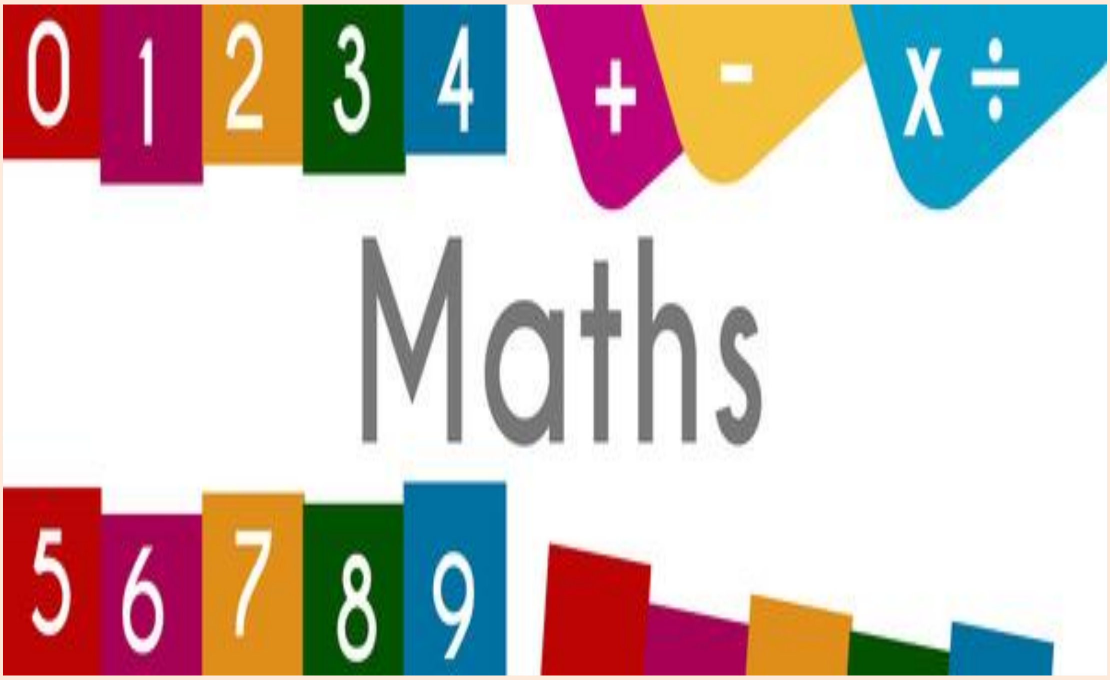
الرياضيات للثالثة ثانوي شعبة الرياضيات

رياضي والتقني رياضي



3 AS M - 3AS TM

40 تمرين محلول في القسمة

---*بكالوريا خارجية*---

اعداد الاستاذ: قليل مصطفى

تمارين محلولة (40 تمرين) بالتفصيل حول : القواسم والمضاعفات والقسمة في Z والموافقة والاعداد الاولية والتعداد من بكالوريات خارجية

التمرين(1) Polynésie, juin 1999

(1) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\left(2^{3n}-1\right)$ يقبل القسمة على 7

استنتج ان $\left(2^{3n+1}-2\right)$ مضاعف لـ 7 و $\left(2^{3n+2}-4\right)$ مضاعف لـ 7

(2)عين بواقي قسمة 2^n على 7

(3) ليكن p عدد طبيعي و نعتبر A_p حيث : $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$

(أ) إذا كان $p=3n$ فما هو باقي قسمة A_p على 7

(ب)بين أنه إذا كان $p=3n+1$ فان A_p يقبل القسمة على 7

(ج) ادرس الحالة $p=3n+2$

(4) نعتبر a و b المكتوبان في النظام الثنائي على الشكل : $b=\overline{1000100010000}$ و $a=\overline{1001001000}$

تحقق أن a و b من الشكل A_p هل يقبلان القسمة على 7 ؟

حل التمرين(1) Polynésie, juin 1999

لنضع $p(n)$ الخاصية $\left(2^{3n}-1\right)$ مضاعف لـ 7

(1) نستعمل البرهان بالتراجع على $p(n)$: الخاصية صحيحة من اجل $n=0$ لان $\left(2^{3\times 0}-1\right)=0$ مضاعف لـ 7

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n :اي ان $\left(2^{3n}-1\right)\equiv 0[7]$ ومنه نستنتج أن $2^{3n}\equiv 1[7]$ ونبرهن ان

$2^{3(n+1)}\equiv 1[7]$ اي $2^{3n+3}\equiv 1[7]$

لدينا $2^{3n}\equiv 1[7]$ و منه $2^3\times 2^{3n}\equiv 2^3[7]$ اي ان $2^{3n+3}\equiv 8[7]$ وهذا يعني $2^{3n+3}\equiv 1[7]$

إذن $\left(2^{3n+3}-1\right)$ مضاعف لـ7 و منه الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي اذن $\left(2^{3n}-1\right)$ مضاعف لـ7

(2) دراسة بواقي قسمة 2^nعلى 7 :

$2^0\equiv 1[7]$ و $2^1\equiv 2[7]$ و $2^2\equiv 4[7]$ و $2^3\equiv 1[7]$

إذن بواقي قسمة 2 على 7 تشكل متتالية دورية دورها هو 3 و منه : من اجل : $n=3k$: $2^n\equiv 1[7]$

و من اجل $n=3k+1$: $2^n\equiv 2[7]$ و من اجل $n=3k+2$: $2^n\equiv 4[7]$

(3) (أ) إذا كان $p=3n$ منه $A_p=2^{3n}+2^{6n}+2^{9n}$ حيث $2^{3k}\equiv 1[7]$ منه $A_p\equiv 1+1+1[7]$

أي $A_p\equiv 3[7]$

(ب) إذا كان $p=3n+1$ منه $A_p=2^{3n+1}+2^{6n+2}+2^{9n+3}$ منه $A_p\equiv 2+4+1[7]$

أي $A_p\equiv 0[7]$ منه مضاعف لـ7

(ج) إذا كان $p=3n+2$ فان $A_p=2^{3n+2}+2^{6n+4}+2^{9n+18}$

فان $A_p = 2^{3n+2}+2^{3(2n+1)+1}+2^{3(3n+6)}$ منه $A_p \equiv 4+2+1[7]$ أي $A_p \equiv 0[7]$ منه مضاعف لـ 7

(4) في النظام الثنائي $a = 1\times 2^9+1\times 2^6+1\times 2^3$ اذن $a = 2^p+2^{2p}+2^{3p}$ مع $p=3$
اذن a من الشكل A_p
وكذلك $b = 1\times 2^{12}+1\times 2^8+1\times 2^4$ أي $a = 2^p+2^{2p}+2^{3p}$ مع $p=4$ اذن b من الشكل A_p

العدد a لا يقبل القسمة على 7 لأن $p=3n$ و لدينا في هذه الحالة $A_p \equiv 3[7]$ اذن $a \equiv 3[7]$
العدد b يقبل القسمة على 7 لأن $p=3n+1$ و $n=1$ وفي هذه الحالة $A_p \equiv 0[7]$ اذن b مضاعف لـ 7

التمرين(2) : *Liban, juin 1999*

نعتبر العدد الطبيعي غير المعدوم n ونضع :
$a=4n+3$ و $b=5n+2$ و $d=PGCD(a;b)$

n	a	b	d
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

(1) أتمم الجدول المقابل .
ماذا يمكن الاستنتاج بالنسبة للعدد d

(2) احسب $5a-4b$ ثم استنتج القيم الممكنة لـ d

(3) نعتبر المعادلة : E : $7k-4n=3$
حيث n و k عددان طبيعين غير معدومين

(أ) عين حلا خاصا للمعادلة E ثم جميع الحلول $(n;k)$ لها

(ب) استنتج جميع الثنائيات الطبيعية $(n;k)$ حلول E بحيث $4n+3=7k$

(4) عين جميع الاعداد الطبيعية n بحيث يكون $5n+2$ يقبل القسمة على 7

(5) ليكن r باقي القسمة الاقليدية للعدد n على 7 . استنتج من الأسئلة السابقة قيمة العدد r بحيث يكون $d=7$
– من أجل أي قيمة للعدد r يكون $d=1$ ؟

حل التمرين(2) *Liban, juin 1999*

n	a	b	d
8	35	42	7
9	39	47	1
10	43	52	1
11	47	57	1
12	51	62	1
13	55	67	1
14	59	72	1
15	63	77	7
16	67	82	1
17	71	87	1

(1) إتمام الجدول :
يظهر انه لما $n \equiv 1[7]$ فان $d=7$ وإلا فان $d=1$

(2) حساب $5a-4b$
$5a-4b=20n+15-20n-8=7$ اذن $5a-4b=7$
d يقسم العددين a و b ومنه d يقسم $5a$ و يقسم $4b$
ومنه يقسم $5a-4b$ أي ان d لقسم 7
ومنه نستنتج ان القيم الممكنة لـ d هي 1 او 7

$(3)\quad 7k-4n=3 \quad E$

(أ) نلاحظ ان الثنائية $1;1$ حل خاص للمعادلة E

ومنه نجد : $\begin{cases}7k-4n=3\\ 7\times1-4\times1=3\end{cases}$ اذن $7\ k-1\ -4\ n-1\ =0$

ومنه $7\ k-1\ =4\ n-1$ وهذا يعني 4 يقسم $7\ k-1$

وبما أن 4 لا يقسم 7 فحسب مبرهنة

غوص فان العدد 4 يقسم $k-1$ أي ان $k-1=4p$

وبنفس العمل نجد : $n-1=7p$

ومنه مجموعة الحلول $n;k$ هي : $\begin{cases}n=1+7p\\ k=1+4p\end{cases}, p\in N$

(ب) استنتاج جميع الثنائيات الطبيعية $n;k$ بحيث: $4n+3=7k$ أي ان $7k-4n=3$ ومنه

$(\ k=1+4p\geq 0$ و $n=1+7p\geq 0)$ معناه $\begin{cases}p\geq -1/4\\ p\geq -1/7\end{cases}$ اذن $p\geq 0$

اذن الثنائيات التي تحقق هي : $1+7p;1+4p$ حيث $p\geq 0$

(4) تعيين الاعداد الطبيعية n بحيث $5n+2$ يقبل القسمة على 7 : أي $5n+2\equiv 0\ 7$

ليكن جدول بواقي القسمة التالي :

$n\equiv ...\ 7$	0	1	2	3	4	5	6
$5n+2\equiv ...\ 7$	2	0	5	3	1	6	4

من الجدول ينتج ان $5n+2$ يقبل القسمة على 7 اذا كان $n\equiv 1\ 7$ أي ان $n=7m+1$ حيث m طبيعي

(5) لدينا $n\equiv r\ 7$ ومن الأسئلة السابقة (3) لدينا $4n+3=7k$ عندما $n\equiv 1\ 7$

وأيضا يكون $5n+2=7k$ عندما $n\equiv 1\ 7$

وبالتالي لما يكون $n\equiv 1\ 7$ (أي $r=1$) فان العددين a و b يقبلان القسمة على 7 ومنه $d=7$

– من اجل كل القيم الأخرى للعدد r العددان a و b لا يقبلان القسمة على 7 وبالتالي $d=1$

التمرين(3) France Juin 1999

n عدد طبيعي ، نعتبر الاعداد $a_n=4\times10^n-1$ ، $b_n=2\times10^n-1$ ، $c_n=2\times10^n+1$

(1) (أ) احسب a_1 ، b_1 ، c_1 و a_2 ، b_2 و c_2 و a_3 ، b_3 ، c_3 .

(ب) – بكم رقم في النظام العشري يتكون العددان a_n و c_n

– بين ان a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 ، و ان b_3 عدد اولي .

(ج)بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $b_n\times c_n=a_{2n}$

–استنتج تحليلا الى جداء عوامل أولية للعدد a_6

(د) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $PGCD(b_n;c_n)=PGCD(c_n;2)$

(هـ) استنتج ان b_n و c_n اوليان فيما بينهما .

(2) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $b_3x+c_3y=1...(E)$

(أ)بين ان المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

(ب) استعمل خوارزمية اقليدس للعددين b_3 ، c_3 ثم عين حلا خاصا للمعادلة (E)،

(ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة .

حل التمرين(3) France Juin 1999

$c_n=2\times10^n+1$، $b_n=2\times10^n-1$ ، $a_n=4\times10^n-1$

(1) (أ) حساب الاعداد : $a_1=39$, $b_1=19$, $c_1=21$ و $a_2=399$, $b_2=199$ و $c_2=201$ و $a_3=3999$, $b_3=1999$ ،$c_3=2001$.

(ب) من تعريف الكتابة العشرية لعدد يمكن القول ان a_n و c_n لهما $(n+1)$ رقما

– تبيان ان a_n و c_n يقبلان القسمة على 3 : لدينا $10\equiv1[3]$ ومنه $10^n\equiv1[3]$

و $4\equiv1[3]$ ومنه $4\times10^n-1\equiv0[3]$ اذن $a_n\equiv0[3]$ وهذا يعني a_n يقبل القسمة على 3

و $10^n\equiv1[3]$ و $2\equiv-1[3]$ ومنه $2\times10^n+1\equiv0[3]$ اذن $c_n\equiv0[3]$ وهذا يعني c_n يقبل القسمة على 3

تبيان ان b_3 عدد اولي : لدينا $\sqrt{1999}\approx44,7$.

العدد 1999 لا يقبل القسمة على اي من الاعداد التالية $\{1;2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31;37;41;43\}$

فهو اذن اولي ومنه b_3 عدد اولي

(ج) تبيان ان : $b_n\times c_n=a_{2n}$ بتعويض c_n و b_n

. $b_n\times c_n=(2\times10^n-1)(2\times10^n+1)$

$b_n\times c_n=\left((2\times10^n)^2-(1)^2\right)=4\times10^{2n}-1=a_{2n}$ ومنه $b_n\times c_n=a_{2n}$

–استنتاج تحليل الى جداء عوامل أولية للعدد a_6 : من المساواة $a_{2n}=b_n\times c_n$ نجد

$a_6=a_{2(3)}=b_3\times c_3=1999\times2001=1999\times3\times23\times29$

(د) تبيان ان : $PGCD(b_n;c_n)=PGCD(c_n;2)$: لدينا $b_n=2\times10^n-1$ ،$c_n=2\times10^n+1$

ومنه $c_n=2\times10^n+1=2\times10^n-1+2=b_n+2$ اذن $c_n=b_n+2$ ومنه $c_n=1\times b_n+2$ وبالتالي نجد

$PGCD(b_n;c_n)=PGCD(c_n,2)$

(هـ) استنتاج ان b_n و c_n اوليان فيما بينهما : نضع $d=PGCD(b_n;c_n)$ ومنه $d=PGCD(c_n;2)$ وبما ان

$c_n=2\times10^n+1$ فانه فردي وبالتالي $d=PGCD(c_n;2)=1$ أي ان $d=PGCD(b_n;c_n)=1$ وبالتالي b_n

و c_n اوليان فيما بينهما

2) $b_3x+c_3y=1...(E)$. وهذه تعني $1999x+2001y=1$ $b_3=1999$ ،$c_3=2001$ اوليان فيما بينهما

اي $PGCD(1999;2001)=1$ و منه حسب مبرهنة بيزو المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

(ب) خوارزمية اقليدس للعددين b_3 ، c_3 : بقسمة c_3 على b_3 ثم القسمات المتتابعة بخوارزمية اقليدس نجد :

$c_3=2001=1999\times1+2=b_3+2$ و $b_3=1999=2\times999+1$ اذن $999c_3=999b_3+2\times999$

ومنه $999c_3=999b_3+(b3-1)$ ومنه ينتج $1000b_3-999c_3=1$

اذن $(1000;-999)$ حلا خاصا للمعادلة (E)،

(ج) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة :

لدينا $\begin{cases}1000b_3-999c_3=1\\ b_3x+c_3y=1\end{cases}$ بالطرح نجد : $(1000-x)b_3=(999+y)c_3$ ...(*)

b_3 يقسم $(999+y)c_3$ وبما ان b_3 ، c_3 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص b_3يقسم $(999+y)$ ومنه

$999+y=b_3.k$ ومنه $y=-999+1999k$

وبالتعويض في (*) نجد $(1000-x)b_3=b_3.kc_3$ ومنه $(1000-x)=.kc_3$

اذن $x=1000-c_3.k$ وبالتالي : $x=1000-2001.k$

اذن مجموعة الحلول هي : $\{(1000-2001.k);(-999+1999k)\}$

التمرين(4): Asie Juin1999

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x+5y=1...(E)$

(1) جد حلا خاصا للمعادلة (E) ، ثم حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ هذه المعادلة .

(2) ليكن N عددا طبيعيا حيث يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان : $\begin{cases}N=8a+1\\ N=5b+2\end{cases}$.

(أ) بين ان الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

(ب) جد باقي القسمة الاقليدية للعدد N على 40 .

(3) حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x+5y=100$

(4) في القرن الثامن ، دفع مجموعة من الاشخاص من الجنسين 100 قطعة نقدية لفندق ،حيث دفع كل ذكر 8 قطع نقدية و دفعت كل انثى 5 قطع نقدية .

ما هو عدد الذكور و عدد الاناث في هذه المجموعة .

