}$.

3 / (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\sqrt{(iz+2)\overline{(iz+2)}}=6$ ، عين المجموعة (Γ) .

4 / S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ من المستوي حيث : $z'=2e^{i\pi}z+4+2i$.

عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S ثم أوجد صورة (Γ) بالتحويل S .

.18

1/ أ. عيـن الجذران التربيعيان للعدد المركب z_1 حيث $z_1=3+4i$

ب. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z^{2}+1)(z^{2}-3-4i)=0$

2/ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=2-i$ ، $z_C=i$ ، $z_D=-i$ و $z_E=-3i$ على الترتيب

أ . أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي .

ب . استنتج طبيعة المثلث ABC

3 / أ . عيـن العبارة المركبة للتشابة المباشر S الذي يحقق $S(A)=B$ و $S(C)=C$ محددا نسبته وزاويته

ب . عين صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ بالتشابه S

جـ . استنتج مساحة المثلث BCE بالتشابه S

4 / أ . عيـن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $iz = 1+2ie^{i\theta}$ لما θ يمسح المجموعة $\mathbb{R}$

ب . بين أن النقطة E تنتمي إلى المجموعة (Γ)

.19

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z:

$$Z^2+6Z+34=0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقط $C; B; A$ لاحقاتها على الترتيب $Z_A=2$, $Z_B=-3+5i$, $Z_C=-3-5i$

- أحسب طويلة وعمدة للعدد $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC

3) أ- عين Z_D و Z_F لاحقتي النقطتين D و F على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDF$ مربع مركزه A

بـ عين ثم انشئ (Ψ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}\right\| = 20\sqrt{2}$$

جـ عين ثم انشئ (Ψ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث:

$Z = 2+ke^{\frac{\pi}{4}i}$ مع k يمسح $\mathbb{R}_+^*$

.20

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C و D ذات اللاحقات $Z_A=\sqrt{3}-i$ ؛ $Z_B=\sqrt{3}+i$ ؛ $Z_C=2i$ و $Z_D=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب.

أ – علم النقط A، B، C و D .

ب – اكتب العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي. استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ- تحقق أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A و يحول C إلى D.

أ – اثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية).

ب – تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C.

4) لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1، -1، 2 على الترتيب.

أ – عين احداثيي النقطة G.

ب – بين ان (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MA^2-MB^2+2MC^2=8$ هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

.21

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس (o,u,v) وحدة الطول 4 سنتمتر

النقطة A لاحتها العدد المركب i والنقطة B لاحقتها العدد المركب $_B = e^{-\frac{5\pi}{6}}$ وليكن الدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

1- اعطا العبارة المركبة للدوران r

2- عين Z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران r

3- عين Z_D لاحقة النقطة D مرجح النقط A,B,C المرفقة بالمعاملات 2; -1; 2 على الترتيب

4- بين ان النقط A,B,C,D تنتمي الى نفس الدائرة

. 22

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة

$$2x+y-2z+4=0$$

A النقطة ذات الإحداثيات $(3,2,6)$ و B نقطة إحداثياها $(1,2,4)$ و C إحداثياها $(4,-2,5)$

- بين أن النقط C,B,A تعرف المستوي (P)

1. - بين أن المثلث ABC قائم

- أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O و العمودي على المستوي (P)

- لتكن النقطة K المسقط العمودي للنقطة O على (P). أحسب المسافة OK

2. - أوجد إحداثيي النقطة G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

- نرمز بـ I إلى مركز ثقل المثلث ABC. بين أن G تنتمي إلى المستقيم (OI)
- احسب المسافة بين G و المستوي (P).
- لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق $\left\|3\vec{MO}+\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=5$.

عين (Γ) وما هي مجموعة النقط المشتركة بين (Γ) و(P)

.23

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+13=0$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A , B , C لواحقها على الترتيب $z_A=3-2i$, $z_B=3+2i$, $z_C=4i$.

2. أنشئ الشكل وعلم النقط A , B , C.
3. بين أن $OABC$ متوازي أضلاع.
4. عين لاحقة G ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$.
5. عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث $\left\|\vec{MO}+\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}\right\|=12$.
6. لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . وليكن β الجزء التخيلي للاحقة النقطة M. ولتكن النقطة N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه G وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) بين أن لاحقة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

ب) كيف يمكن اختيار β حتى تكون N تنتمي إلى المستقيم (BC) ؟.