حل التمرين(4): Asie Juin1999

$8x+5y=1...(E)$

(1) الثنائية $(2;-3)$ حل خاص للمعادلة : $8(2)+5(-3)=1$

لدينا : $\begin{cases}8x+5y=1\\ 8(2)+5(-3)=1\end{cases}$ بالطرح نجد : $8(x-2)+5(y+3)=0$ ومنه $8(x-2)=5(-y-3)$

$5/8(x-2)$ وبما ان $PGCD(5;8)=1$ فانه حسب مبرهنة غوص $5/(x-2)$ أي $x-2=5k$

ومنه $x=5k+2$

وبالتعويض في $8(x-2)=5(-y-3)$ نجد $8(5k)=5(-y-3)$ أي $-y-3=8k$ اذن $y=-8k-3$

$S=\{(5k+2;-8k-3)\};k\in\mathbb{Z}$

(2) لدينا $\begin{cases}N=8a+1\\ N=5b+2\end{cases}$

(أ) الثنائية $(a;-b)$ حل للمعادلة (E) : $8a=N-1$ و $5b=N-2$ ومنه $8a-5b=N-1-N+2=1$

وهذه تعني : $8a+5(-b)=1$ ومنه $(a;-b)$ حل للمعادلة

(ب) باقي القسمة الاقليدية للعدد N على 40 :

لدينا من السؤال السابق $(a;-b)$ حل للمعادلة ومنه : $a=5k+2$ وبالتالي : $N=8(5k+2)+1=40k+17$

اذن $N=40k+17$ وتعني $N\equiv 17[40]$ اذن باقي القسمة هو 17

(3) حل المعادلة (*) : $8x+5y=100$:

بما ان $(2;-3)$ حل خاص للمعادلة (E) فان $(200;-300)$ حل خاص للمعادلة(*)

لدينا اذن : $\begin{cases}8x+5y=100\\ 8(200)+5(-300)=100\end{cases}$ وباتباع نفس الخطوات السابقة نجد مجموعة الحلول :

$S=\{(5k+200;-8k-300)\};k\in\mathbb{Z}$

(4) من المعطيات نكتب :نسمي x عدد الذكور و y عدد الاناث : ومنه $8x+5y=100$

اذن حلول المسألة هي حلول المعادلة (*) ومنه $x=5k+200$ و $y=-8k-300$ حيث $x\succ 0$ و $y\succ 0$

اذن $\begin{cases}5k+200\succ 0\\ -8k-300\succ 0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k\succ -40\\ k\prec -37,5\end{cases}$ اي $k\in\{-38,-39\}$ وبالتعويض في قيم x و y

نجد $(x;y)\in\{(10,4);(5,12)\}$

التمرين(5) : Pondichery, mai 2000

(1) (أ) من اجل $1\le n\le 6$ احسب بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7

(ب) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3^{n+6}-3^n$ يقبل القسمة على 7 ثم استنتج ان 3^{n+6} و 3^n لهما نفس باقي القسمة على 7

(ج) باستعمال النتائج السابقة , احسب باقي القسمة الاقليدية للعدد 3^{1000} على 7

(د) بصفة عامة كيف يمكن حساب بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 من اجل n كيفي

(هـ) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان 3^n اولي مع 7

(2) نضع من اجل $n\ge 2$: $u_n=1+3+3^2+...+3^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}3^i$

(أ) بين أن : $u_n=\frac{1}{2}\ 3^n-1$

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون u_n قابلا القسمة على 7

(ج) عين جميع قواسم u_6

حل التمرين(5) Pondichery, mai 2000

(1) (أ) $3^0=1\equiv 1[7]$, $3^1=3\equiv 3[7]$, $3^2=9\equiv 2[7]$,

$3^3\equiv 3\times 2[7]\equiv 6[7]$, $3^4\equiv 4[7]$, $3^5\equiv 5[7]$, $3^6\equiv 1[7].,$

نلاحظ ان بواقي القسمة دورية ودورها 6

(ب) برهان ان : $3^{n+6}-3^n$ يقبل القسمة على 7

ونعلم ان $3^{n+6}-3^n=3^n\ 3^6-1$ و $3^6\equiv 1[7]$ اذن 3^6-1 يقبل القسمة على 7

وبالتالي العدد : $3^{n+6}-3^n$ يقبل القسمة على 7 أي ان : $3^{n+6}-3^n \equiv 0\ 7$

و من الموافقة $3^{n+6}-3^n \equiv 0\ 7$ نجد : $3^{n+6} \equiv 3^n\ 7$ وهذا يعني ان 3^{n+6} و 3^n لهما نفس باقي القسمة على 7

(ج) لدينا $1000 = 6\times 166+4$ اذن $3^{1000} = \left(3^6\right)^{166} \times 3^4$ وبما ان $3^6 \equiv 1[7]$ و $3^4 \equiv 4[7]$ فان $3^{1000} \equiv 4[7]$

(د) من السؤال (1) (أ) وبما ان $3^6 \equiv 1[7]$ يمكن الاستنتاج ان : $\left(3^6\right)^k \equiv 1^k[7]$ ومنه $3^{6k} \equiv 1[7]$

وبالتالي : $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ و $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ و $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ و $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ و $3^{6k+5} \equiv 5[7]$

(هـ) من هذه البواقي وهي : 1 او 3 او 2 او 6 او 4 او 5 فانه لا يوجد عدد طبيعي n يكون من اجله 3^n يقبل القسمة على 7

وبالتالي من اجل كل عدد طبيعي n فان 3^n اولي مع 7

(2) (أ) u_n هو مجموع n حدا لمتتالية هندسية حدها الأول 1 واساسها 3 ومنه :

$$u_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1\times\frac{1-3^n}{1-3} \qquad \text{ومنه} \qquad u_n = \frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$$

(ب) يكون u_n قابلا القسمة على 7 عندما يكون $3^n \equiv 1[7]$

ومن السؤال (1) (د) نجد ان $3^{6k+5} \equiv 5[7]$ أي ان $n = 6k$ أي مضاعف للعدد 6

(ج) تعيين قواسم u_6 :

$$u_6 = \frac{3^6-1}{2} = \frac{1}{2}\left(3^3-1\right)\left(3^3+1\right) = 2^2\times 7\times 13$$ وعدد قواسمه : $3\times 2\times 2 = 12$

اذن قواسم u_6 هي : 1 , 2 , 4 , 7 , 13 , 14 , 26 , 28 , 52 , 91 , 182 , 364

التمرين(6): La Reunion juin 2000

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ نعتبر العددين الطبيعيين a و b بحيث: $a = n^3-n^2-12n$ و $b = 2n^2-7n-4$

(1)بين أن a و b يقبلان القسمة على $(n-4)$.

(2)نضع $\alpha = 2n+1$ و $\beta = n+3$ وليكن d القاسم المشترك الأكبر لـ α و β

(أ)أوجد علاقة بين α و β مستقلة عن n.

(ب) بين أن d قاسم لـ 5 .

(ج) بين أن العددين α و β مضاعفان للعدد 5 إذا وفقط إذا كان $(n-2)$ مضاعفا لـ 5.

(د) عين قيم n التي من اجلها يكون $d = 5$

(3) بين أن $(2n+1)$ و n أوليان فيما بينهما.

(4) (أ) عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

(ب) تحقق من النتائج المحصل عليها في حالة $n = 11$ و $n = 12$.

حل التمرين(6): *La Reunion juin 2000*

(1) من أجل $n=4$ نجد $a=0$ و $b=0$ أي ان العدد 4 جذر لكل من a و b ومنه كل من a و b يقبلان القسمة على $(n-4)$ وعليه نكتب: $b=(n-4)p(n)=(n-4)(2n+1)$
(باستعمال القسمة على $(n-4)$)

و $a=(n-4)Q(n)=n(n-4)(n+3)$ (باستعمال القسمة على $(n-4)$)

2) لدينا $\alpha=2n+1$ و $\beta=n+3$ و $d=PGCD\ \alpha;\beta$.

(أ) لإيجاد علاقة مستقلة عن $n.$ تربط α و β لابد من التخلص من $n.$

نلاحظ ان : $2\beta-\alpha=2(n+3)-(2n+1)=5$

اذن العلاقة التي تربط α و β هي: $2\beta-\alpha=5$.

(ب) بما أن d يقسم α ويقسم β فإنه يقسم $2\beta-\alpha$ أي d يقسم 5. ومنه $d\in\{1,5\}$

(ج) برهان ان : العددان α و β مضاعفان للعدد 5 تعني $(n-2)$ مضاعفا لـ 5 .

− نفرض 5 يقسم α ومنه 5 يقسم $2n+1$ بالتالي يقسم $2n+1-5=2n-4=2(n-2)$

وبما ان 5 اولي مع 2 فانه حسب مبرهنة غوص 5 يقسم $n-2$

− نفرض 5 يقسم β ومنه 5 يقسم $n+3$ بالتالي يقسم $n+3-5=(n-2)$

و بالعكس إذا كان $(n-2)$ مضاعف للعدد 5 فإن $n-2=5k$ ومنه $n=5k+2$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

و بالتالي و $\beta=5k+2+3=5k+5=5(k+1)$ أي ان β مضاعف للعدد5

و يكون ايضا $\alpha=2n+1=2(5k+2)+1=5(2k+1)$ أي ان α مضاعف للعدد 5

إذن يكون α و β مضاعفين للعدد 5

(د) $d=5$ معناه($\alpha\equiv0[5]$ و $\beta\equiv0[5]$) ومنه من السؤال (ج) $n-2\equiv0[5]$ اذن $n\equiv2[5]$

أي ان قيم n حتى يكون $PGCD(\alpha;\beta)=5$ هي : $n=5k+2$ حيث k طبيعي

(3) بما أن $1(2n+1)+(-2)n=1$ فهذا يعني وجود عددان صحيحان u و v يحققان $u.(2n+1)+v.n=1$

ومنه فإنه حسب مبرهنة بيزو $(2n+1)$ و $n.$ أوليان فيما بينهما

(4)(أ): تعيين $PGCD(a;b)=d$ حسب قيم n :

$$PGCD(a;b)=PGCD((n-4)n(n+3);(n-4)(2n+1))$$
$$=(n-4)PGCD(n(n+3);(2n+1))$$

و $n-4\succ0$ (لان $PGCD(a;b)$ عدد موجب) ومنه $n\geq5$

ونضع $\delta=PGCD(n(n+3);(2n+1))$ ونبرهن ان $\delta=d$

لدينا من جهة $PGCD(\delta;n)$ يقسم n . ومن جهة أخرى $PGCD(\delta;n)$ يقسم δ اذن فانه يقسم $2n+1$. ولينا ايضا $PGCD(\delta;n)$ هو قاسم مشترك لـ n و $2n+1$ الاوليين فيما بينهما حسب(3)

اذن $PGCD(\delta;n)=1$ أي ان δ و n اوليان فيما بينهما

وبما ان δ يقسم $n(n+3)$ وهو اولي مع n فانه حسب غوص δ يقسم $n+3$

وهذا يبين ان δ قاسم مشترك للعددين $n+3$ و $2n+1$ وبالتالي δ يقسم قاسمهما المشترك الاكبر d

واخيرا $d/n+3$ و $d/2n+1$ ومنه d قاسم مشترك لـ$2n+1$ و $n(n+3)$ وهذا يبين ان d/δ

اذن مما سبق :($d \succ 0$ و $\delta \succ 0$ و d/δ و δ/d) اذن $d=\delta$

لدينا $PGCD(a;b)=(n-4).d$

– حسب ما سبق اذا كان $n \neq 5k+2$ (أي $n-2$ ليس مضاعف لـ5) فان $PGCD(\alpha;\beta)=1$

وعليه $PGCD(n(n+3);2n+1)=1$ إذن $PGCD(a;b)=(n-4)\times 1=n-4$

– واذا كان $n=5k+2$ ($(n-2)$ مضاعف للعدد 5) فان $PGCD(\alpha;\beta)=5$ (حسب السؤال السابق)

إذن $PGCD(a;b)=(n-4)\times\delta=5(n-4)$

الخلاصة : $PGCD(a;b)=(n-4).d=\begin{cases}5(n-4)... & n\equiv 2[5]\\ n-4 & n\neq 5k+2\end{cases}$

(ب) في حالة $n=11$ يكون $(n-2)$ ليس مضاعفا للعدد 5 . (9 ليس مضاعف 5)

وبالتالي $PGCD(a;b)=n-4=11-4=7$ ($a=11^3-11^2-12(11)=1078=7\times154$ و

$b=2(11)^2-7(11)-4=161=7\times23$

في حالة $n=12$ يكون $(n-2)$ مضاعف للعدد 5 ($a=1440=40\times36$ و $b=200=40\times5$)

و $PGCD(a;b)=5(n-4)=5(12-4)=40$

التمرين(7) *Asie juin 2000*

(1)– عيِّن $PGCD(2688;3024)$

(2)– (أ)– تحقق انَ المعادلتين $2688x+3024y=-3360...(1)$ و $8x+9y=-10...(2)$ متكافئتين .

(ب)– تحقق انَ $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (2) .

(3)– نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتاهما

على الترتيب : $(P): x+2y-z+2=0$ و $(P'): 3x-y+5z=0$

(أ)– بيَن أنَ المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (D) .

(ب)– بيَن أنَ إحداثيات نقط(D) تحقق المعادلة(2)، ثمَ استنتج (E) مجموعة نقط (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

حل التمرين(7) *Asie juin 2000*

(1)– تعيين $PGCD(2688;3024)$

$2688=2^7\times3\times7$ و $3024=2^4\times3^3\times7$ ومنه $PGCD(2688;3024)=2^4\times3\times7=336$

(2) (أ)– التحقق انَ المعادلتين (1) و (2) متكافئتين .

$2688x+3024y=-3360$ بقسمة طرفي المعادلة بالعدد 336 نجد $8x+9y=-10$

ومنه المعادلتان (1) و (2) متكافئتان .

(ب)− التحقق انَ $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (2) :

$8(1)+9(-2)=-10$ ومنه الثنائية $(1;-2)$ حل خاص للمعادلة (2)

(3) $(P):x+2y-z=-2$ و $(P'):3x-y+5z=0$

(أ)− بيان أنَ المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (D) :

$\vec{n}(1;2;-1)$ و $\vec{n'}(3;-1;5)$ هما الشعاعان الناظميان للمستويين وبما ان $\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{3}$ فان المستويين غير متوازيين

ومنه فانهما متقاطعين وفق مستقيم $(P)\cap(P')=(D)$

(ب)− بيان أنَ إحداثيات نقط (D) تحقق المعادلة (2):

$M(x;y;z)\in(D)$ معناه $\begin{cases}x+2y-z=-2\\3x-y+5z=0\end{cases}$ وتعني أيضا $\begin{cases}5z+10y-5z=-10\\3x-y+5z=0\end{cases}$

وبالجمع نجد : $8x+9y=-10$ وهي نفسها المعادلة (2)

نستنتج أنَ إحداثيات نقط (D) تحقق المعادلة (2)

− استنتاج (E) مجموعة نقط (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة:

$\begin{cases}8x+9y=-10\\8(1)+9(-2)=-10\end{cases}$ ومنه نجد بالطرح $8(x-1)+9(y+2)=0$

اذن $8(x-1)=9(-y-2)$

لدينا $\begin{cases}9/8(x-1)\\PGCD(8;9)=1\end{cases}$ ومنه حسب غوص $9/(x-1)$ أي $x-1=9k$ ومنه نجد : $x=9k+1$

وبالتعويض نجد $8(9k)=9(-y-2)$ اذن $y=-8k-2$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

نستنتج انَ مجموعة نقط (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة هي :

$(E)=\{M(9k+1;-8k-2;z)\}$ حيث $(k;z)\in\mathbb{Z}^2$

التمرين(8): Pondichery, juin 2001

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهولين (n,m): $11n-24m=1$ .....(1)

(أ)− برر أن المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا .

(ب)− باستخدام خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (1) .

(ج)− عين مجموعة حلول المعادلة (1) .

2) ليكن (n,m) ثنائية كيفية من الاعداد الطبيعية حلا للمعادلة (1)

(أ)− بين أنه يمكن ان نكتب : $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$.

(ب)− بين أن : $10^{11}-1$ يقسم $(10^{11n}-1)$. و ان $10^{24}-1$ يقسم $(10^{24m}-1)$

نذكر انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{a^n-1}{a-1}=(a^{n-1}+a^{n-2}+.....+a+1)$ (2)

استنتج من السؤال السابق وجود عددين صحيحين N و M بحيث $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

(ج)- بين ان كل قاسم مشترك لـ $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$ فهو يقسم كذلك 9

(د)-. بين أن 9 يقسم $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

هـ- استنتج مما سبق $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)$.

حل التمرين(8) Pondichery, juin 2001

(1) (أ)- لدينا $PGCD(11;24)=1$ إذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v بحيث $11u+24v=1$. يكفي أن نضع $n=u$ و $m=-v$.

(ب)- باستخدام خوارزمية إقليدس :

$$24=11\times 2+2$$
$$11=2\times 5+1$$

إذن :

$$1=11-2\times 5$$
$$1=11-(24-11\times 2)\times 5$$
$$1=11\times 11-24\times 5$$

الحل الخاص هو : $(11;5)$

(ج) – لدينا

$$11n-24m=1$$
$$11\times 11-24\times 5=1$$

بالطرح طرفا من طرف نجد :

$$11(n-11)-24(m-5)=0$$
$$11(n-11)=24(m-5)$$

بتطبيق مبرهنة غوص : 11 يقسم $24(m-5)$ و بما ان 11 و 24 اوليان فيما بينهما فان 11 يقسم $m-5$ أي $m-5=11k$ ومنه $m=5+11k$ وبالمثل نجد $n=24k+11$ وبالتالي مجموعة الحلول هي :

$$S=\{(24k+11;11k+5);\ \ k\in Z\ \}$$

2) (أ) بالنشر نجد : $\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=10^{11n}-1-10^{24m+1}+10=10^{11n}-10^{24m+1}+9$

وبما ان : $11n=24m+1$ فان $10^{11n}=10^{24m+1}$ ومنه $10^{11n}-10^{24m+1}=0$ وبالتالي

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$$

(ب) اثبات أن : $10^{11}-1$ يقسم $\left(10^{11n}-1\right)$:

يمكن ملاحظة ان : $10^{11n}-1=\left(10^{11}\right)^n-1$

ومن المساواة $a^n-1=(a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+.....+a+1\right)$ يمكن أن نكتب :

$10^{11n}-1=\left(10^{11}\right)^n-1=(10^{11}-1)(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1}$ إذن $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$

و بنفس الطريقة نبين ان : $10^{24}-1$ يقسم $(10^{24m}-1)$

$$10^{24m}-1=\left(10^{24}\right)^m-1=\left(10^{24}-1\right)\left(1+10^{24}+(10^{24})^2+...+(10^{24})^{n-1}\right)$$

وهذا يعني $10^{24}-1$ يقسم $(10^{24m}-1)$

– بما ان $10^{11}-1$ يقسم $10^{11n}-1$ هذا يعني يوجد عدد صحيح N بحيث : $10^{11n}-1=\left(10^{11}-1\right)N$

و بما ان $10^{24}-1$ يقسم $(10^{24m}-1)$ هذا يعني يوجد عدد صحيح M' بحيث :

$(10^{24m}-1)=\left(10^{24}-1\right)M'$ حيث $M'=1+10^{24}+(10^{24})^2+...+(10^{24})^{m-1}$ و $M=10M'$

$N=(1+10^{11}+(10^{11})^2+...+(10^{11})^{n-1}$ و $M=10(1+10^{24}+(10^{24})^2+...+(10^{24})^{m-1}$

ولدينا سابقا $(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$ ومنه $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M=9$

(ج) – ليكن d قاسما مشتركا لـ $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$ ومنه d يقسم مجموع مضاعفاتهما

إذن : d يقسم $(10^{11}-1)N$ و يقسم $(10^{24}-1)M$

وبالتالي d يقسم فرقهما $(10^{11}-1)N-(10^{24}-1)M$ أي ان d يقسم العدد 9

(د) لدين $10\equiv1[9]$ اذن $10^{11}\equiv1[9]$ ومنه $10^{11}-1\equiv0[9]$ وهذا يعني 9 يقسم $10^{11}-1$

وبنفس الطريقة نبين أن : 9 يقسم $10^{24}-1$

$10\equiv1[9]$ ومنه $10^{24}\equiv1[9]$ وبالتالي : $10^{24}-1\equiv0[9]$

(هـ) من السؤال (ج) بينا ان كل قاسم مشترك لـ $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$ فهو يقسم كذلك 9

اذن قاسمهما المشترك الأكبر يقسم العدد 9

و في السؤال (د) بينا ان 9 هو قاسم مشترك للعددين $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$

اذن $PGCD(10^{11}-1;10^{24}-1)=9$

التمرين(9) Amerique du Nord juin 2001

(1) بين انه من اجل كل عدد n صحيح فان العددين الصحيحين $14n+3$ و $5n+1$ اوليان فيما بينهما

(2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $E\ :87x+31y=2$

(أ) تأكد باستعمال السؤال الأول ان العددين 87 و 31 اوليان فيما بينهما

(ب) استنتج ثنائية $(u;v)$ من الاعداد الصحيحة بحيث : $87u+31v=1$

(ج) استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة E

(3) لتكن في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $87x+31y=0$ ... E'

(أ) برهن التكافؤ المنطقي التالي : $x;y$ حل للمعادلة E تكافئ $(x-x_0;y-y_0)$ حل للمعادلة E'

(ب) حل المعادلة E'

(ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة E

حل التمرين(9) Amerique du Nord juin 2001

(1) يمكن ان نكتب : $5\times(14n+3)-14\times(5n+1)=70n+15-70n-14=15-14=1$

اذن يوجد عددان صحيحان $u=5$ و $v=-14$ بحيث : $(14n+3)u+(5n+1)v=1$ و منه حسب مبرهنة بيزو فان $14n+3$ و $5n+1$ اوليان فيما بينهما من اجل كل عدد صحيح n

(2)(أ) من اجل $n=6$ نعوض في العددين من السؤال (1) نجد $14n+3=14(6)+3=87$

و $5n+1=5\times6+1=31$ ومنه نستنتج ان العددين 87 و 31 اوليان فيما بينهما

(ب) استنتاج ثنائية $(u;v)$ بحيث : $87u+31v=1$

بما أن 87 و 31 اوليان فيما بينهما فانه حسب السؤال (1) يوجد عددان صحيحان $u=5$ و $v=-14$

يحققان : $87\times5+31\times(-14)=1$ ومنه الثنائية $(u;v)=(5;-14)$ تحقق المطلوب

(ج) استنتاج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة $87x+31y=2$: (E)

بالضرب بـ 2 يمكن ان نكتب : $87\times10+31\times(-28)=2$ اذن الثنائية $(x_0;y_0)=(10;-28)$ حل خاص للمعادلة

(3) (أ) $87x+31y=0$

$(x;y)$ حل للمعادلة E تعني : $87x+31y=2$

ومنه $87x+31y=2$ تكافئ $87(x-x_0)+31(y-y_0)=2-(87x_0+31y_0)$

و $87x_0+31y_0=2$ اذن $2-2=87(x-x_0)+31(y-y_0)$ أي ان

$87(x-x_0)+31(y-y_0)=0$ و هذا يعني $(x-x_0;y-y_0)$ حل للمعادلة E'

(ب) $87x+31y=0$ تعني : $87x=-31y$

وهذه تعني ان 87 يقسم $-31y$ وبما ان 87 و 31 اوليان فيما بينهما فانه جسب مبرهنة غوص 87 يقسم y

لدينا اذن : $y=87k$ و نعوض فنجد : $x=-31k$ حيث k عدد صحيح

اذن حلول المعادلة E' هي : $(-31k;87k)$ حيث : $87(-31k)+31(87k)=0$

(ج) استنتاج حلول المعادلة E

حسب السؤال (3) (أ) فان $(x-x_0;y-y_0)$ حل للمعادلة E' أي $(x-x_0;y-y_0)=(-31k;87k)$

ومنه $x=x_0-31k$ و $y=y_0+87k$ وبالتالي حلول المعادلة E هي : $(-31k+10;87k-28)$

التمرين(10) *Polynésie, juin 2001*

(1) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة المعادلة : (1) . $91x+10y=1$

(أ) بين ان المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا ثم عين حلا خاصا لها عين حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين حلا خاصا للمعادلة : (2) . $91x+10y=412$

(ج) حل المعادلة (2)

(2) بين ان الاعداد $A_n=3^{2n}-1$ تقبل القسمة على 8 حيث n عدد طبيعي

(3) نعتبر المعادلة : (3) $A_3.x+A_2.y=3296$ حيث x و y صحيحان

(أ) عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (3)

(ب) بين ان المعادلة (3) تقبل حلا وحيدا من الاعداد الطبيعية يطلب تعيينه

حل التمرين(10) *Polynésie, juin 2001*

(1)(أ) العددان 91 و 10 أوليان فيما بينهما فحسب مبرهنة بيزو توجد ثنائية من الاعداد الصحيحة $(u;v)$ تحقق: $91.u+10.v=1$ اذن المعادلة تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$

(ب) لدينا $91=9\times10+1$ ومنه $1=91-9\times10$ اذن $91(1)+10(-9)=1$

اذن الثنائية $(1;-9)$ حل خاص للمعادلة (1)

ومنه نجد $(412;-3708)=(412(1);412(-9))$ حلا خاصا للمعادلة (2)

(ج) الثنائية $(412;-3708)$ حل خاص لـ (2) تعني : $91(412)+10(-3708)=412$

و $91x+10y=412$ ومنه $91x+10y=91(412)+10(-3708)$

وبالتالي : $91(x-412)=-10(3708+y)$ ... (1)

10 يقسم الجداء $91(x-412)$ وبما أن 10 أولي مع 91 فانه حسب مبرهنة غوص 10 يقسم $x-412$

أي ان : $x-412=-10k$ ومنه $x=-10k+412$

وبالتعويض في (1) نجد : $91\times(-10k)=10(3708+y)$ اذن : $y=91k-3708$

اذن الحلول للمعادلة (2) هي : $(x;y)=(-10k+412;91k-3708)$

(2) تبيان ان الاعداد $A_n=3^{2n}-1$ تقبل القسمة على 8

لدينا : $3^{2n}=(3^2)^n=9^n\equiv1^n[8]\equiv1[8]$ ومنه $3^{2n}-1\equiv0[8]$

(3) (أ) حل المعادلة $A_3.x+A_2.y=3296$

لدينا $A_3=3^{2\times3}-1=3^6-1=728$ و $A_2=80$ تصبح المعادلة : $728.x+80.y=3296$

بما ان الاعداد 80 و 728 و 3296 قابلة للقسمة على 8 فان : المعادلة تصبح : $91x+10y=412$

اذن حلولها هي حلول المعادلة (2) ومنه $(x;y)=(-10k+412;91k-3708)$

(ب) الحلول ينبغي ان تكون موجبة $x\geq0$ و $y\geq0$ أي : $-10k+412\geq0$ و $91k-3708\geq0$

وبالتالي : $\begin{cases}k\leq41,2\\k\geq3708/91=40,7\end{cases}$ وبالتالي $k=41$

ومنه الحل الوحيد الموجب للمعادلة (3) هو : $(x;y)=(2;23)$

التمرين(11) Pondichéry juin 2002 بتصرف

(1) احسب $PGCD\left((4^6-1),(4^5-1)\right)$ ،

(2) a عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 . p عدد طبيعي .

(أ) . أثبت أنه إذا كان d قاسما للعددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ فإن d يكون قاسما للعدد $a^p(a-1)$.

(ب) . أعط القيم الممكنة لِـ $PGCD(4^{p+1}-1,4^p-1)$.

(3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بِـ : $u_0=0$ و $u_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$.

(أ) . تحقق من أن العددين u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

(ب) . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=4u_n+1$

(ج) . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n هو عدد طبيعي .

(د) . عين من اجل كل عدد طبيعي n : $PGCD\left(u_{n+1}, u_n\right)$. (يمكن استعمال خوارزمية أقليدس) .

(4) نعتبر المتتالية $\left(v_n\right)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بِـ : $v_n = u_n + \frac{1}{3}$.

(أ) . برهن أنّ $\left(v_n\right)$ متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول

(ب) أكتب v_n ثم u_n بدلالة n .

(جـ) . استنتج $PGCD\left(4^{n+1}-1, 4^n-1\right)$ من أجل p عدد طبيعي .

(5) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

(ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0+v_1+.....+v_{3n}$.

(جـ) عين قيم العدد الطبيعي n حيث العدد $9S_n+8n$ يقبل القسمة على 7.

حل التمرين(11) Pondichéry juin 2002

(1) حساب $PGCD\left((4^6-1),(4^5-1)\right)$:

$4^5-1=2^{10}-1=1023$ و $4^6-1=2^{12}-1=4095$

و $1023=3\times11\times31$ و $4095=3^2\times5\times7\times13$ ومنه $PGCD\left((4^6-1),(4^5-1)\right)=3$

(2) a عدد طبيعي غير معدوم ويختلف عن 1 . p عدد طبيعي .

(أ) إذا كان d قاسما للعددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ فإن d يقسم العدد فرقهما أي يقسم

$\left(a^{p+1}-1\right)-\left(a^p-1\right)=a^{p+1}-a^p=a^p\left(a-1\right)$ ومنه d يقسم العدد $a^p\left(a-1\right)$

(ب) القيم الممكنة لِ $PGCD\left(4^{p+1}-1,4^p-1\right)$:

نضع $a=4$ في العددين a^p-1 و $a^{p+1}-1$ نجد: $a^p-1=4^p-1$ و $a^{p+1}-1=4^{p+1}-1$

ونضع $PGCD\left(4^{p+1}-1,4^p-1\right)=d$ اذن $d/4^p-1$ و $d/4^{p+1}-1$ ومنه $d/4^p\left(4-1\right)$ حسب (أ)

اي $d/4^p\times3$ ومنه $(d/3$ او $d/4^p)$ إضافة الى انه يقسم العدد الفردي $4^{p+1}-1$

وبالتالي d لا يقسم 4^p ومنه ينتج $d/3$ ومنه القيم الممكنة لـ d هي : 1 او 3

(3): $u_0=0$ و $u_1=1$ و $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$.

(أ) . التحقق من أن u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما:

بالحساب نجد $u_2=5$ و $u_3=21$ ولضح انهما اوليان فيما بينهما

(ب) . البرهان بالتراجع أن : $u_{n+1}=4u_n+1$

من اجل $n=0$: $u_1=1$ و $u_1=4u_0+1=4(0)+1=1$ اذن محققة

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي $u_{n+2}=4u_{n+1}+1$:

لدينا $u_{n+2}=5u_{n+1}-4u_n$ و لدينا فرضا $u_{n+1}=4u_n+1$ وبالتعويض نجد :

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n = 5(4u_n + 1) - 4u_n = 16u_n + 5$

ولدينا من جهة اخرى $4u_{n+1} + 1 = 4(4u_n + 1) + 1 = 16u_n + 4 + 1 = 16u_n + 5$ ومنه المساواة محققة

اذن الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي

(ج) . برهان أن : u_n هو عدد طبيعي : لدينا $u_{n+1} = 4u_n + 1$ نبرهن ذلك بالتراجع

من اجل $n = 0$ فان : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ عددان طبيعيان

نفرض الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

من الفرض ان u_n هو عدد طبيعي فان $4u_n + 1$ أي u_{n+1} عدد طبيعي ومنه فان u_n هو عدد طبيعي من اجل كل n

(د) . تعيين: $PGCD(u_{n+1}, u_n)$. (يمكن استعمال خوارزمية أقليدس) :

نضع $PGCD(u_{n+1}, u_n) = D$ ومنه $(D/u_n$ و $D/u_{n+1})$ اذن $(D/4u_n$ و $D/u_{n+1})$ ومنه

أي $D/(u_{n+1} - 4u_n)$ أي $D/(4u_n + 1 - 4u_n)$ وبالتالي $D/1$ أي ان $D = 1$

اذن $PGCD(u_{n+1}, u_n) = 1$ اي ان u_{n+1} و u_n اوليان فيما بينهما

(4) (أ) . برهان أنّ (v_n) هندسية حيث $v_n = u_n + \frac{1}{3}$:

$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3}$ ومنه $v_{n+1} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right) = 4v_n$

ومنه (v_n) هندسية اساسها 4 وحدها الاول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

(ب) كتابة v_n ثم u_n بدلالة n :

$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{3} \times 4^n$ و $u_n = v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ اذن $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

(ج) . استنتاج $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$ من أجل n عدد طبيعي :

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$ و $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ و $u_{n+1} = 4u_n + 1$

و منه ينتج $3u_{n+1} = (4^{n+1} - 1)$ و $3u_n = (4^n - 1)$ اذن

وبالتالي : $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = PGCD(3u_{n+1}; 3u_n) = 3 \times PGCD(u_{n+1}; u_n)$

ومن السؤال السابق لدينا $PGCD(u_{n+1}, u_n) = 1$ ومنه $PGCD(4^{n+1} - 1, 4^n - 1) = 3$ حيث n طبيعي

(5) (أ) دراسة بواقي قسمة 4^n على 7 :

$4^0 \equiv 1[7]$ و $4^1 \equiv 4[7]$ و $4^2 \equiv 2[7]$ و $4^3 \equiv 1[7]$

بواقي قسمة 4^n على 7 تشكل متتالية دورية و دورها هو 3 ومنه :

$4^{3k} \equiv 1[7]$ و $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و $4^{3k+2} \equiv 2[7]$

(ب) حساب المجموع S_n : هو مجموع $3n+1$ حد لمتتالية هندسية

$\cdot S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{3n} = v_0 \times \frac{1-q^{3n+1}}{1-q} = \frac{1}{3} \times \frac{1-4^{3n+1}}{1-4} = \frac{1}{9}\left(4^{3n+1}-1\right)$

(جـ) تعيين قيم n بحيث العدد $9S_n + 8n$ يقبل القسمة على 7: معناه $9S_n + 8n \equiv 0[7]$

لدينا $8n \equiv n[7]$ و $9S_n = \left(4^{3n+1}-1\right)$ ومنه $9S_n + 8n \equiv 0[7]$ تعني $4^{3n+1} - 1 + n \equiv 0[7]$

ومن بواقي القسمة لدينا $4^{3n+1} \equiv 4[7]$ وبالتالي نجد $n+3 \equiv 0[7]$ ومنه $n \equiv 4[7]$

اي $n = 7k+4$ حيث k عدد طبيعي

التمرين(12): Polynésie, juin 2002

n عدد طبيعي اكبر او يساوي 2 .