.24

المستوي الركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E_\theta): z^2+4z\cos\theta+4=0$ حيث $\theta\in]0;\pi[$.

1) بدون حل للمعادلة (E_θ) أثبت أنه إذا كان α حل للمعادلة (E_θ) فإن $\bar{\alpha}$ هو كذلك حلا لها .

2) نضع : $z_1=-2\cos\theta+2i\sin\theta$ و $z_2=-2\cos\theta-2i\sin\theta$.

أ- تحقق أن z_1 , z_2 هما حلي المعادلة (E_θ) .

ب- أكتب z_1 , z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي

.

جـ- استنتج قيمة θ التي من أجلها يكون OM_1M_2 مثلث قائم في O حيث M_1 و M_2 نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 .

د- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z لما θ تمسح $\mathbb{R}$ حيث $z=2e^{i\theta}+3$

3) نعتبر $\theta\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ و النقط A , B , C لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 و 2

أ- التحقق أن $\frac{z_2-2}{z_1-2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .

بـ- عين مركز و نصف قطر الدائرة (Γ_1) المحيطة بالمثلث ABC .

4) نعتبر التحويل النقطي S_1 في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z'=iz+3$.

أـ عين طبيعة التحويل S_1 و عناصره المميزة .

بـ عين (Γ') صورة الدائرة (Γ_1) تحقق أن (Γ) جزء من (Γ') .

.25

1) حل في مجوعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$4z^2-2z+1=0$

2) ليكن العدد المركب حيث $z=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

أـ عين شكلا مثلثيا لكل من العددين z و $\bar{z}$.

بـ ليكن العدد المركب L_k حيث

$L_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح نسبي

بين أن $L_k=\frac{1}{2^{k-1}}i\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج قيمة العدد L_{2016}

جـ نعتبر في المستوي الركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقطتان A; B ذات اللاحقتان $z_A=2+2i\sqrt{3}$ و $z_B=2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب و C صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أـ عين z_C لاحقة النقطة C

ب-بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

.26

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس و مباشر $(o;\vec{u};\vec{v})$.

نضع Z_M لاحقة النقطة M و لتكن A النقطة ذات اللاحقة 4 و B النقطة ذات اللاحقة $4i$

1. لتكن θ عدد حقيقي من المجال $[0;2\pi[$ و r عدد حقيقي موجب تماما.

نعتبر النقطة E ذات اللاحقة $re^{i\theta}$ و F نقطة بحيث OEF قائم ومتساوي الساقين و $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF})=\frac{\pi}{2}$.

2. أوجد بدلالة r و θ لاحقة النقطة F.

3. نختار $\theta=\frac{5\pi}{6}$ و $r=3$, ضع رسما توضح فيه النتائج السابقة.

4. نعتبر النقط P , Q , R , S منتصفات القطع $[AB]$, $[BE]$, $[EF]$, $[FA]$ على الترتيب

أ- بين أن $PQRS$ متوازي أضلاع.

ب- نضع: $Z=\frac{Z_R-Z_Q}{Z_p-Z_Q}$

عين طويلة وعمدة العدد Z ثم إستنتج أن $PQRS$ مربع.

5. أ- أحسب بدلالة r و θ لاحقتي النقطتين P و Q.

ب- أحسب بدلالة r و θ مساحة المربع $PQRS$.

جـ- r عدد ثابت من اجل أية قيمة لـ θ تكون مساحة المربع أعظمية

ما هي لاحقة النقطة F.

.27

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2+z+1=0$.

2. الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

النقط A,B و M التي لواحقها: $z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب.

أـ أكتب z_A على الشكل الأسي.

بـ عين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_A)^2\right]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$.

3. أـ التحويل النقطي r يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=z.z_A+z_B\sqrt{3}$. ما طبيعة التحويل r؟ عين عناصره المميزة.

بـ التحاكي h يرفق بكل $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z'=-2z+3i$. عين نسبة و مركز التحاكي h.