(1) بين ان العددين n و $2n+1$ اوليان فيما بينهما

(2) ليكن العددان α و β حيث : $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$ ونضع $PGCD(\alpha,\beta) = \delta$

(أ) أحسب $2\alpha - \beta$ ثم استنتج القيم الممكنة للعدد δ

(ب) بين ان α و β من مضاعفات 5 اذا وفقط اذا كان $n-2$ مضاعف للعدد 5

(3) نعتبر العددين a و b حيث : $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ و $b = 2n^2 - n - 1$

بين ان العددين a و b يقبلان القسمة على $n-1$

(4) (أ) نضع $d = PGCD(n(n+3);2n+1)$ بين ان δ يقسم العدد d ثم بين ان $\delta = d$

(ب) استنتج القاسم المشترك الأكبر Δ للعددين a و b بدلالة n

(ج) تطبيق : عين Δ من اجل $n = 2001$

عين Δ من اجل $n = 2002$

حل التمرين(12): Polynésie, juin 2002

ـ (1) يمكن ان نكتب : $1\times(2n+1) - 2\times n = 2n+1-2n = 1$ يوجد اذن عددان u و v بحيث :

$u\times(2n+1) + v\times n = 1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو فان العددين n و $2n+1$ اوليان فيما بينهما

(2) (أ) $PGCD(\alpha,\beta) = \delta$ و $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$

$2\alpha - \beta = 2(n+3) - (2n+1) = 5$

وبما ان δ يقسم α و β فان δ يقسم $2\alpha - \beta$ أي يقسم 5 ومنه القيم الممكنة لـ δ هي 1 و 5

(ب) α و β من مضاعفات 5 تعني ($\alpha \equiv 0[5]$ و $\beta \equiv 0[5]$) أي ($n+3 \equiv 0[5]$ و $2n+1 \equiv 0[5]$)

ومنه ($n \equiv 2[5]$ و $2n \equiv 4[5]$) و منه ($n-2 \equiv 0[5]$ و $2n-4 \equiv 0[5]$) أي ان ($n-2 \equiv 0[5]$ و $2(n-2) \equiv 0[5]$) وبالتالي $n-2 \equiv 0[5]$

اذن α و β من مضاعفات 5 اذا وفقط اذا كان $n-2$ مضاعف للعدد 5

(3) $a = n^3 + 2n^2 - 3n$ و $b = 2n^2 - n - 1$

لدينا $a=n(n^2+2n-3)=n(n-1)(n+3)=(n-1)[n(n+3)]$

ونلاحظ أيضا ان العدد 1 جذر لكثير الحدود $2n^2-n-1$ ومنه $b=2n^2-n-1=(n-1)(2n+1)$

وبما ان $n\geq 2$ فان $n(n+3)$ و $2n+1$ عددان طبيعيان

ومنه ينتج ان العددين a و b يقبلان القسمة على $n-1$

(4) (أ) لدينا $PGCD(\alpha,\beta)=\delta$ ومنه δ يقسم $n+3$ وبالتالي يقسم $n(n+3)$

و δ يقسم β أي يقسم $2n+1$ اذن δ هو قاسم مشترك للعددين $n(n+3)$ و $2n+1$

ونعلم ان القواسم المشتركة لعددين هي قواسم القاسم المشترك الأكبر لهما ومنه δ يقسم d

ومن السؤال الأول لدينا $(2n+1)-2.n=1$ (n و $2n+1$ اوليان فيما بينهما) بضرب الطرفين بـ $n+3$

نجد : $n+3=(2n+1)(n+3)-2.n(n+3)$

وبما ان $d=PGCD(n(n+3);2n+1)$ اذن d يقسم $n(n+3)$ ويقسم $2n+1$

ومنه d يقسم $(2n+1)(n+3)-2.n(n+3)$ أي انه قاسم لـ $n+3$

اذن d هو قاسم مشترك لـ $n+3$ و $2n+1$ وبالتالي قاسم مشترك للعددين α و β وهذا يعني d قاسم للقاسم المشترك الأكبر لـ α و β اذن d قاسم لـ δ

وهكذا برهنا ان δ يقسم d و d قاسم لـ δ وبالتالي $\delta=d$

(ب) لدينا
$$\Delta=PGCD(a;b)=PGCD[(n-1)n(n+3);(n-1)(2n+1)]$$
$$=(n-1)PGCD[n(n+3);2n+1]$$

و نعلم $d=PGCD(n(n+3);2n+1)$ ومنه $\Delta=(n-1)d=(n-1)\delta$

– اذا كان $n-2$ مضاعف للعدد 5 . اذن حسب السؤال (2) (ب) العددان α و β مضاعفان لـ 5 ومنه ينتج باستعمال (2) (أ) أن $\delta=5$ اذن : $\Delta=(n-1)5$ (اذا كان $n-2$ مضاعف للعدد 5)

– اذا كان $n-2$ ليس مضاعف للعدد 5 فانه حسب (2) (ب) العددان α و β ليسا مضاعفان لـ 5 ومنه ينتج باستعمال (2) (أ) أن $\delta=1$ اذن : $\Delta=n-1$ (اذا كان $n-2$ ليس مضاعف للعدد 5)

(ج) تطبيقات :

من اجل $n=2001$ فان $n-2=1999$ فهو ليس مضاعف للعدد 5 . اذن $\Delta=2000$

من اجل $n=2002$ فان $n-2=2000$ فهو مضاعف للعدد 5 . اذن

$\Delta=(n-1)5=2001\times5=10005$

ملاحظة : من اجل $n=2001$ لدينا $a=8020008000$ و $b=8006000$ وبينا ان

$PGCD(8020008000;8006000)=2000$

من اجل $n=2002$ لدينا $a=8032034010$ و $b=8014005$ وبينا ان :

$PGCD(8032034010;8014005)=10005$

التمرين(13) *France, juin 2002*

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x+7y=57...(E)$.

(1) (أ)– عيَن الثنائية (u,v) التي تحقق $6u+7v=1$ ،ثمَ استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) .

(ب)- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

(2)- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوي (P) ذي المعادلة $6x+7y+8z-57=0$ ولتكن مجموعة النقط (D) تقاطع (P) مع المستوي $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

بيَن انَه توجد نقطة وحيدة من هذه المجموعة (D) إحداثياتها اعداد طبيعية يطلب تعيينها

(3)- $M(x,y,z)$ نقطة من (P) حيث x ، y ، z اعداد طبيعية .

(أ)بيَن أن y فردي .

(ب)- نضع : $y=2p+1$ حيث p عدد طبيعي .

- بيَن ان باقي قسمة العدد $(p+z)$ على 3 هو 1

(ج)- ليكن q عددا طبيعيا حيث : $3q+1=p+z$.

برهن أنَ : $x+p+4q=7$ ، ثَم استنتج ان القيم الممكنة للعدد q هي 0 و 1

(د)- استنتج كل النقط M من (P) ذات الإحداثيات الطبيعية .

حل التمرين(13) *France, juin 2002*

$$6x+7y=57...(E)$$

(1) (أ)- تعيَين الثنائية (u,v) التي تحقق $6u+7v=1$ ثم استنتاج حلا خاصا للمعادلة (E):

واضح ان $6(-1)+7(1)=1$ ومنه $(-1;1)$ حل خاص ومنه $6(-57)+7(57)=57$ اذن الحل الخاص للمعادلة (E) هو $(x_0,y_0)=(-57,57)$

(ب)- الحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : لدينا $\begin{cases}6x+7y=57\\6(-57)+7(57)=57\end{cases}$ وبالطرح نجد :

$6(x+57)+7(y-57)=0$ ومنه $6(x+57)=7(-y+57)$

$\begin{cases}7/6(x+57)\\PGCD(6,7)=1\end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة غوص $7/(-y+57)$ اذن $x+57=7k$

ومنه $x=7k-57;k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض نجد :

$$6(7k)+7(-y+57)\Rightarrow -y+57=6k\Rightarrow y=-6k+57;k\in\mathbb{Z}$$

$$S=\{(7k-57;-6k+57)\};k\in\mathbb{Z}$$

(2)- تبيان انَه توجد نقطة وحيدة من (D) إحداثياتها اعداد طبيعية :

$M(x,y,z)\in(D)$ تعني $\begin{cases}6x+7y+8z-57=0\\z=0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}6x+7y=57\\z=0\end{cases}$ اذن $\begin{cases}x=7k-57\\y=-6k+57\\z=0\end{cases}$.

$(x,y,z)\in\mathbb{N}^3$ تعني $\begin{cases}x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$ اذن $\begin{cases}7k-57\geq 0\\-6k+57\geq 0\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}k\geq 8,14\\k\leq 9,5\end{cases}$ وبالتالي $k=9$

ومنه النقطة هي $M_9(6;3;0)$

(3) (أ)- بيان أن y فردي :

$M(x,y,z)\in(P)$ تعني $6x+7y+8z-57=0$ وتكتب كما يلي : $7y=57-6x-8z$ ومنه

$7y-1=2(-3x-4z+28)$ وتعني $7y-1$ مضاعف للعدد 2

اي ان $7y-1\equiv 0[2]$ ومنه $y\equiv 1[2]$ وبالتالي y فردي

(ب)− نضع : $y=2p+1$ حيث p عدد طبيعي :

− اثبات ان باقي قسمة العدد $(p+z)$ على 3 هو 1 :

$y=2p+1$ ومنه $6x+7(2p+1)+8z=57$ اي $6x+14p+8z=50$ وتعني $3x+7p+4z=25$

وتكتب $3x+3p+7p+4z=25$ ومنه $3(x+p)+4(p+z)=25$ ويمكن ان نكتب :

$4(p+z)=3(-x-p+8)+1$ اي ان $4(p+z)\equiv 1[3]$ ومنه $(p+z)\equiv 1[3]$

(ج) $3q+1=p+z$ برهان أنّ : $x+p+4q=7$

لدينا $3q+1=p+z$ ومنه $z=3q-p+1$ و $6x+7y+8z=57$ ومنه

$6x+7(2p+1)+8(3q-p+1)=57$ أي ان $6x+6p+24q=42$ اذن $x+p+4q=7$

− استنتاج القيم 0 و 1 العدد q:

$x+p+4q=7$ ومنه $x+p=7-4q$ وبما ان $x+p$ موجب فان القيم الممكنة للعدد q هي 0 و 1

(لانَ x,q,p أعداد طبيعية)

(د)− استنتاج النقط M من (P) ذات الإحداثيات الطبيعية :

$$q=0:\begin{cases}p+z=3(0)+1\\x+p=7-4(0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p+z=1\\x+p=7\end{cases}\Rightarrow p=0 \text{ أو } p=1$$

$$\Rightarrow (x;y;z)=(7;1;1) \text{ أو } (x;y;z)=(6;3;0)$$

$$q=1:\begin{cases}p+z=3(1)+1\\x+p=7-4(1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p+z=4\\x+p=3\end{cases}$$

(حالة مرفوضة $p=4\Rightarrow x=-1$) $p\in\{0;1;2;3\}$ اذن احداثيات النقط هي

$$(x;y;z)\in\{(3;1;4);(2;3;3);(1;5;2);(0;7;1)\}$$

التمرين(14) *Centres étrangers, juin 2002*

نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p .

نعتبر ، في المجموعة $\mathbb{N}^*$، المعادلة (E) ذات المجهولين x و y التالية : $x^2+y^2=p^2$ ...(E) حيث p أولي .

(1) نضع $p=2$ بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا .

(2) نفرض أن $p\neq 2$ و $(x\,;y)$ حل للمعادلة (E) .

(أ) - برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي والآخر فردي.

(ب) - برهن أن p لا يقسم x ولا y.

(ج)- - برهن أن $PGCD\left(x^2,y^2\right)$ يقسم p^2.

(د)- استنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما .

(3) نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p=u^2+v^2$ مع u و v عددين طبيعيين غير معدومين

(أ) . تحقق أن $\left(\left|u^2-v^2\right|;2uv\right)$ هي حل للمعادلة (E) .

(ب) . أعط حلا للمعادلة (E) في حالة $p=5$ ثم في حالة $p=13$.

(4) في كل حالة من الحالتين التاليتين بين أن p ليس مجموع مربعين وأن المعادلة (E) لا تقبل حلولا .

(أ) . $p=3$.　　　　(ب) . $p=7$.

حل التمرين(14) Centres étrangers, juin 2002

(1) $p=2$ المعادلة (E) تصبح $x^2+y^2=4$ و منه $y^2=4-x^2$ و منه $y^2=(2-x)(2+x)$

و عليه $2-x\succ 0$ و $2+x\succ 0$ لان $y\in\mathbb{N}^*$ و منه $x\succ -2$ و $x\in\mathbb{N}^*$ اذن $x=1$.

المعادلة (E) تصبح $y^2=3$ و هذه المعادلة الاخيرة لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^*$ ، و عليه المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}^*$ من اجل $p=2$.

(2) (أ) نفرض $p\neq 2$ و $(x;y)$ حل لـ (E) .

نفرض ان x و y زوجيان أي $x=2k$ و $y=2k'$ حيث $k;\ k'$ عددان طبيعيان ، و منه $4k^2+4k'^2=p^2$

و منه $2\left(2k^2+2k'^2\right)=p^2$ و منه 2 يقسم p^2 و منه 2 يقسم p و هذا تناقض لان p اولي و $p\neq 2$

ومنه العددان x و y لا يمكن ان يكونا زوجيين

نفرض ان x و y فرديان أي $x=2k+1$ و $y=2k'+1$ حيث $k;\ k'$ عددان طبيعيان ،

و منه $x^2+y^2=p^2$ تكافئ $2\left(2k^2+2k+2k'^2+2k'+1\right)=p^2$ و منه 2 يقسم p^2 أي 2 يقسم p

و هذا تناقض لان p اولي و $p\neq 2$ ومنه x و y لا يمكن ان يكونا فرديين

وبالتالي العددان x و y احدهما زوجي والاخر فردي

(ب) نفرض ان p يقسم x و منه $x=pk$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و منه $x^2+y^2=p^2$ تكافئ $y^2=p^2\left(1-k^2\right)$ ،

و $1-k^2 \geq 0$ و منه $1 \geq k$ و عليه $k=0$ او $k=1$

من اجل $k=0$ نجد $x=0$ وهذا مرفوض لان x غير معدوم

و من اجل $k=1$ نجد $y=0$ وهذا ايضا مرفوض لان العددين x و y عددان طبيعيان غير معدومين

و نصل الى نفس النتائج اذا فرضنا ان p يقسم y ، و عليه p لا يقسم x و لا يقسم y .

(ج) نضع $PGCD(x^2;y^2)=d$ ، d/x^2 و d/y^2 ومنه d/x^2+y^2 حيث $x^2+y^2=p^2$

و منه d/p^2 أي ان $d \in \{1;p;p^2\}$.

(د) بما ان p لا يقسم x و لا يقسم y حسب السؤال (2) (ب) فان $d \neq p$ و $d \neq p^2$ ومنه $d=1$

اذن x و y اوليان فيما بينهما .

3) (أ) لدينا $p=u^2+v^2$ و $x^2+y^2=p^2$

$\left(\left|u^2-v^2\right|;2uv\right)$ حل لـ (E) معناه $\left(u^2-v^2\right)^2+(2uv)^2=\left(u^2+v^2\right)^2$ ،

ومنه نجد الطرف الايسر: $u^4+v^4-\left(2u^2v^2\right)+\left(4u^2v^2\right)=u^4+v^4+2u^2v^2$

والطرف الايمن : $\left(u^2+v^2\right)^2=u^4+v^4+2u^2v^2$ ومنه المساواة محققة اذن الثنائية حل للمعادلة

ب) في حالة $p=5$ أي $u^2+v^2=5$ نجد مثلا $(u;v)=(1;2)$ اي $p=1^2+2^2$ و مما سبق نجد

$\left(\left|u^2-v^2\right|;2uv\right)=\left(\left|1^2-2^2\right|;2\times1\times2\right)=(3;4)$ حل لـ (E) ،

و في حالة $p=13$ أي $p=3^2+2^2$ اذن $(5;12)$ حل لـ(E) .

4) (أ) في حالة $p=3$ ، نكتب $u^2+v^2=3$ و منه $u^2=3-v^2$ و منه $v^2 \prec 3$ لان $u^2 \geq 0$

و منه $v^2=1$ و منه $v=1$ او $(v=-1$مرفوض$)$ اذن $u^2=2$ ، لكن 2 ليس مربعا تاما و منه 3 ليس مجموع

مربعين و المعادلة (E) تصبح $x^2+y^2=9$ و منه $y^2=9-x^2=(3-x)(3+x)$

وبما ان $y^2 \succ 0$ فان $x \prec 3$ و $x \neq 0$ أي ان $x=1$ او $x=2$

في حالة $x=1$ نجد $y^2=8$ وهذه ليس لها حل في $\mathbb{N}$

في حالة $x=2$ نجد $y^2=5$ وهذه ليس لها حل في $\mathbb{N}$ وبالتالي المعادلة لا تقبل حلا في حالة $p=3$

(ب) في حالة $p=7$ نكتب $u^2+v^2=7$ ومنه $u^2=7-v^2$ و منه $v^2 \prec 7$ أي $v^2=1$ او $v^2=4$

في حالة $v^2=1$ المعادلة لا تقبل حلا (حالة سابقة)

في حالة $v^2=4$ فان $v=2$ و $u^2=3$ لا تقبل حلا و المعادلة (E) تكتب: $x^2+y^2=49$

اي $y^2=49-x^2$ حيث $x^2 \prec 49$ وهو مربع تام ومنه $x^2 \in \{1;4;9;16;25;36\}$

x^2	1	4	9	16	25	36
$y^2=49-x^2$	48	45	40	33	24	13
	$y \notin \mathbb{N}$	$y \notin \mathbb{N}$	$y \notin \mathbb{N}$	$y \notin \mathbb{N}$	$y \notin \mathbb{N}$	$y \notin \mathbb{N}$

في كل الحالات لا يوجد حل للمعادلة (E) في حالة $p=7$

التمرين(15) *Amérique du Nord juin 2002*

نعتبر (E) مجموعة الاعداد الطبيعية المكتوبة في النظام العشري على الشكل $\overline{abba}$: حيث $a \geq 2$ و b رقم كيفي

امثلة لعناصر المجموعة (E): 2002 , 3773 , 9119

الجزء (I) : عدد عناصر المجموعة (E) التي اصغر عنصر في تحليلها هو العدد 11

(1) (أ) حلل العدد 1001 الى جداء عوامل أولية

(ب)بين ان كل عنصر من (E) هو عدد يقبل القسمة على 11

(2) (أ) ما هو عدد عناصر المجموعة (E) ؟

(ب) ماهو عدد عناصر المجموعة (E) التي لا تقبل القسمة على 2 ولا على 5 ؟

(3) ليكن n عنصرا من (E) يكتب على الشكل $\overline{abba}$

(أ) بين ان العبارة (n يقبل القسمة على 3) تكافئ العبارة ($a+b$ يقبل القسمة على 3)

(ب) بين ان العبارة (n يقبل القسمة على 7) تكافئ (b يقبل القسمة على 7)

(4) استنتج من الأسئلة السابقة عدد عناصر المجموعة (E) التي تقبل العدد 11 كأصغر معامل اولي في تحليلها

الجزء (II): دراسة عناصر المجموعة (E) يعادل سنة كبيسة

لتكن (F) مجموعة العناصر من (E) التي تعادل سنة كبيسة

نقبل انه من اجل كل n من (F) يوجد عددان طبيعيان p و q بحيث : $n=2000+4p$ و $n=2002+11q$

(1) نعتبر المعادلة (e) ... $4p-11q=2$ حيث p و q عددان صحيحان

بين ان الثنائية $(6;2)$ حل للمعادلة (e) ثم حل هذه المعادلة

(2) استنتج ان كل n من (F) يمكن ان يكتب على الشكل $2024+44k$: حيث k عدد صحيح

(3) باستعمال الالة الحاسبة عين اصغر العناصر الستة من (F)

ملاحظة: الاعداد الأولية الأقل من 40 : 2 , 3, 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , 29 , 31 , 37

حل التمرين(15) *Amérique du Nord juin 2002*

(1) (أ) تحليل العدد 1001 : $1001=7\times11\times13$

(ب) تبيان ان كل عنصر من (E) هو عدد يقبل القسمة على 11 :

لدينا $\overline{abba}=a\times10^3+b\times10^2+b\times10+a=1001a+110b=11(7\times13a+10b)$

اذن $\overline{abba}=11(7\times13a+10b)$ وهذا يعني ان كل عنصر من (E) فانه يقبل القسمة على 11

(2) (أ) تعيين عدد عناصر المجموعة (E):

لدينا $2\leq a\prec10$ ومنه a له 8 حالات للاختيار من 2 الى 9

ولدينا أيضا $0\leq b\prec10$ ومنه b له 10 خيارات من 0 الى 9

وحسب مبدأ الجداء (الاختيار المتتالي) لدينا اذن $8\times10\times1\times1=80$ إمكانية للعددين a و b

اذن عدد عناصر المجموعة (E) هو 80

(ب) عدد عناصر المجموعة (E) التي لا تقبل القسمة على 2 ولا على 5 :

العدد $\overline{abba}$ لا يكون قابلا للقسمة على 2 ولا على 5 اذا كان $a\in\{3;7;9\}$

لدينا اذن 3 حالات للعدد a و 10 حالات للعدد b يكون فيها العدد $\overline{abba}$ لا يقبل القسمة على 2 ولا على 5

اذن عدد عناصر المجموعة (E) التي لا تقبل القسمة على 2 ولا على 5 هو $3\times10=30$

(3) العدد $n=\overline{abba}$ يكون قابلا للقسمة على 3 اذا وفقط اذا كان $a+b+b+a$ يقبل القسمة على 3

أي $2(a+b)$ يقبل القسمة على 3 , اذن 3 يقسم $2(a+b)$, وبما ان 3 اولي مع 2 فانه حسب مبرهنة غوص

3 يقسم $(a+b)$

وعكسيا اذا كان 3 يقسم $(a+b)$ فانه يقسم $2(a+b)$ أي ان 3 يقسم $(a+b+b+a)$ أي ان 3 يقسم n

اذن العبارة (n يقبل القسمة على 3) تكافئ العبارة ($a+b$ يقبل القسمة على 3)

(ب) لدينا $n=\overline{abba}=11(7\times13a+10b)$ و $(n$ يقبل القسمة على 7) اذا وفقط اذا كان $11(7\times13a+10b)=7q$ حيث $q\in\mathbb{N}$

وبما ان 7 اولي مع 11 فانه حسب مبرهنة غوص العدد 7 يقسم $7\times13a+10b$

أي ان $7\times13a+10b=7q'$ ومنه $10b=7(q'-13a)$ وهذه تعني 7 يقسم $10b$

وبما ان 7 اولي مع 10 فان 7 يقسم b , اذن (b يقبل القسمة على 7)

وعكسيا اذا كان 7يقسم b فان $b=7k$ و $n=11(7\times13a+10b)$ ومنه $n=11(7\times13a+10\times7k)$

أي ان $n=7\times11(13a+10k)$ وهذا يعني n يقبل القسمة على 7

اذن (n يقبل القسمة على 7) تكافئ (b يقبل القسمة على 7)

(4) استنتاج عدد عناصر (E) التي تقبل العدد 11 كأصغر معامل اولي في تحليلها:

اذا كان اصغر معامل في تحليلها هو 11 هذا يعني ان العدد nيجب ان يكون غير قابل للقسمة على2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 .

اذن من العدد $n=\overline{abba}$ نجد ان $a\in\{3;7;9\}$ و $(a+b)$غير مضاعف للعدد 3 و $b\neq7$

وهكذا نجد :

$3113=11\times283$	$7117=11\times647$	$9119=11\times829$
$3223=11\times293$	$7337=11\times23\times29$	$9229=11\times839$
$3443=11\times313$	$7447=11\times677$	$9449=11\times859$
$3553=11\times17\times19$	$7667=11\times17\times41$	$9559=11^2\times79$
$3883=11\times353$	$7997=11\times727$	$9889=11\times29\times31$

الجزء (II): (F) هي مجموعة العناصر من (E) التي تعادل سنة كبيسة

n عدد طبيعي من (F) ونقبل وجود عددان طبيعيان p و q بحيث : $n=2000+4p$ و $n=2002+11q$

(1) تبيان ان الثنائية $(6;2)$ حل للمعادلة (e) $4p-11q=2...$:

واضح ان $(6;2)$ حل للمعادلة (e) لان : $4(6)-11(2)=2$

ومنه نجد : $\begin{cases}4p-11q=2\\4(6)-11(2)=2\end{cases}$ وبالطرح نجد: $4(p-6)=11(q-2)$

العدد 11 يقسم $4(p-6)$ وبما ان 11 اولي مع 4 فان 11 يقسم $(p-6)$ ومنه $p=6+11k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وبالتعويض نجد $q=2+4k$

اذن مجموعة حلول المعادلة (e) هي : $\{6+11k;2+4k\}$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

(2) استنتج ان كل n من (F) يمكن ان يكتب على الشكل $2024+44k$:

لدينا $n=2000+4p$ و $n=2002+11q$ اي $2002+11q=2000+4p$ اذن $4p-11q=2$

وحلولها هي حلول (e) اي ان $p=6+11k$ ومنه $n=2000+4(6+11k)=2024+44k$

اي $n=2024+44k$ اذن كل عنصر من (F) يكتب على الشكل $n=2024+44k$

(3) اصغر العناصر الستة من (F) : مع العلم ان $n=\overline{abba}$ و يكتب $n=2024+44k$

وبتعويض قيم k وهي $\{2;7;12;17;22;45\}$ نجد قيم n : $\{2112;2332;2552;2772;2992;4004\}$

التمرين(16) Antilles, juin 2003

(1) (أ) احسب $(1+\sqrt{6})^2$ و $(1+\sqrt{6})^4$ و $(1+\sqrt{6})^6$

(ب) بين ان العددين 847 و 342 اوليين فيما بينهما

(2) ليكن العدد الطبيعي غير المعدوم n . نضع a_n و b_n الاعداد الطبيعية حيث : $(1+\sqrt{6})^n=a_n+b_n\sqrt{6}$

(أ) ماهي قيمتي a_1 و b_1 ؟ من خلال السؤال (1) أ– عين قيم أخرى لـ a_n و b_n

(ب) احسب a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n

(ج) برهن انه اذا كان العدد 5 لا يقسم a_n+b_n فان 5 لا يقسم $a_{n+1}+b_{n+1}$

– استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان 5 لا يقسم a_n+b_n

(د) برهن انه اذا كان a_n و b_n اوليان فيما بينهما فان a_{n+1} و b_{n+1} اوليان فيما بينهما

– استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان a_n و b_n اوليان فيما بينهما

حل التمرين(16) Antilles, juin 2003

(1) (أ) الحساب : $(1+\sqrt{6})^2=1+2\sqrt{6}+6=7+2\sqrt{6}$

$$(1+\sqrt{6})^4=(7+2\sqrt{6})^2=73+28\sqrt{6}$$

$$(1+\sqrt{6})^6=(73+28\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})=847+342\sqrt{6}$$

(ب) تبيان ان العددين 847 و 342 اوليين فيما بينهما :

باستعمال القسمة الاقليدية للعددين 847 و 342 نجد :

$847=342\times 2+163\,;342=163\times 2+16\,;163=16\times 10+3\,;16=3\times 5+1$ اخر باقي غير معدوم هو 1

اذن العددان اوليان فيما بينهما

(2) $\left(1+\sqrt{6}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{6}$

(أ) قيمتا a_1 و b_1 نجدها من اجل $n=1$: $\left(1+\sqrt{6}\right)^1=1+\sqrt{6}=a_1+b_1\sqrt{6}$

ومنه $a_1=1, b_1=1$

وبنفس العمل نجد من اجل $n=2$ و $n=3$: $\left(1+\sqrt{6}\right)^2=a_2+b_2\sqrt{6}$ و $\left(1+\sqrt{6}\right)^3=a_3+b_3\sqrt{6}$

ومن السؤال (1) نجد : $a_2=7, b_2=2$ و $a_3=73, b_3=28$ وهكذا …

(ب) حساب a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n:

$$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6}=\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1}=\left(a_n+b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right)=a_n+6b_n+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{6}$$

وبالتالي نجد : $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{6}=a_n+6b_n+\left(a_n+b_n\right)\sqrt{6}$

اذن $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+6b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$

(ج) برهان انه اذا كان 5 لا يقسم a_n+b_n فانه لا يقسم $a_{n+1}+b_{n+1}$:

لدينا : $a_{n+1}+b_{n+1}=2a_n+7b_n=2\left(a_n+b_n\right)+5b_n$

نعلم ان $5b_n$ يقبل القسمة على 5 . فاذا كان 5 لا يقسم a_n+b_n فانه لا يقسم $2\left(a_n+b_n\right)$

وبالتالي لا يقسم $2\left(a_n+b_n\right)+5b_n$ ومنه 5 لا يقسم $a_{n+1}+b_{n+1}$

– الاستنتاج : بالتراجع

من اجل $n=1$: 5 لا يقسم $a_1+b_1=2$ فالخاصية صحيحة من اجل $n=1$

نفرض الخاصية صحيحة من اجل n أي 5 لا يقسم a_n+b_n وبالتالي لا يقسم $2\left(a_n+b_n\right)+5b_n$

وبما ان $a_{n+1}+b_{n+1}=2\left(a_n+b_n\right)+5b_n$ فان 5 لا يقسم $a_{n+1}+b_{n+1}$

(د) برهان انه اذا كان $p\gcd\left(a_n;b_n\right)=1$ فان $p\gcd\left(a_{n+1};b_{n+1}\right)=1$

لدينا $\begin{cases}a_{n+1}=a_n+6b_n\\ b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$ وهذا يكافئ $\begin{cases}a_{n+1}-b_{n+1}=5b_n\\ 6b_{n+1}-a_{n+1}=5a_n\end{cases}$ … (*)

وبما ان a_n و b_n اعداد طبيعية فان $a_{n+1}-b_{n+1}$ و $6b_{n+1}-a_{n+1}$ هي اعداد قابلة للقسمة على 5

اذا كان a_{n+1} و b_{n+1} غير اوليين فيما بينهما فإنه يوجد عدد صحيح k بحيث :

$a_{n+1}=k.\alpha$ و $b_{n+1}=k.\beta$ (بما ان 5 لا يقسم $a_{n+1}+b_{n+1}$ فان $k\neq 5$)

نعوض في العلاقة (*) $\begin{cases}a_{n+1}-b_{n+1}=5b_n\\ 6b_{n+1}-a_{n+1}=5a_n\end{cases}$ نجد : $\begin{cases}5b_n=k\left(\alpha-\beta\right)\\ 5a_n=k\left(6\beta-\alpha\right)\end{cases}$ وهذا يعني ان العددين

a_n و b_n لهما قاسم مشترك هو 5 أي ان 5 يقسم a_n+b_n وهو تناقض مع السؤال (2) (ج)

وبالتالي a_{n+1} و b_{n+1} اوليان فيما بينهما

– الاستنتاج : يمكن ان نثبت بالتراجع ان a_n و b_n اوليان فيما بينهما

من الواضح ان : $a_2=7,\ \ b_2=2$ اوليان فيما بينهما

نفرض ان a_n و b_n اوليان فيما بينهما ونبرهن ان a_{n+1} و b_{n+1} اوليان فيما بينهما

اذا فرضنا d قاسم مشترك للعددين a_{n+1} و b_{n+1} فان d يقسم $a_{n+1}-b_{n+1}$ أي يقسم $5b_n$
وبما ان $d \neq 5$ فان d يقسم b_n ويقسم ايضا $b_{n+1}-b_n = a_n$ أي يقسم a_n أي ان
5 قاسم مشترك لـ a_n و b_n . لكن الفرض a_n و b_n اوليان فيما بينهما اذن حتما $d=1$
أي ان a_{n+1} و b_{n+1} اوليان فيما بينهما

التمرين(17) : *Asie, juin 2003*

(1). (أ) أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ مع $n \in \mathbb{N}$.

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابلا للقسمة على $n+3$.

(ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم .

(2) بيّن أنه ، من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة a ، b و c ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$PGCD(a;b) = PGCD(bc-a;b)$.

(3). بيّن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، تكون المساواة التالية صحيحة :

$PGCD(3n^3-11n;n+3) = PGCD(48;n+3)$

(4). (أ) عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد الطبيعي 48.

(ب) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عددا طبيعيا .

حل التمرين(17) : *Asie, juin 2003*

(1) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48$

$(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-11n+48$.

بما أنّ $3n^2-9n+16$ هو مجموع أعداد صحيحة فإنه يكون عددا صحيحا وبالتالي $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على $n+3$.

ب) مميز كثير الحدود $3x^2-9x+16$ هو $\Delta=-111$ ومعامل x^2 هو 3 (موجب) إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$، $3x^2-9x+16>0$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3n^2-9n+16$ هو عدد صحيح موجب تماما أي هو عدد طبيعي غير معدوم .

(2) نفرض d قاسما للعددين a و b إذن d يقسم bc وبالتالي يقسم $bc-a$ ومنه d قاسم مشترك للعددين b و $bc-a$

عكسيا : نفرض d قاسما للعددين b و $bc-a$ إذن هو قاسم bc و $bc-a$ ومنه d يقسم الفرق $bc-(bc-a)$ أي d يقسم a وبالتالي d قاسم مشترك للعددين a و b.

خلاصة مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة للعددين b و $bc-a$ وبالأخص $p\gcd(a;b) = p\gcd(bc-a;b)$

(3) نستعمل النتيجة السابقة بوضع : $a=48$ ، $b=n+3$ و $c=3n^2-9n+16$

إذن $bc-a=3n^3-11n$ ومنه $p\gcd(48;n+3)=p\gcd(3n^3-11n;n+3)$

(4) (أ) $48=2^4\times 3$ ، مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48 هي : $\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$.

(ب) $A=\dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ ؛ لدينا $n+3>0$ لكي يكون $A\in\mathbb{N}$ يجب أن يكون $3n^3-11n\geq 0$ و $n+3$ يقسم $3n^3-11n$.

$3n^3-11n\geq 0$ معناه $3n\left(n^2-\dfrac{11}{3}\right)\geq 0$ ويكافئ $n=0$ أو $n\geq\sqrt{\dfrac{11}{3}}$

أي $n=0$ أو $n\geq 2$.

$n+3$ يقسم $3n^3-11n$ معناه $p\gcd(3n^3-11n;n+3)=n+3$ ومن **(3)**. ينتج $p\gcd(48;n+3)=n+3$

ويكافئ أنّ $n+3$ يقسم 48 ومعناه $n+3\in\{1;2;3;4;6;8;12;16;24;48\}$

باعتبار $n=0$ أو $n\geq 2$ نجد $n\in\{0;3;5;9;13;21;45\}$

التمرين(18) *Metropole sept 2003*

(1) (أ) عين عددين صحيحين u و v بحيث : $123u+2003v=1$ مع العلم ان 2003 اولي

(ب) استنتج عددا صحيحا k_0 بحيث : $123k_0\equiv 1[2003]$

(ج) بين انه من اجل كل عدد صحيح x : $123x\equiv 456[2003]$ اذا وفقط اذا كان $x\equiv 456k_0[2003]$

(د) عين جميع الاعداد الصحيحة x بحيث : $123x\equiv 456[2003]$

(هـ) بين انه يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث : $1\leq n\leq 2002$ و $123n\equiv 456[2003]$

(2) ليكن a عددا صحيحا حيث : $1\leq a\leq 2002$

(أ) عين $PGCD(a;2003)$

استنتج انه يوجد عدد صحيح m بحيث : $am\equiv 1[2003]$

(ب) بين انه من اجل كل عدد صحيح b فانه يوجد عدد صحيح وحيد x بحيث :
$0\leq x\leq 2002$ و $ax\equiv b[2003]$

حل التمرين(18) *Metropole sept 2003*

(1) (أ) تعيين عددين صحيحين u و v بحيث : $123u+2003v=1$: مع العلم ان 2003 اولي

العددان 123 و 2003 اوليان فيما بينهما ومنه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v يحققان المعادلة

بالقسمات المتتابعة نجد : $2003=123\times 16+35$ و $123=35\times 3+18$ و $35=18\times 1+17$ و

$18=17\times 1+1$

ومنه

$$1=18-17=18-(35-18)=2\times 18-35=$$
$$=2(123-35\times 3)-35=2\times 123-7\times 35=$$
$$=2\times 123-7(2003-123\times 16)=114\times 123-7\times 2003$$

لدينا اذن $u=114$ و $v=-7$ $114\times 123=7\times 2003+1$

(ب) استنتاج عددا صحيحا k_0 بحيث : $123k_0\equiv 1[2003]$:

من السؤال السابق لدينا $114\times123-7\times2003=1$ ومنه $114\times123=7\times2003+1$ أي ان

$114\times123\equiv1[2003]$ أي $123\times114\equiv1[2003]$ ومنه $k_0=114$

(ج) تبيان ان : $123x\equiv456[2003]$ اذا وفقط اذا كان $x\equiv456k_0[2003]$:

– ليكن x عددا صحيحا بحيث $x\equiv456k_0[2003]$ (1) ومن السؤال السابق لدينا $123k_0\equiv1[2003]$

ومن خواص الضرب في الموافقات نجد : $123k_0\times456\equiv1\times456[2003]$ (1)

وبطرح (2) من (1) نجد : $123(x-456k_0)\equiv0[2003]$ وبما ان 123 و 2003 اوليان فيما بينهما فان

$(x-456k_0)\equiv0[2003]$ اذن $x\equiv456k_0[2003]$

– وعكسيا اذا كان $x\equiv456k_0[2003]$ ومن السؤال (ب) لدينا $123k_0\equiv1[2003]$ ومنه

$456\times123k_0\equiv456\times1[2003]$ (أ) لكن $x\equiv456k_0[2003]$ ومنه $123x\equiv123\times456k_0[2003]$ (ب)

اذن بطرح (أ) من (ب) نجد $123x-456\equiv0[2003]$ أي ان $123x\equiv456[2003]$

(د) تعيين جميع الاعداد x بحيث : $123x\equiv456[2003]$:

ومن النتيجة السابقة نجد ان الاعداد التي تحققها هي الاعداد $x\equiv456k_0[2003]$ أي $x\equiv456\times114[2003]$

اذن $x=456\times114+2003k$ حيث k عدد صحيح لكن $456\times114=51984=25\times2003+1909$

اذن $x=1909+2003k'$ حيث k' عدد صحيح

(هـ) تبيان انه يوجد n وحيد بحيث : $1\le n\le2002$ و $123n\equiv456[2003]$:

العدد n هو احد حلول الموافقة السابقة $123x\equiv456[2003]$ فهو اذن من الشكل : $n=1909+2003k'$

مع $1\le1909+2003k'\le2002$ أي $-1908\le2003k'\le93$ وتعني $-\frac{1908}{2003}\le k'\le\frac{93}{2003}$

ومنه القيمة الوحيدة للعدد k' هي 0 وبالتالي $n=1909$

(2) (أ) تعيين $PGCD(a;2003)$ حيث : $1\le a\le2002$

بما ان 2003 عدد اولي فانه أولي مع جميع الاعداد الأقل منه ومنه $PGCD(a;2003)=1$

وبما ان a و 2003 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان m و n بحيث :

$am+2003n=1$

وهذه تعني $am=1+2003(-n)$ أي $am\equiv1[2003]$ ومنه نستنتج انه يوجد m بحيث : $am\equiv1[2003]$

(ب) تبيان انه من اجل كل b فانه يوجد x بحيث : $ax\equiv b[2003]$ و $0\le x\le2002$

لدينا من السؤال السابق $am\equiv1[2003]$ ومنه بضرب الطرفين بالعدد b نجد $b\times am\equiv b[2003]$

فاذا كان $ax\equiv b[2003]$ فاننا نحصل بطرح الموافقتين : $ax-abm\equiv0[2003]$ أي $a(x-bm)\equiv0[2003]$

وهذا يعني $a(x-bm)$ يقبل القسمة على 2003 وبما ان $PGCD(a;2003)=1$ فان 2003 يقسم $(x-bm)$

اذن $(x-bm)\equiv0[2003]$ أي $x\equiv bm[2003]$ و بالقسمة الاقليدية نجد $bm=2003q+r$

حيث $r\prec2003$ اذن $x\equiv r[2003]$ و $r\prec2003$

التمرين(19) France Juin 2004

(1) x عدد طبيعي . برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ،
$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$

(2).(أ)- d و n عددان طبيعيان غير معدومين حيث d يقسم n . $n=dk$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a واكبر من 1، العدد a^d-1 يقسم العدد a^n-1 .