جـ نضع: $S=h\circ r$. (يرمز الى تركيب التحويلين r و h)

عين طبيعة التحويل S ، مبرزا عناصره المميزة ثم تحقق أن عبارته المركبة هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات الاحقة i و النقط C ، D و E حيث $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$

بين أن النقط C ، D و E في استقامية.

5. أـ عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث $z'=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، θ عدد حقيقي.

بـ عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

BAC 2008

الموضوع الأول – 04.5 نقاط

1 – حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^2-(1+2i)z-1+i=0$$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1|<|z_2|$

بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2 – المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب 1، z_1 ، z_2 .

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$

أ) انطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية : $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$

برهن أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ و أن $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث θ ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب) أكتب Z على الشكل الأسي .

جـ) أكتب Z على الشكل المثلثي و استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين زاويته و نسبته.

الموضوع الثاني – 05 نقاط

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2+iz-2-6i=0$$

2. نعتبرفي المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين ، A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث :

$z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$

عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3.لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_c حيث $z_c=\frac{4-i}{1+i}$.

اكتب z_c على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4.أ – برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب – تطبيق : عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

BAC 2009

الموضوع الأول – 05 نقاط

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z)=(Z-1-i)(Z^2-2Z+4)$ و Z عدد مر

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z)=0$.

2) نضع: $Z_1=1+i$ ؛ $Z_2=1-\sqrt{3}i$

أ) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب) أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

جـ) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) أ) n عدد طبيعي.عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$.

الموضوع الثاني – 04 نقاط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1.حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+4=0$

2.نسمي z_1 ؛ z_2 حلي هذه المعادلة.

أ) أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_C=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق $i^2=-1$)

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

جـ) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث : $Z=\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$.

د) أحسب Z^3 و Z^6 ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي

BAC2010

الموضوع الأول – 05 نقاط

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=1+i$ و $z_B=3i$.

1) اكتب على الشكل الأسي: z_A و z_B .

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z'=2iz+6+3i$$

أ) عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$.

أ) عين z_D لاحقة النقطة D.

ب) عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ) تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عين حينئذ المجموعة (Δ).

الموضوع الثاني – 04 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6z+18=0$ ، ثمّ اكتب الحلين على الشكل الأسّي

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ - بيّن أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، O و C في استقامية وكذلك النقط B ، O و D.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

BAC2011

الموضوع الأول – 05 نقاط

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1. أ - اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ وعمدة له ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث

$$z'=iz-1-i$$

أ - عيّن طبيعة التحويل T محددًا عناصره المميّزة.

ب - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T.

3. لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$.

أ - بين أن النقاط A ، C و D في استقامية.

ب - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A ويحوّل النقطة C إلى النقطة D.

جـ - عيّن العناصر المميّزة للتشابه S الذي مركزه A و يحوّل B إلى D

الموضوع الثاني – 04 نقاط

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

1. أ - علّم النقط A ، B و C.

ب - ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك.

جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

2. عيّن ثمّ أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقّق: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

3. أ - حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-6z+13=0$

نسمي z_0 ، z_1 حلي هذه المعادلة.

ب - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركّب z .

- عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $|z-z_0|=|z-z_1|$.

BAC2012

الموضوع الأول – 05 نقاط

1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

(حيث $z\neq 2-3i$).

- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.

2) ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. A و B نقطتان لاحقاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث : $z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$.

- تحقق أنّ A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C، D، E لواحقها على الترتيب: $z_C=-2i$، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM.

ب- استنتج أنّه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإنّ النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها. تحقق أن E تنتمي إلى (γ).

الموضوع الثاني – .04.5 نقاط

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$.

أ- تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. A ، B ، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ- اكتب كلاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب- اكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ- بيّن أنّ النقط A ، B ، A' في استقامية.

BAC2013

الموضوع الأول – 05 نقاط

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ....(I) حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ) أنشئ النقط A ، B و C.

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته و زاويته.

ج) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$، ثم أنشئ G.

د) احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

الموضوع الثاني – 04.5 نقاط

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: (E) ...... $z^2+4z+13=0$

1) تحقق أن العدد المركب $-2-3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) بين أن: $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

ب) احسب z_C لاحقة النقطة C، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D ، حيث: $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

أ) بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D .

ج) بين أن: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

BAC2014

الموضوع الأول – 05 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B، C و D الت

لاحقاتها على الترتيب : $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$، $z_B=\overline{z_A}$، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ) بيّن أنّ النقط O ، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطره

د) احسب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أنّ النقط C ، A و C' في استقامية.

جـ) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

الموضوع الثاني – 04 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:

$$(z-i)(z^2-2z+5)=0$$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)، تعطى النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$ على الترتيب .

أ) أنشئ النقط A، B و C.

ب) جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

جـ) احسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه S .

ب) بيّن أنّ مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث: $|z|=|iz+1+2i|$

BAC2015

الموضوع الأول – 04.5 نقاط

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\overline{\alpha}$ مرافق α و $\overline{\beta}$ مرافق β.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لاحقاتها على التر

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad و \quad z_A=z_C\,.e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1) أ) اكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ثمّ عيّن قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سال

ب) تحقّق أنّ العدد المركّب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$ حقيقي.

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$.

أ) حدّد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحوّل D إلى A .

ب) اكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثمّ استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و in$\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقّق: $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

الموضوع الثاني – 04.5 نقاط

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها ع

الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث: $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ و $z_C=-(z_A+z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A

1) أ) اكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

جـ) أنشئ الدائرة (γ) والنقط A ، B و C .

2) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

ب) استنتج أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع وأنّ النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.

جـ) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$.

3) أ) عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A.

ب) أثبت أنّ صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

BAC2016 - الدورة الأولى

الموضوع الأول – 04.5 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z حيث $(z\neq 1)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب z_1 و z_2 حيث: $z_1=1-i$ و $z_2=\overline{z_1}$.

أ - اكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسي.

ب - بيّن أنّ النقطة B هي صورة للنقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يُطلب تعيين زاوية له.

3) نضع $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب.

عيّن (Γ) مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ (Γ).

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O ونسبته 2.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ وعناصره المميّزة .

ب - اكتب العبارة المركبة للتحويل S.

جـ - عيّن ثمّ أنشئ المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل النقطي S.

الموضوع الثاني – 04.5 نقاط

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B ويحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة.

3) أ) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته.

ب) عيّن (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z

جـ) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغير على $\mathbb{R}$ ثم تحقّق أنّ النقطة A تنتمي إلى (Γ) .

BAC2016 - الدورة الثانية

الموضوع الأول – 04 نقاط

1- نضع من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=z^3-24\sqrt{3}$.

أ) تحقق أنّ $P(2\sqrt{3})=0$.

ب) جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z)=(z-2\sqrt{3})(z^2+az+b)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z)=0$.

2- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$.

أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب) بيّن أنه يوجد دوران r مركزه A و يحول النقطة B إلى النقطة C، يطلب تعيين زاوية.

ج) استنتج طبيعة المثلث ABC .

د) عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AB}$، ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3- عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z غير المعدومة بحيث: $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ (العدد $\bar{z}$ هو مرافق العدد z).

الموضوع الثاني – 04.5 نقاط

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z: $2\bar{z}^3+3\bar{z}^2-3\bar{z}+5=0....(E)$.

يشير الرمز $\bar{z}$ إلى مرافق العدد المركب z.

1- أ) أثبت أنّ المعادلة (E) تكافئ $(2\bar{z}+5)(\bar{z}^2-\bar{z}+1)=0$.

ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\bar{z}_A$ ، $z_C=-1$ ، $z_D=-\frac{5}{2}$

أ) اكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) أنشئ النقط A، B، C و D.

ج) أثبت أنّ: $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د) استنتج طبيعة المثلث ABC .

3- ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و نسبته 2 ولتكن F صورة A بالتحويل S.

أنشئ النقطة F ثمّ حدد طبيعة المثلث AFC.

4- عيّن طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $z+1=kz_B$. لما يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

BAC2017

الموضوع الأول – 05 نقاط

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B و C التي لواحقها: $z_A=2-2i$ ، $z_B=\bar{z}_A$ و $z_C=-2$

1) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) حيث $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

تحقق أنّ مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وأنشئها.

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه C ونسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة.

الموضوع الثاني – 05 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي:

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، $(z+2)\times(\bar{z}+2)=|z+2|^2$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 ونسبته 3 وزاويته $\frac{\pi}{2}$

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ ونصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $(-2;-3)$ ونصف القطر 9 .