(ب) استنتج أن العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 .

(3) (أ) ليكن العددين الطبيعيين m و n و $d=PGCD\ m;n$ ونضع $m=d.m'$ و $n=d.n'$

بتطبيق مبرهنة بيزو بين انه يوجد عددان صحيحان u و v بحيث : $mu-nv=d$

(ب) نفرض عددين u و v موجبين تماما . بين : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ ثم بين ان a^d-1 هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $a^{mu}-1$ و $a^{nv}-1$

(4)تطبيق. (أ) عين $PGCD(63;60)$.

(ب) بين أن : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$.

(جـ) استنتج أن : $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$.

(د) استنتج قيمة لِـ : $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$.

حل التمرين**(19)** France Juin 2004

(1) بنشر العبارة $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})$ نجد

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=(x+x^2+...+x^k)-(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1$$

إذن : $(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1})=x^k-1.....(*)$

نستنتج أن $(x-1)$ يقسم x^k-1 مع k عدد طبيعي غير معدوم

(2) (أ) برهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، العدد a^d-1 يقسم العدد a^n-1 .

بما أن d يقسم n فإنه يوجد عد طبيعي غير معدوم k حيث $n=kd$ ومنه $a^n-1=a^{kd}-1=(a^d)^k-1$

بوضع $x=a^d$ نجد $a^d-1=x-1$ و $a^n-1=x^k-1$

وحسب (1) فان : $(x-1)$ يقسم x^k-1 ومنه a^d-1 يقسم العدد a^n-1

(ب) . استنتاج أن العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9 .

لدينا من السؤال السابق : العدد a^d-1 يقسم العدد a^n-1 وبوضع $a=2$ و $n=2004$ ولدينا ايضا

$2004=2^2\times3\times167$ ومنه $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على: $2^2-1=3$ و $2^3-1=7$ و $2^4-1=15$

* استنتاج أن العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على على 63

$63=64-1=2^6-1$ و $2^{2004}-1=2^{6(334)}-1$

بوضع $a=2$ و $n=2004$ و $d=6$

بما أن 2004 يقبل القسمة على 6 فإن : $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 2^6-1 أي $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 63

* استنتاج أن العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 9 .

بما أن العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 63 و $63=9\times7$ فإن العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 9

أو : $2^{2004}-1=63k \ / k\in\mathbb{N}^*$ ومنه $2^{2004}-1=9(7k)=9k' \ / k'\in\mathbb{N}^*$ ومنه العدد $2^{2004}-1$ يقبل القسمة على 9

(3) (أ) تنص مبرهنة بيزو ان العددين n' و m' اوليين فيما بينهما اذا وفقط اذا وجد عددان صحيحان u و v بحيث $um'+vn'=1$ او $(um'-vn'=1)$ وبضرب الطرفين بالعدد d نجد : $u.d.m'+v.d.n'=d$

أي ان $um+vn=d$ او $(um-vn=d)$

(ب) اثبات ان : $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d=a^d-1$ $(*)$

بالنشر نجد: $a^{mu}-1-a^{nv+d}+a^d=a^d-1$ وهذا يعني : $a^{mu}-a^{nv+d}=0$ وتعني $a^{mu}=a^{nv+d}$

وبالتالي : $mu=nv+d$ وهذا يعني $mu-nv=d$

بقسمة طرفي العلاقة (*) بالعدد $D=a^d-1$ نجد : $(\frac{a^{mu}-1}{a^d-1})-(\frac{a^{nv}-1}{a^d-1})a^d=1$ وهذا يعني وجود عددين صحيحين بحيث : $1.A-a^d.B=1$ حيث $A=\frac{a^{mu}-1}{a^d-1}$ و $B=\frac{a^{nv}-1}{a^d-1}$

وهذا يعني ان العددين A و B أوليان فيما بينهما وان $D=a^d-1$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين : $a^{mu}-1$ و $a^{nv}-1$

(4). أ . تعيين $PGCD(63;60)$.

$PGCD(63;60)=PGCD(60;3)=3$ لأن 3 تقسم 60

(ب) تبيان أن : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^3-1$

بالنشر : $(a^{63}-1)-(a^{60}-1)a^3=a^{63}-1-a^{63}+a^3=a^3-1$

(ج) . برهان أن : $PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=a^3-1$.

$PGCD(a^{63}-1;a^{60}-1)=PGCD(a^{60}-1;a^3-1)=a^3-1$ لأن : a^3-1 يقسم $a^{60}-1$

(د) استنتاج القيمة لِ : $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)$.

بتعويض $a=2$ نجد : $PGCD(2^{63}-1;2^{60}-1)=2^3-1=7$

التمرين(20): *Asie juin 2004*

a عدد طبيعي غير معدوم .

نسمى (E) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكتب على الشكل $9+a^2$. مثلا : $10=9+1^2$, $13=9+2^2$ ...

(1) دراسة المعادلة ذات المجهول العدد الطبيعي a التالية : $a^2+9=2^n$ حيث $n\geq 4$

(أ) - برهن أنه إذا قبلت المعادلة حلا a فإن a يكون فرديا.

(ب) - باستعمال الموافقة بترديد 4 برهن أن المعادلة لا تقبل حلا.

(2) دراسة المعادلة ذات المجهول الطبيعي a التالية : $a^2+9=3^n$ حيث $n\geq 3$

(أ) - برهن أنه اذا كان $n\geq 3$ فان 3^n يوافق 1 او 3 بترديد 4

(ب) - برهن أنه إذا قبلت المعادلة حلا a فإن a يكون زوجيا ؛ واستنتج أن n يكون كذلك زوجيا .

(ج) - نضع $n=2p$ حيث $p\geq 2$ حلل العدد 3^n-a^2 ثم استنتج أن المعادلة لا تقبل حلا.

(3) دراسة المعادلة ذات المجهول الطبيعي a التالية : $a^2+9=5^n$ حيث $n\geq 2$

(أ) . باستعمال الموافقة بترديد 3برهن أنه إذا كان n فرديا فإن المعادلة لا تقبل حلا.

(ب) نضع $n=2p$ ، برهن كما في السؤال (2)(ج) أنه يوجد عدد طبيعي وحيد a الذي يكون من أجله العدد a^2+9 من قوى العدد 5 .

حل التمرين(20) : *Asie juin 2004*

(1) (أ) - برهان أنه إذا قبلت المعادلة $a^2+9=2^n$ حلا a فإن a يكون فرديا حيث $n\geq 4$

نفرض a زوجي ومنه $a^2+9=2^n$ تعني $9=2^n-a^2$ وهذه المعادلة لا يمكن ان تتحقق لان الفرق بين زوجيين هو عدد زوجي وبالتالي اذا وجد a يجب ان يكون فرديا

(ب) برهان أن المعادلة لا تقبل حلا:

بما ان a يجب ان يكون فرديا نضع $a=2k+1$ اذن $a^2+9=2^n$ تكافئ $4k^2+4k+10=2^n$

ولدينا $4k^2+4k+10\equiv 2[4]$ و $2^n\equiv 0[4]$ لان $n\geq 4$ اذن $4k^2+4k+10$ و 2^n غير متوافقان بترديد4

اذن لا يوجد حل للمعادلة $a^2+9=2^n$

(2) $a^2+9=3^n$

(أ) - برهان أنه اذا كان $n\geq 3$ فان 3^n يوافق 1 او 3 بترديد 4 :

من اجل $n\geq 3$ $3\equiv -1[4]$ ومنه $3^n\equiv(-1)^n[4]$

اذا كان n زوجيا فان $3^n\equiv 1[4]$ واذا كان n فرديا فان $3^n\equiv -1[4]$ أي ان $3^n\equiv 3[4]$

(ب) - برهان أن اذا كانت $a^2+9=3^n$ تقبل حلا a فإن a يكون زوجيا :

اذا كان a فرديا فان مربعه ايضا فردي ومنه a^2+9 زوجي (مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي)

لكن 3^n عدد فردي من اجل كل عدد n , فهذا تناقض , ومنه اذا وجد حل للمعادلة $a^2+9=3^n$ فانه زوجي

– بما ان a يكون زوجيا فانه يكتب على الشكل $a=2p$ حيث p طبيعي ومنه $a^2=4p^2$

أي ان $a^2\equiv 0[4]$ و منه $a^2+9\equiv 9[4]$ أي $a^2+9\equiv 1[4]$

لكن $a^2+9=3^n$ أي ان $3^n\equiv 1[4]$ لكن هذه الموافقة لا يمكن ان تكون صحيحة الا اذا كان n زوجيا

الخلاصة : اذا كان $a^2+9=3^n$ فان nيجب ان يكون زوجيا .

(جـ) - تحليل العدد 3^n-a^2 حيث $n=2p$ و $p\geq 2$: $a^2+9=3^n$ تعني $9=3^n-a^2$

$$3^n-a^2=3^{2p}-a^2=\left(3^p\right)^2-a^2=\left(3^p-a\right)\left(3^p+a\right)=9$$

قواسم العدد 9 هي : 1 و 3 و 9 ومنه توجد امكانيتان فقط وهي :

(*) $\begin{cases}3^p+a=3\\3^p-a=3\end{cases}$ وبما ان $a\neq 0$ و $3^p+a\succ 3^p-a$ فهذه لا تقبل حلولا

(*) $\begin{cases}3^p+a=9\\3^p-a=1\end{cases}$ وبالجمع نجد : $2\times 3^p=10$ أي $3^p=5$ وهذه لا تقبل حلا لان العدد 5 ليس قوة للعدد 3

خلاصة : المعادلة $a^2+9=3^n$ لا تقبل حلا

(3)(أ)برهان أنه إذا كان n فرديا فإن المعادلة $a^2+9=5^n$ لا تقبل حلا حيث $n\geq 2$

باستعمال الموافقة بترديد 3 : نفرض ان n فردي أي $n=2k+1$ ومنه $5^n=5^{2k+1}=5^{2k}\times 5$

وبما ان $5\equiv 2[3]$ و $5^2\equiv 2^2[3]$ أي $5^2\equiv 1[3]$ فان $(5^2)^k\equiv 1[3]$ اذن $5^n\equiv 2[3]$

اذن اذا وجد حل a فان $5^n\equiv 2[3]$ أي $a^2+9\equiv 2[3]$

وبما ان $a\equiv 0[3]$ او $a\equiv 1[3]$ او $a\equiv 2[3]$ فان مربعه يكون يوافق 0 او 1 بترديد 3

وبما ان $9\equiv 0[3]$ فان($a^2+9\equiv 0[3]$ او $a^2+9\equiv 1[3]$) لكن $5^n\equiv 2[3]$

اذن المقداران a^2+9 و 5^n غير متساويين

خلاصة: اذا كان n فرديا فإن المعادلة $a^2+9=5^n$ لا تقبل حلا

(ب) نضع $n=2k$ ونبرهن أنه يوجد عدد طبيعي وحيد a الذي يكون من أجله العدد $a^2+9=5^n$:

المعادلة $a^2+9=5^n$ تكتب $5^{2k}-a^2=9$ أي $(5^k-a)(5^k+a)=9$ ومنه توجد امكانيتان

$(*)\begin{cases}5^k+a=3\\5^k-a=3\end{cases}$ وهذه لا تقبل حلا لان $a\neq 0$ و $5^k+a\succ 5^k-a$

$(*)\begin{cases}5^k+a=9\\5^k-a=1\end{cases}$ وبالجمع نجد : $2\times 5^k=10$ أي $5^k=5$ ومنه $k=1$ وبالتالي $a=4$

خلاصة : المعادلة $a^2+9=5^n$ تقبل حلا وحيدا $a=4$ من اجل كل $n\geq 2$

التمرين(21) *Antilles, sept 2004*

اذكر صحة أو خطأ الجمل التالية مع التبرير

(1) القاسم المشترك الأكبر للعددين 2004 و 4002 هو 6

(2) اذا كان p و q عددين طبيعيين غير معدومين فان $2^{pq}-1$ يقبل القسمة على 2^p-1 و على 2^q-1

(3)من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فان 2^n-1 لا يمكن ابدا ان يكون قابلا القسمة على 9

(4)مجموعة الحلول في Z للمعادلة $24x+35y=9$ هي الثنائيات : $(-144+70k;\ 99-24k)$ $k\in\mathbb{Z}$

حل التمرين(21) *Antilles, sept 2004*

(1) صحيحة لان :

$4002=2004\times 1+1998$ و $2004=1998\times 1+6$ اخر باقي غير معدوم هو 6

(2) صحيحة :

$2^{pq}-1=\left(2^p\right)^q-1=\left(2^q\right)^p-1$ و نعلم ان : $a^m-1=(a-1)\left(a^{m-1}+a^{m-2}+...+1\right)$

اذن $2^{pq}-1=\left(2^p\right)^q-1=\left(2^p-1\right)\left(\left(2^p\right)^{q-1}+\left(2^p\right)^{q-2}+...+\left(2^p\right)^1+1\right)$

اذن $2^{pq}-1$ يقبل القسمة على 2^p-1

وبنفس التحليل نجد : $2^{pq}-1=\left(2^q\right)^p-1=\left(2^q-1\right)\left(\left(2^q\right)^{p-1}+\left(2^q\right)^{p-2}+...+\left(2^q\right)^1+1\right)$

اذن $2^{pq}-1$ يقبل القسمة على 2^q-1

(3) خاطئة لانه من اجل $n=6$ فان : $2^6-1=63$ و 63 يقبل القسمة على 9

(4) خاطئة .

الثنائية $(-144;\ 99)$ حل خاص للمعادلة لان: $24(-144)+35(99)=9$

ومنه $24x+35y=24(-144)+35(99)$ أي $24(x+144)=35(99-y)$

35 يقسم $24(x+144)$ وبما انه اولي مع 24 فان 35 يقسم $x+144$ أي ان $x+144=35k$

اذن $x=35k-144$ و بالتعويض نجد : $24k=(99-y)$

اذن الحلول هي : $(x;y)=(-144+35k;\ 99-24k)$

التمرين(22) Nelle-Calédonie, Nov 2004

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

(1)(أ). برهن أنّه إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث $au+bv=1$ فإنّ a و b أوّليان فيما بينهما .

(ب). استنتج أنه إذا كان $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ ، فإنّ a و b أوّليان فيما بينهما .

(2). نريد تعيين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية غير المعدومة حيث $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$.

كل ثنائية $(a;b)$ تحقق الشرط تسمى حلا .

(أ) عين a عندما يكون $b=a$.

(ب) تحقق من أنّ $(1;1)$ ، $(2;3)$ و $(5;8)$ هي ثلاث حلول خاصة .

ج) بيّن أنّه إذا كانت $(a;b)$ حلا وإذا كان $a\prec b$ فإن $a^2-b^2<0$.

(3). (أ) بيّن أنّه إذا كانت $(x;y)$ حلا يختلف عن $(1;1)$ فإنّ $(y-x;x)$ و $(y;y+x)$ هما كذلك حلان.

ب) استنتج من **(2)**.**(ب)** ثلاث حلول أخرى .

(4). نعتبر المتتالية (a_n) حدودها أعداد طبيعية غير معدومة والمعرفة بِ : $a_0=a_1=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. (تسمى هذه المتتالية , متتالية فيبوناكشي)(Fibonacci)

– برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(a_n;a_{n+1})$ هي حل .

– استنتج أنّ العددين a_n و a_{n+1} أوّليان فيما بينهما .

حل التمرين(22) Nelle-Calédonie, Nov 2004

(1)(أ) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b الصحيحين غير المعدومين

ومنه فان d يقسم كل مضاعفات a أي يقسم na و يقسم كل مضاعفات b أي يقسم mb

وبالتالي يقسم $na+mb$ ومنه على الخصوص يقسم $au+bv$ وبما ان $au+bv=1$ أي ان d يقسم 1

وبالتالي : $d=1$ وهذا يعني a و b أوّليان فيما بينهما

(ب) العبارة $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ تعني $\begin{cases} a^2+ab-b^2=1 \\ a^2+ab-b^2=-1 \end{cases}$ وهذي يعني :

$\begin{cases} a(a+b)-b\times b=1 \\ b(b-a)-a\times a=1 \end{cases}$ وفي الحالتين يمكن ان نكتب : $au+bv=1$

في الحالة الأولى : $u=a+v,\ \ v=-b$ وفي الحالة الثانية $u=b-a,\ \ v=-a$

وهذا يعني ان العددين a و b أوّليان فيما بينهما .

(2) تعيين الثنائيات $(a;b)$ حيث $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$:

(أ) في حالة $b=a$ فان $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=\left(a^2+a^2-a^2\right)^2=1$ أي ان $a^4=1$

ومنه $a=1$ لان a موجب

(ب) التحقق أنّ $(1;1)$ ، $(2;3)$ و $(5;8)$ هي حلول : نعوض فنجد :

واضح ان $(1;1)$ حل حسب (أ) $b=a=1$

وفي حالة $(2;3)$ نجد : $\left(2^2+2.3-3^2\right)^2=1$

في حالة $(5;8)$ نجد : $\left(5^2+5.8-8^2\right)^2=(25+40-64)^2=1$

(ج) تبيان أنّه إذا كانت $(a;b)$ حلا وإذا كان $a\prec b$ فإن $a^2-b^2<0$:

لدينا $a^2+ab-b^2=1$ فاذا كان $a^2-b^2>0$ فان a^2+ab-b^2 لا يمكن ان يكون مساويا 1

وأيضا لا يمكن ان يكون a^2+ab-b^2 مساويا لـ -1 لانه سيكون في هذه الحالة موجبا تماما

اذن في كل الحالات $a^2-b^2<0$

طريقة أخرى: اذا كان $a\prec b$ فان $a-b\prec 0$ وبما ان a و b موجبان فان $a+b$ موجب

وبالتالي : $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\prec 0$

(3). (أ) تبيان أنّه إذا كانت $(x;y)$ حلا يختلف عن $(1;1)$ فإنّ $(y-x;x)$ حلا.

$(x;y)$حل معناه : $\left(x^2+xy-y^2\right)^2=1$ أي ان : $x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y-2x^2y^2-2xy^3=1$

و $(y-x;x)$ حل فنعوض في المعادلة $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ نجد :

$$\left((y-x)^2+(y-x)x-x^2\right)^2=\left(y^2-2xy+x^2+xy-x^2-x^2\right)^2=\left(y^2-xy-x^2\right)^2=1$$

و منه $\left(y^2-xy-x^2\right)^2=\left(-\left(-y^2+xy+x^2\right)\right)^2=\left(x^2+xy-y^2\right)^2=1$

وبنفس الحساب نجد $(y;y+x)$ هي أيضا حل

ب) استنتاج ثلاث حلول أخرى:

بما أنّ $(2;3)$ هي حل فانه حسب السؤال (أ) الثنائيات:

$(3-2;2)=(1;2)$ حل و $(3;3+2)=(3;5)$ حل

وبما ان $(5;8)$ حل فان الثنائيات $(8-5;5)=(3;5)$ حل و $(8;5+8)=(8;13)$حل

اذن الحلول الجديدة هي : $(1;2)$ و $(3;5)$ و $(8;13)$

(4) (a_n) حدودها طبيعية غير معدومة و: $a_0=a_1=1$ و ، $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

برهان أنّ الثنائية $(a_n;a_{n+1})$ هي حل لـ: $(a^2+ab-b^2)^2=1$

نبرهن ذلك بالتراجع : لدينا $a_0=a_1=1$ و $a_{0+1}=1$ و $a_0=1$ والثنائية $(1;1)$ حل حسب (أ)

اذن الخاصية صحيحة من اجل 0

نفرض $(a_n;a_{n+1})$ حلا , ومنه حسب (3) (أ) $(y;y+x)=(a_{n+1};a_n+a_{n+1})=(a_{n+1};a_{n+2})$ هي أيضا حل

اذن الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

– استنتاج أنّ العددين a_n و a_{n+1} أوّليان فيما بينهما :

من السؤال(1)(ب) برهنا انه اذا كانت $(a;b)$ حلا فان العددين a و b اوليين فيما بينهما وبما ان الثنائية $(a_n;a_{n+1})$ حلا للمعادلة فانه ينتج ان a_n و a_{n+1} أوّليان فيما بينهما

ملاحظة : يمكن البرهان عليها بالتراجع .

التمرين(23) *QCM, France sept. 2005*

اختر الجواب الصحيح من بين الاجوبة الاربعة المقترحة

(1) نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة المعادلة : $x^2-x+4\equiv 0[6]$

(أ) كل حلول المعادلة هي اعداد زوجية

(ب) لا تقبل أي حل

(ج) الحلول تحقق : $x\equiv 2[6]$

(د) الحلول تحقق : $x\equiv 2[6]$ أو $x\equiv 5[6]$

(2) نريد حل المعادلة : $24x+34y=2$ ....(E) حيث x و y عددان صحيحان

(أ) كل حلول المعادلة (E) هي من الشكل : $(x;y)=(34k-7;5-24k)$ و k عدد صحيح

(ب) المعادلة (E) لا تقبل أي حل .

(ج) حلول المعادلة (E) هي من الشكل : $(x;y)=(17k-7;5-12k)$ و k عدد صحيح

(د) حلول المعادلة (E) هي من الشكل : $(x;y)=(-7k;5k)$ و k عدد صحيح

(3) نعتبر العددين $n=1789$ و $p=1789^{2005}$ لدينا اذن:

(أ) $n\equiv 4[17]$ و $p\equiv 0[17]$ (ب) العدد p أولي (ج) $p\equiv 4[17]$ (د) $p\equiv 1[17]$

حل التمرين(23) *QCM, France sept. 2005*

(1) الجواب الصحيح هو (د)

– اذا كان $x\equiv 2[6]$ فان $x^2\equiv 4[6]$ ومنه : $x^2-x+4\equiv 4-2+4[6]\equiv 6[6]\equiv 0[6]$ اذن صحيحة

– اذا كان $x\equiv 5[6]$ فان $x^2\equiv 1[6]$ ومنه $x^2-x+4\equiv 25-5+4[6]\equiv 24[6]\equiv 0[6]$ اذن صحيحة

(2) نختصر المعادلة على 2 نجد : $12x+17y=1$ وهذه المعادلة تقبل دائما حلولا لان العددين 12 و 17 أوليان فيما بينهما حسب مبرهنة غوص أي يوجد عددان صحيحان u و v يحققان $12u+17v=1$

ومنه الجواب (ب) خاطئ

ولايجاد حلا خاصا فان الجواب (ج) يعطينا فكرة وهي ان الثنائية $(-7,5)$ تحقق المطلوب :

$12\times-7+17\times5=1$

ولايجاد الحلول نتبع نفس الطرق المتبعة : $12x+17y=1$ و $12\times-7+17\times5=1$

ومنه : $12x+17y=12\times-7+17\times5$ اذن $12(x+7)=17(5-y)$

17 يقسم الجداء $12(x+7)$ وبما انه اولي مع 12 فانه حسب مبرهنة بيزو العدد 17 يقسم $x+7$ أي ان

$x+7=17k$ وبالتالي : $x=-7+17k$ وبالتعويض نجد : $y=5-12k$

اذن الجواب الصحيح هو (ج)

(3) الجواب الصحيح هو (ج)

لدينا : $1789=17\times105+4$ ومنه $1789\equiv4[17]$ و $2005=2\times1002+1$

$1789^{2005}\equiv4^{2005}[17]$ أي $1789^{2005}\equiv4^{2\times1002+1}[17]$ و $4^2=16\equiv-1[17]$

$4^{2\times1002+1}=(16)^{1002}\times4\equiv(-1)^{1002}\times4[17]\equiv4[17]$ اذن $p\equiv4[17]$

التمرين(24) *Polynésie, juin 2005*

نعتبرالمتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=14$ و من اجل كل طبيعي n : $u_{n+1}=5u_n-6$

(1) (أ) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

(ب) ماذا يمكن الاستنتاج بالنسبة للرقمين الأخيرين للحد u_n ؟

(2)- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2}\equiv u_n[4]$

– استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي k : $u_{2k}\equiv2[4]$ و $u_{2k+1}\equiv0[4]$

(3) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n :. $2u_n=5^{n+2}+3$

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2u_n\equiv28[100]$

(4) عين الرقمين الأخيرين في النظام ذا الأساس 10 (الكتابة العشرية) لـ u_n وذلك حسب قيم n

(5) بين ان القاسم المشترك الأكبر لحدين متتابعين للمتتالية (u_n) هو عدد ثابت ، عين قيمته

حل التمرين(24) *Polynésie, juin 2005*

(1) (أ)حساب الحدود : $u_1=64$ ، $u_2=314$ ، $u_3=1564$ و $u_4=7814$

(ب) يمكن القول ان : $u_{2k}=\ldots14$ و $u_{2k+1}=\ldots64$ الرقمين الأخيرين اما 14 او 64

(2) اثبات ان : $u_{n+2}\equiv u_n[4]$

لدينا : $u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6=25u_n-36$ ونعلم ان $25\equiv1[4]$ و $36\equiv0[4]$

ومنه $24u_n-36\equiv 0[4]$ يمكن ان تكتب : $u_{n+2}\equiv(u_n+24u_n-36)[4]\equiv(u_n+0)[4]\equiv u_n[4]$

ومنه $u_{n+2}\equiv u_n[4]$

– استنتاج بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي k : $u_{2k}\equiv 2[4]$ و $u_{2k+1}\equiv 0[4]$

من اجل $k=0$ فان : $u_0\equiv 2[4]$ ونعلم ان $u_0=14$ أي $u_0\equiv 2[4]$ اذن صحيحة

نفرض انها صحيحة من اجل k ونبرهن انها صحيحة من اجل $k+1$ أي نبرهن ان $u_{2(k+1)}\equiv 2[4]$

من الفرض: $u_{2k}\equiv 2[4]$ و $u_{2(k+1)}=u_{2k+2}\equiv u_{2k}[4]$ (حسب (2)) ومنه $u_{2(k+1)}\equiv 2[4]$ اذن محققة من اجل كل k

اذن $u_{2k}\equiv 2[4]$

و بنفس العمل نبرهن ان $u_{2k+1}\equiv 0[4]$. من اجل $k=0$ محققة لان $u_1=64\equiv 0[4]$

ومنه $u_{2k+1}\equiv u_1[4]$ وبالتالي من اجل كل k فان $u_{2k+1}\equiv 0[4]$

(3) (أ) البرهان بالتراجع ان $2u_n=5^{n+2}+3.$

من اجل $n=0$: $2u_0=5^2+3=28$ و نعلم $u_0=14$ اذن $2u_0=28$ محققة

نفرض انها صحيحة من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$ أي نبرهن ان : $2u_{n+1}=5^{n+3}+3.$

لدينا $2u_n=5^{n+2}+3.$ وحيث ان $u_{n+1}=5u_n-6$

و $2u_{n+1}=2(5u_n-6)=5\times 2u_n-12=5(5^{n+2}+3)-12=5^{n+3}+15-12=5^{n+3}+3$

اذن $2u_{n+1}=5^{n+3}+3.$ وبالتالي الخاصية محققة من اجل كل عدد طبيعي أي $2u_n=5^{n+2}+3.$

(ب) استنتاج ان : $2u_n\equiv 28[100]$

لدينا : $2u_n=5^{n+2}+3$ ونعلم ان $5\equiv 1[4]$ وبالتالي $5^n\equiv 1[4]$ ومنه $5^{n+2}\equiv 25[100]$

وبالتالي $5^{n+2}+3\equiv 25+3[100]$ اذن $2u_n\equiv 28[100]$

(4) تعيين الرقمين الأخيرين لـ u_n :

من العلاقة الأخيرة $2u_n\equiv 28[100]$ نجد : $u_n\equiv 14[50]$ ومنه $u_n=14+50m\,,\ m\in\mathbb{Z}$

وبما ان $u_{2k}\equiv 2[4]$ و $14\equiv 2[4]$ ينبغي ان يكون $50m\equiv 0[4]$

اذن اذا كان k زوجي فان $u_k\equiv 14[100]$ و اذا كان k فردي $u_k\equiv 14+50[100]\equiv 64[100]$

أي ان الرقمين الأخيرين هما : 14 في حالة k زوجي و 64 في حالة k فردي

(5) القاسم المشترك الأكبر لحدين متتابعين للمتتالية (u_n)

نلاحظ ان $PGCD(u_0;u_1)=PGCD(14;64)=2$ وبالتالي يجب برهان ان $PGCD(u_{n+1};u_n)=2$

لدينا من العلاقة $u_{n+1}=5u_n-6$ ان $5u_n-u_{n+1}=6$

فاذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر لـ u_n و u_{n+1} فانه يقسم الفرق $5u_n-u_{n+1}$ أي ان d هو احد قواسم العدد 6

ونعلم ان $2u_n=5^{n+2}+3$ وبما ان 3 يقسم 3 ولا يقسم 5 فانه لا يمكن ان يكون قاسما لـ $2u_n=5^{n+2}+3$

وبالتالي $PGCD(u_{n+1};u_n)=2$

التمرين(25) : *Liban, juin 2005*

(1). نعتبر المعادلة (E) : $109x-226y=1$ حيث x و y عددان صحيحان .

(أ) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 . ماذا يمكن استنتاجه فيما يخص المعادلة (E) ؟

(ب) برهن أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي الثنائيات من الشكل $(141+226k;68+109k)$ حيث k صحيح .

(جـ) استنتج أنه يوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم d أصغر من أو يساوي 226 ؛ ويوجد عدد طبيعي وحيد غير معدوم e يحقق $109d=1+226e$ (يطلب تعيين قيمتي d و e).

(2) برهن أن 227 عدد أوّلي .

3. نسمي A مجموعة الأعداد الطبيعية a حيث $a\le 226$. نعتبر الدالتين f و g للمجموعة A في نفسها .

f ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{109} على 227 ؛ g ترفق بكل عدد a، باقي قسمة a^{141} على 227 .

أ) تحقق من أنّ $g[f(0)]=0$.

ب) برهن أنه من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $a^{226}\equiv 1[227]$.

جـ) استنتج من (1)(ب) أنه من أجل كل $a\in A-\{0\}$ ، $g[f(a)]=a$. ما القول عن $f[g(a)]=a$ ؟

حل التمرين(25) : Liban, juin 2005

(1). (أ) باستعمال خوارزمية أقليدس نحصل على $p\gcd(226,109)=1$.

حسب مبرهنة بيزو يوجد على الأقل عددان صحيحان x و y يحققان (E)

(ب) نخمن من الثنائية $(141+226k;68+109k)$ أن $(141,68)$ حل خاص للمعادلة (E) وبالتحقيق نجد $109\times141-226\times68=1$. ومنه $109x-226y=109\times141-226\times68$ أي $109(x-141)=226(y-68)$ نسميها (E') . 226 يقسم $109(x-141)$ و $p\gcd(226,109)=1$ إذن حسب غوص 226 يقسم $(x-141)$ أي $x-141=226k$ مع $k\in\mathbb{Z}$ وبالتعويض في (E') نجد $y-68=109k$ إذن $x=226k+141$ و $y=109k+68$ مع $k\in\mathbb{Z}$. وعكسيا بالتعويض $(141+226k;68+109k)$ في (E) نجد $109(141+226k)-226(68+109k)=1$.

(جـ) $109d=1+226e$ معناه $109d-226e=1$. ومما سبق ينتج أن

$d=226k+141$ و $e=109k+68$ وبما أن $0<d\le 226$ معناه $0<226k+141\le 226$ فنجد $k=0$ أي $d=141$ و $e=68$.

(2). $\sqrt{227}\approx 15,07$ والقواسم الأولية التي تكون أصغر من $\sqrt{227}$ هي 2 ، 3، 5، 7، 11، 13 والعدد 227 لا يقبل القسمة على أي منها إذن 227 أوّلي

(3)(أ) $0^{109}\equiv 0[227]$ إذن $f(0)=0$ ومنه $[f(0)]^{141}=0$ إذن $[f(0)]^{141}\equiv 0[227]$ أي $g[f(0)]=0$

(ب) لكي نطبق المبرهنة الصغيرة لِ فيرما يجب البرهان على الشرط أن a لا يقبل القسمة على العدد الأولي 227 .

227 عدد أولي إذن هو أوّلي مع كل a حيث $0<a<227$ ومنه a لا يقبل القسمة على 227 وحسب المبرهنة الصغيرة لفرما $a^{226}\equiv 1[227]$.

(جـ) من أجل كل $a \in A-\{0\}$ ، $g\left[f\left(a\right)\right] \equiv \left[f\left(a\right)\right]^{141}[227]$ بما أن $f\left(a\right) \equiv a^{109}[227]$ فإن
$\left[f\left(a\right)\right]^{141} \equiv \left(a^{109}\right)^{141}[227]$ إذن $g\left[f\left(a\right)\right] \equiv a^{109\times141}[227]$ وحسب **1**. ب) $109\times141 = 1+226\times68$ ومنه
$a^{109\times141} = a\left(a^{226}\right)^{68}$ بما أن $a^{226} \equiv 1[227]$ فإن $\left(a^{226}\right)^{68} \equiv 1[227]$ ومنه $a\left(a^{226}\right)^{68} \equiv a[227]$ إذن
$g\left[f\left(a\right)\right] \equiv a[227]$

وبالمثل $f\left[g\left(a\right)\right] \equiv \left[g\left(a\right)\right]^{109}[227]$ أي $f\left[g\left(a\right)\right] \equiv \left(a^{141}\right)^{109}[227]$ ومنه $f\left[g\left(a\right)\right] \equiv a[227]$

التمرين(26) : Antilles, juin 2005

(1) أ . عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الأقليدية للعدد 7^n على 9 .

ب . برهن إذن $2005^{2005} \equiv 7[9]$.

(2). أ . برّر أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $10^n \equiv 1[9]$.

(ب) . N عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري ، نسمي S مجموع أرقامه . برهن العلاقة التالية : $N \equiv S[9]$.

(جـ) . استنتج أن : يكون N قابلا للقسمة على 9 إذا وفقط إذا كان S قابلا للقسمة على 9 .

(3). نفترض أن $A = 2005^{2005}$

نضع : B مجموع أرقام العدد A . C مجموع أرقام العدد B . D مجموع أرقام العدد C .

(أ) . برر أن $A \equiv D[9]$.

(ب) . علما أن $2005 < 10000$ ، برهن أن العدد A يكتب في التعداد العشري على الأكثر بِ 8020 رقما .