5) من أجل كل عدد حقيقي α: إذا كان $Z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$

فإنّ: $\arg(Z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ ، حيث k عدد صحيح.

BAC2017 - الدورة الاستثنائية

الموضوع الأول – 05 نقاط

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث: $\|\vec{u}\|=2cm$.

لتكن النقط A ، B و C التي لاحقاتها: $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\bar{z}_B$ ($\bar{z}_B$ هو مرافق z_B)

1) أ) اكتب العدد z_B على الشكل الأسي ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركب z_C.

ب) عين مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC، ثم أنشئ النقط A ، B و C.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه S ثم عين لاحقة كل من A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالتشابه S ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C'.

ب) احسب بالسنتمتر المربع مساحة المثلث $A'B'C'$.

الموضوع الثاني – 05 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A=-3-2i$ ، $z_B=1+i$ و $z_C=4-3i$.

1) عيّن النسبة وزاوية للتشابه المباشر S ذي المركز A والذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C.

2) اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) نرمز بـ G الى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I الى منتصف القطعة $[AC]$

عيّن كلاً من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أنّ النقط B، G و I في استقامية

4) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى I، حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA}+\vec{MC}\|=5\sqrt{2}$.

أ) تحقق أنّ النقطة C تنتمي الى (Γ).

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

BAC2018

الموضوع الأول – 05 نقاط

1) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A، B و C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: z_A، z_B و z_C حيث :

$Z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $Z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{Z}_B$ (يُرمز بـ $\overline{Z}_B$ لمرافق z_B)

اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

3) أ) تحقّق أنّ: $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وحدّد طبيعة المثلث OBC .

ب) استنتج أنّ: B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميزة.

4) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $=\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|$

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r.

الموضوع الثاني – 05 نقاط

I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2-4z+5)(\overline{z}-4+i)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقات

على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=4+i$ و $z_C=\overline{z}_A$.

1) تحقق أنّ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا.

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث: $\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \operatorname{Arg}\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و احسب z_D.

3) احسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول G إلى D.

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث: $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_G-z}{z_C-z}\right)=\pi+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$

تمارين مغربية

.1

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $2cm$). نعتبر النقط A و B و C التي ألحاق

على التوالي :

$z_A=-2i$ و $z_B=-\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}+i$

1) أ. أكتب z_A و z_B و z_C على الشكل الأسي

ب. استنتج مركز و شعاع الدائرة (Γ) المارة من A و B و C .

2) أ. أكتب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي

ب. استنتج طبيعة المثلث ABC

3) ليكن r الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ. بين أن o' لحق النقطة O' صورة النقطة O بالدوران r هو $-\sqrt{3}-i$

ب. حدد المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z|=|z+\sqrt{3}+i|$

ج. بين أن A و B تنتميان لـ (E)

.2

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{w}$ التي لحق

$z_{\vec{w}}=(2-\sqrt{2})+i(2-\sqrt{6})$. نعتبر النقطة A التي لحقها $a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

1) اعط الكتابة العقدية للإزاحة t

2) حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A بالإزاحة t

3) نضع $c=\frac{a}{b}$. أكتب a و b و c على شكلها المثلثي

4) أكتب العدد c على شكله الجبري

5) استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

6) أكتب c^{2007} على الشكل الجبري.

.3

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $1cm$). نعتبر النقط A و B و S و Ω التي

ألحاقها على التوالي : $a=-2+4i$ و $b=-4+2i$ و $s=-5+5i$ و $\omega=-2+2i$

و ليكن h التحاكي الذي مركزه S و نسبته 3

و لتكن C صورة A بالتحاكي h و D صورة B بالتحاكي h

1) أ. اعط الكتابة العقدية للتحاكي h

ب. بين أن $c=4+2i$ هو لحق النقطة C و أن $d=-2-4i$ هو لحق النقطة D

ج. بين أن النقط A و B و C و D متداورة

2) لتكن P منتصف القطعة $[AC]$

أ. حدد p لحق النقطة P

ب. بين أن $\frac{\omega-p}{b-d}=\frac{1}{2}i$ و استنتج أن $DB=2P\Omega$ و أن $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{P\Omega}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

.4

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي

$z_A=2+2i$ و $z_B=2-2i$ و $z_C=4$

أ. حدد معيار و عمدة كل من العددين العقديين z_A و z_B

ب.بين أن المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O

ج.بين أن الرباعي $OBCA$ مربع

د.لتكن E منتصف القطعة $[OA]$ و لتكن D نقطة لحقها z_D حيث $z_D=iz_A$

بين أن E هي منتصف القطعة $[CD]$

.5

المستوى العقديمنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$

و لتكن A و B النقطتين اللتسن لحقاهما $a=i$ و $b=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1. ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن C صورة B بالدوران r

أ) اعط الكتابة العقدية للدوران r ثم أكتب c لحق النقطة C على شكله الأسي

ب) أكتب كلا من b و c على الشكل الجبري

2. لتكن D مرجح النقط المتزنة $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$

أ) حدد d لحق النقطة D

ب) بين أن النقط A و B و C و D متداورة

3. ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 و لتكن E صورة النقطة D بالتحاكي h

اعط الكتابة العقدية للتحاكي h ثم حدد e لحق النقطة E

4. أ) أحسب $\frac{d-c}{e-c}$ و أكتبها على شكلها الأسي

ب) استنتج طبيعة المثلث CDE

.6

نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) أ. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي: $a=2$ و $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$. حدد قياسا للزاوية $A\widehat{B}C$

ب. استنتج ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هو $1+i\sqrt{3}$

2) نرمز ب (z_n) المتتالية المعرفة ب: $\begin{cases} z_0=0 \\ z_{n+1}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2 \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

و نضع A_n النقطة التي لحقها z_n

أ. بين أن النقط A_2 و A_3 و A_4 هي النقط التي ألحاقها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ و $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$

لاحظ أن $A_1=A$ و $A_2=B$ و $A_4=C$

ب. قارن أطوال القطع $[A_1A_2]$ و $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$

ج. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1}-\omega=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega)$

د. استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يتم تحديد طبيعته و عناصره المميزة

ه. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6}=A_n$ ثم حدد لحق A_{2012}

و. حدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$

.7

I. نعتبر العدد العقدي $U=2+\sqrt{3}+i$

1. بين أن معيار العدد U هو $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
2. تحقق من أن $U=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+i\,2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
3. أ) بإخطاط $\cos^2(\theta)$ بين أن: $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$

ب) بين أن $U=4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن $\sin(2\theta)=2\cos(\theta)\sin(\theta)$) ثم اكتب العدد U على شكله المثلثي

ج) بين أن: $U^6=\left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$

II. نعتبر في المستوى العقدي النقطتين Ω و P اللذين لحقاهما $\omega=\sqrt{3}$ و U و ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2

1. بين أن d لحق النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هو $(4+\sqrt{3})+2i$
2. حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث: $|z-4-\sqrt{3}-2i|=|U|$

.8

I. 1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+4=0$

2. نعتبر الحدودية المعرفة بما يلي: $P(z)=z^3-2(1+2i)z^2+4(1+2i)z-16i$

أ. بين أن $P(z)$ تقبل جذرا تخيليا صرفا z_0 يتم تحديده

ب. حدد α و β و γ بحيث: $P(z)=(z-z_0)(\alpha z^2+\beta z+\gamma)$

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$

II. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي:

$a=1+3i$ و $b=1-3i$ و $c=4$ و $d=5+i$

1. أحسب $\frac{b-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2. أحسب $\frac{d-b}{c-b}$ ثم استنتج أن النقط B و C و D نقط مستقيمية.
3. لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\vec{u}$ ذات اللحق $1-2i$

أ. حدد الكتابة العقدية للإزاحة t

ب. حدد p لحق النقطة P صورة A بالإزاحة t

4. لتكن h التحاكي الذي مركزه C و نسبته 2

أ. حدد الكتابة العقدية للتحاكي h

ب. حدد q لحق النقطة Q صورة P بالتحاكي h

5. لتكن R الدوران الذي مركزه Ω ذات اللحق $\omega=-1+i$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

أ. حدد الكتابة العقدية للدوران R

ب. حدد n لحق النقطة N صورة A بالدوران R

6. أحسب $\frac{n-p}{q-p}$ و استنتج طبيعة المثلث NPQ
7. لتكن S نقطة لحقها $s=-1$

أ. تحقق أن NPQS متوازي أضلاع

ب. استنتج مما سبق طبيعة الرباعي NPQS

.9

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي غير المنعدم z و M' النقطة التي لحقها $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

1. حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين.
2. نفترض أن M تخالف النقطتين A و B لحقيهما على التوالي 1 و -1

بين أن: $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

3. ليكن (Δ) واسط القطعة $[AB]$

بين أن: إذا كانت M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تنتمي إلى (Δ)

4. لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$

بين أن: إذا كانت M تنتمي إلى (Γ) فإن M' تنتمي إلى المستقيم (AB)

.10

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):\ 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=(2im)^2$

2- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

الجزء الثاني: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

نفارض أن $m\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,i\}$ و نضع: $z_1=\frac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2=\frac{1-i}{2}(m+i)$

نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي ألحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2

1- أ) تحقق أن: $z_1=iz_2+1$

ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $\omega=\frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

2- أ) تحقق من أن: $\frac{z_2-m}{z_1-m}=i\,\frac{m-1}{m-i}$

ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$

ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. (لاحظ أن $\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

.11

نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي

ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$

1) أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين a و b

2) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$

أ. ليكن z لحق النقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R. بين أن : $z'=bz$

ب. تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R

3) بين أن : $\arg c\equiv \arg a+\arg b\,[2\pi]$ ثم حدد عمدة للعدد العقدي c

.12

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $2z^2+2z+5=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ- أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي : $d=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ب- لتكن النقطة A التي لحقها $a=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$ و B صورة النقطة A بالدوران R

ليكن b لحق النقطة B ، بين أن $b=d.a$

3) لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OA}$ و النقطة C صورة النقطة B بالإزاحة t و c لحق النقطة C

أ- تحقق من أن $c=b+a$ ثم استنتج أن $c=a\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ (يمكنك استعمال السؤال 2) ب-)

ب- حدد $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ ثم استنتج أن المثلث OAC متساوي الأضلاع .

.13

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+34=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، النقط A و B و C التي

ألحاقها على التوالي هي :

$a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$. ليكن z لحق النقطة M من المستوى العقدي و z' لحق

النقطة M' صورة M بالإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي لحقها $4-2i$

أ. بين أن : $z'=z+4-2i$ ثم تحقق من أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

ب. بين أن : $\frac{b-c}{a-c}=2i$

ج. استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC=2AC$

.14

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+25=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C و

التي ألحاقها على التوالي هي : $a=3+4i$ و $b=3-4i$ و $c=2+3i$ و $d=5+6i$

أ. أحسب $\frac{d-c}{a-c}$ ثم استنتج أن النقط A و C و D مستقيمية

ب. بين أن العدد $p=3+8i$ هو لحق النقطة P صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه B و نسب

$\frac{3}{2}$

ج. أكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{d-p}{a-p}$ ثم استنتج أن $\frac{\pi}{4}$ قياس للزاوية $(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD})$

و أن $PA=\sqrt{2}PD$

.15

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$، النقطتين A و B اللت

لحقاهما على التوالي هما: $a=4+i$ و $b=8+3i$

ليكن z لحق النقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R الذي

مركزه النقطة Ω التي لحقها هو $\omega=1+2i$ و زاويته هي $\frac{3\pi}{2}$

أ. بين أن : $z'=-iz-1+3i$

ب. تحقق من أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران R هو $c=-i$

ج. بين أن: $b-c=2(a-c)$ ثم استنتج أن النقط A و B و C مستقيمية

.16

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+25=0$

2) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A و B و C التي ألحا

على التوالي هي : $a=4+3i$ و $b=4-3i$ و $c=10+3i$ و الإزاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{BC}$

أ. بين أن لحق النقطة D صورة النقطة A بالإزاحة T هو $d=10+9i$

ب. تحقق من أن $\frac{b-a}{d-a}=-\frac{1}{2}(1+i)$ ثم أكتب العدد العقدي $-\frac{1}{2}(1+i)$ على الشكل المثلثي

ج. بين أن $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

بالتوفيق للجميع

☺

الأستاذ شعبان

chbnoussama@gmail.com