استنتج أن $B \leq 72180$.

(جـ) . برهن أن $C \leq 45$.

(د) . بدراسة قائمة الأعداد الطبيعية الأصغر من 45 ، عين عنصرا حادا للعدد D أصغر من 15 .

(هـ) . برهن أن $D = 7$.

حل التمرين(26) : Antilles, juin 2005

(1)(أ) 1/ا) ندرس حسب قيم n بواقي قسمة 7^n على 9 :

$7^0 \equiv 1[9]$ و $7^1 \equiv 7[9]$ و $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي k ،

$7^{3k} \equiv 1[9]$ وعليه $7^{3k+1} \equiv 7[9]$ ؛ و $7^{3k+2} \equiv 4[9]$.

(ب). $2005 \equiv 7[9]$ ومنه $2005^{2005} \equiv 7^{2005}[9]$ و لدينا $2005 = 3\times668+1 = 3k+1$

اذن $7^{2005} = 7^{3\times668+1}$ إذن $7^{2005} \equiv 7[9]$ ومنه $2005^{2005} \equiv 7[9]$.

(2).(أ) نعلم ان $10 \equiv 1[9]$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، $10^n \equiv 1^n[9]$ أي $10^n \equiv 1[9]$.

(ب) برهان العلاقة : $N \equiv S[9]$ حيث N عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري ، و S مجموع أرقامه

. نضع $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ مكتوب في النظام العشري ومنه $S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$.

لدينا $N = a_n \times 10^n + a_{n-1}\times10^{n-1} + \ldots + a_1\times10 + a_0$ وبما أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $10^n \equiv 1[9]$ حسب السؤال (أ)

فإن $N \equiv a_n\times1 + a_{n-1}\times1 + \ldots + a_1\times1 + a_0 \equiv [9] \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0[9]$

اذن $N \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 [9]$ أي $N \equiv S [9]$.

ج) استنتاج أن : N قابل للقسمة على 9 إذا وفقط إذا كان S قابلا للقسمة على 9 :

N يقبل للقسمة على 9 معناه $N \equiv 0[9]$ ومعناه $N \equiv S [9]$ ويكافئ $S \equiv 0[9]$ أي S يقبل للقسمة على 9 .

(3). $A = 2005^{2005}$ و B مجموع أرقام العدد A . C مجموع أرقام العدد B. D مجموع أرقام العدد C .

(أ) . اثبات أن $A \equiv D [9]$

من السؤال (2).ب . لدينا $N \equiv S [9]$ حيث N عدد طبيعي مكتوب في النظام العشري ، و S مجموع أرقامه

ينتج $A \equiv B [9]$ ؛ و $B \equiv C [9]$ و $C \equiv D [9]$ ومنه بالتعدي نستنتج $A \equiv D [9]$.

(ب) . برهان أن العدد $A = 2005^{2005}$ يكتب في التعداد العشري على الأكثر بِ 8020 رقما حيث $2005 < 10000$

ومنه $2005 < 10^4$ أي $2005^{2005} < 10^{2005 \times 4}$ أي $2005^{2005} < 10^{8020}$ إذن $A < 10^{8020}$

لدينا $10^k = 1\underbrace{0...0}_{k}$ إذن يكتب العدد 10^k بِ $(k+1)$ رقما ومنه كل عدد أصغر من 10^k يكتب بِ k رقما على الأكثر.

بما أن $A < 10^{8020}$ فإن العدد A يكتب بِ 8020 رقما على الأكثر .

لو كانت ارقام A كلها 9 فان العدد B يكون مساويا لـ : $9 \times 8020 = 72180$

أكبر الأعداد التي تتكون من 2080رقما هي $\underbrace{99....99}_{2080\ fois}$ مجموع هذه الأرقام هي $9 \times 2080 = 72180$

علما أن $A < 10^{8020}$

وكل رقم من العدد A يكون أصغر من أو يساوي 9 إذن $B \leq 9 \times 8020$ أي $B \leq 72180$.

(جـ) برهان أن $C \leq 45$.

لدينا من السؤال السابق $B \leq 72180$ ونعلم ان $72180 \leq 99999$ ومنه $72180 < 10^5$

أي ان B يكتب في النظام العشري على الاكثر بـ 5 ارقام إذن $B < 10^5$ حيث $B \equiv C [9]$

(كل رقم من العدد B يكون أصغر من أو يساوي 9 إذن $C \leq 5 \times 9$ أي $C \leq 45$.)

ومنه المجموع C لأرقام B أقل من $9 \times 5 = 45$ اي $C \leq 45$

(د) تعيين عنصرا حادا للعدد D أصغر من 15 حيث D مجموع أرقام العدد C

(في قائمة الأعداد الطبيعية الأصغر من 45)

نضع $C = \overline{ab}$ في النظام العشري إذن $D = a + b$

(من بين جميع الاعداد الاقل من او تساوي 45 , العدد الذي له اكبر مجموع لارقامه هو 39)

لدينا $C \leq 45$ إذن $0 \leq a \leq 4$ ولدينا أيضا $0 \leq b \leq 9$ ؛

ومنه $0 \leq a + b \leq 4 + 9$ أي $0 \leq a + b \leq 13$ ومعناه $D \leq 13$.(العنصر الحاد من الاعلى هو 13)

(هـ) برهان أن $D = 7$.

لدينا حسب السؤال (3) (أ) $A \equiv D [9]$ معناه $D \equiv A [9]$. ومن (1) (ب) لدينا $A \equiv 7 [9]$ إذن $D \equiv 7 [9]$

وبما أن $0 \prec D \leq 13$ فإن $D = 7$.

التمرين(27) *La Réunion, juin 2005*

في هذا التمرين يمكن استعمال النتيجة التالية : $PGCD(a;b) = 1$ يكافئ $PGCD(a^2;b^2) = 1$.

نعتبر المتتالية (S_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

نريد حساب من اجل كل عدد طبيعي n القاسم المشترك الاكبر للعددين S_n و S_{n+1}

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $s_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(2) دراسة الحالة التي يكون فيها nزوجي : نعتبر العدد k الطبيعي غير معدوم حيث $n=2k$

(أ) برهن أن $PGCD(s_{2k};s_{2k+1})=(2k+1)^2.PGCD\left(k^2;(k+1)^2\right)$ من أجل k عدد طبيعي غير معدوم

(ب) عين : $PGCD(k;k+1)$.

(ج) أحسب $PGCD(s_{2k};s_{2k+1})$

3) دراسة الحالة التي يكون فيها nفردي : نعتبر العدد k الطبيعي غير معدوم حيث $n=2k+1$

(أ) بين ان $2k+1$ و $2k+3$ اوليان فيما بينهما

(ب) أحسب $PGCD(s_{2k+1};s_{2k+2})$ من أجل $k\in\mathbb{N}$.

(4)استنتج من الاسئلة السابقة انه توجد قيمة وحيدة للعدد n يطلب تعيينها يكون من اجلها S_n و S_{n+1} اوليين فيما بينهما

حل التمرين(27): *La Réunion, juin 2005*

(1) $S_n=1^3+2^3+...+n^3$ البرهان بالتراجع أن : $s_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

من اجل $n=1$: $s_1=1^3=1$ و $=1$ $\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ الخاصية صحيحة

نفرض صحة الخاصية من اجل n ونبرهن انها صحيحة من اجل $n+1$

نفرض اذن : $s_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ونبرهن ان $s_{n+1}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

$$s_{n+1}=s_n+(n+1)^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left[\frac{n^2}{4}+n+1\right]$$

$s_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4)=\frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ اذن الخاصية محققة من اجل كل n

ومنه من اجل كل $n\succ 0$ $s_n=\sum_{p=1}^{n}p^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

(2) دراسة الحالة التي يكون فيها nزوجي : $n=2k$

(أ) برهان أن $PGCD(s_{2k};s_{2k+1})=(2k+1)^2.PGCD\left(k^2;(k+1)^2\right)$

حسب السؤال السابق: $s_{2k}=\left[\frac{2k(2k+1)}{2}\right]^2=k^2(2k+1)^2$ و

$s_{2k+1}=\left[\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right]^2=(2k+1)^2(k+1)^2$ ومنه المجموعان لهما على الاقل $(2k+1)^2$ كقاسم مشترك

اذن
$$PGCD(s_{2k};s_{2k+1})=PGCD\left((2k+1)^2k^2;(2k+1)^2(k+1)^2\right)=$$
$$=(2k+1)^2PGCD\left(k^2;(k+1)^2\right)$$

(ب) تعيين : $PGCD(k;k+1)$: نلاحظ ان $1(k+1)+(-1)k=1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو العددان k و $k+1$ اوليان فيما بينهما وبالتالي $PGCD(k;k+1)=1$

(ج) حساب $PGCD(s_{2k};s_{2k+1})$:

لدينا $PGCD(k;k+1)=1$ وباستعمال الخاصية المعطاة في بداية التمرين نجد : $PGCD\left(k^2;(k+1)^2\right)=1$

ومنه من النتيجة (2) (أ) فان $PGCD(s_{2k};s_{2k+1})=(2k+1)^2\times(1)=(2k+1)^2$

3) دراسة حالة n فردي : $n=2k+1$.

(أ) تبيان ان $2k+1$ و $2k+3$ اوليان فيما بينهما : كل قاسم مشترك لهذين العددين فهو قاسم لفرقهما

اذن اذا كان d يقسم $2k+1$ ويقسم $2k+3$ فان d يقسم $(2k+3)-(2k+1)=2$ ومنه قيم d هي 1 او 2

وبما ان $2k+1$ و $2k+3$ فرديان فان $d=1$ اذن فهما اوليان فيما بينهما

(ب) حساب $PGCD(s_{2k+1};s_{2k+2})$:

وبنفس العمل السابق نجد: $s_{2k+1}=(2k+1)^2(k+1)^2$ و $s_{2k+2}=(2k+3)^2(k+1)^2$

اذن
$$PGCD(s_{2k+1};s_{2k+2})=PGCD\left((2k+1)^2(k+1)^2;(2k+3)^2(k+1)^2\right)=$$
$$=(k+1)^2PGCD\left((2k+1)^2;(2k+3)^2\right)$$

وبما ان $PGCD(2k+1;2k+3)=1$ فان $PGCD\left((2k+1)^2;(2k+3)^2\right)=1$ حسب المعطيات

اذن $PGCD(s_{2k+1};s_{2k+2})=(k+1)^2$

(4)استنتاج قيمة للعدد n بحيث S_n و S_{n+1} اوليين فيما بينهما :

من الاسئلة السابقة نستنتج ان: اذا كان $n=2k$ فان $PGCD(s_n;s_{n+1})=(2k+1)^2$ ويكون S_n و S_{n+1} اوليين فيما بينهما معناه $(2k+1)^2=1$ ومنه نجد $k=0$ وهذا مستحيل لان s_0 غير موجود

و اذا كان $n=2k+1$ فان $PGCD(s_n;s_{n+1})=(k+1)^2$ ويكون S_n و S_{n+1} اوليين فيما بينهما معناه $(k+1)^2=1$ ومنه نجد $k=0$ أي ان $n=1$ ومنه توجد ثنائية وحيدة $(s_1;s_2)$ أي العددان 1 و 9

التمرين(28) : France Juin 2006

(1) الهدف هو الحل في $\mathbb{Z}$ الجملة $(S)\begin{cases} n\equiv 13[19] \\ n\equiv 6[12] \end{cases}$

(أ) برهن أنه يوجد ثنائية $(u;v)$ من الاعداد الصحيحة بحيث : $19u+12v=1.$

(لا يطلب إعطاء مثال لثنائية تكون حلا)

(ب) برهن ان الثنائية حيث العدد $N=13\times 12v+6\times 19u$ هي حل للجملة (S)

(2) (أ) ليكن n_0 حلا للجملة (S) . بين انها تكافئ $\begin{cases} n\equiv n_0[19] \\ n\equiv n_0[12] \end{cases}$

(ب) برهن ان الجملة $\begin{cases} n\equiv n_0[19] \\ n\equiv n_0[12] \end{cases}$ تكافئ $n\equiv n_0[12\times 19]$

(3) (أ) عين ثنائية $(u;v)$ حلا للمعادلة $19u+12v=1$ ثم احسب قيمة العدد N

(ب) عين جميع الحلول للجملة (S) (يمكن الاستعانة بالسؤال (2) (ب))

(4) نعتبر n عددا طبيعيا . عند قسمته على 12 يكون الباقي 6 وعند قسمته على 19 يكون الباقي 13

نقسم العدد n على $12\times 19=228$, ماهو الباقي r لهذه القسمة

حل التمرين(28) : France Juin 2006

لدينا $(S)\begin{cases} n\equiv 13[19] \\ n\equiv 6[12] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=13+19k \\ n=6+12k' \end{cases}$

(1) (أ) برهان أنه يوجد ثنائية $(u;v)$: $19u+12v=1.$

بما ان العددين 19 و 12 اوليين فيما بينهما فانه حسب مبرهنة بيزو توجد ثنائية $(u;v)$ من الاعداد الصحيحة

بحيث : $19u+12v=1$

(ب) العدد $N=13\times 12v+6\times 19u$ هي حل للجملة (S) معناه العدد N يكتب على الشكل :

$N=13+19k$ و $N=6+12k'$

ولدينا $19u+12v=1.$ تعني $12v=1-19u$ اذن

$$N=13\times 12v+6\times 19u=13(1-19u)+6\times 19u=13+19\times(-7u)$$

اذن $N=13+19\times(-7u)=13+19\times k$ أي $N=13+19k$ و $k=-7u$

ولدينا أيضا $19u+12v=1.$ تعني : $19u=1-12v$

ويمكن الكتابة أيضا : $N=13\times 12v+6\times 19u=13\times 12v+6(1-12v)=6+12\times 7v$

اذن $N=6+12k'$ و $k'=7v$

(2) (أ) اذا كان n_0 حلا للجملة (S) فان $\begin{cases} n_0\equiv 13[19] \\ n_0\equiv 6[12] \end{cases}$ وهذا يعني $\begin{cases} n_0=13+19k_0 \\ n_0=6+12k'_0 \end{cases}$

و لدينا $\begin{cases} n\equiv 13[19] \\ n\equiv 6[12] \end{cases}$ وهذا يعني $\begin{cases} n=13+19k \\ n=6+12k' \end{cases}$

وبطرح طرفي الجملتين نجد $\begin{cases} n-n_0=19(k-k_0) \\ n-n_0=12(k'-k'_0) \end{cases}$ أي ان $\begin{cases} n-n_0\equiv 0[19] \\ n-n_0\equiv 0[19] \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} n\equiv n_0[19] \\ n\equiv n_0[12] \end{cases}$

(ب) برهان ان الجملة $\begin{cases} n\equiv n_0[19] \\ n\equiv n_0[12] \end{cases}$ تكافئ $n\equiv n_0[12\times 19]$

لدينا الجملة الأخير تعني 19 يقسم $n-n_0$ وكذلك العدد 12 يقسم $n-n_0$

وبما ان العددين 12 و 19 اوليين فيما بينهما فان العدد 12×19 يقسم $n-n_0$ وهذا يعني $n-n_0\equiv 0[19\times 12]$

أي ان $n\equiv n_0[12\times 19]$

(3) (أ) تعيين ثنائية $(u;v)$ تحقق: $19u+12v=1$

باستعمال القسمة الاقليدية للعدد 19 على 12

$19=1\times 12+7$ و $12=1\times 7+5$ و $7=1\times 5+2$ و $5=2\times 2+1$

ومنه $19(-5)+12(8)=1$ ومنه الثنائية $(-5;8)$ هي حل للمعادلة

وبالتالي يمكن اخذ : $u=-5$ و نعوض في العدد N نجد :

$N=13+19\times(-7u)=13+19\times(-7)(-5)=678$

ويمكن المرور بالموافقة : $19u+12v=1$ تعني $19u\equiv 1[12]$ أي $7u\equiv 1[12]$

ونعلم ان $7\times 7\equiv 1[12]$ وبالتالي يمكن ان نأخذ $u=7$ فيكون $12v=1-19(7)$ ومنه $v=-11$

وبالتالي نجد $N=13+19\times(-7u)=13+19\times(-7)(7)=-918$

(ب) تعيين جميع حلول (S):حسب السؤال (2) (ب) فان n حل للجملة (S) فهذا يكافئ $n\equiv n_0[12\times 19]$

وهذا يعني $n\equiv 678[12\times 19]$ او ان $n\equiv -918[12\times 19]$ أي ($n\equiv 678[228]$ او $n\equiv -918[228]$)

أي ان n من الشكل $228k+678$ او من الشكل $228k-918$ حيث k عدد صحيح

وبما ان $678\equiv 222[228]$ و $-918\equiv 222[228]$ يمكن القول أيضا ان العدد n حل للجملة معناه

$n=228k+222$ حيث k عدد صحيح

(4) عند قسمة n على 12 يكون الباقي 6 وعند قسمته على 19 يكون الباقي 13 فهذا يعني :

($n\equiv 6[12]$ و $n\equiv 13[19]$) أي أن n حل للجملة (S) وبالتالي يكتب على الشكل $n=228k+222$

وهذه الأخيرة تعني $n\equiv 222[228]$ وبالتالي باقي قسمة العدد n على 228 هو 222

التمرين(29) *Nouvelle Calédonie, mars 2007*

(1) (أ) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{10} على 11

(ب) عين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^4 على 5

(ج) استنتج ان $6^{40}\equiv 1[11]$ وأن $6^{40}\equiv 1[5]$

(د) استنتج أن العدد $6^{40}-1$ يقبل القسمة على 55

(2) x و y عددان صحيحان نسبيان.

(أ) بين أن المعادلة: $65x-40y=1$ .. (1) لا تقبل حلا.

(ب) بين أن المعادلة: $17x - 40y = 1$ .. (2) تقبل حلا على الأقل .

(ج) باستعمال خوارزمية إقليدس ، عين حلا خاصا للمعادلة (2)

د) حل المعادلة $17x - 40y = 1$ ثم استنتج وجود عدد طبيعي وحيد x_0 حيث: $x_0 < 40$ و $17x_0 \equiv 1[40]$

(3) من اجل كل عدد طبيعي a , برهن انه اذا كان $a^{17} \equiv b[55]$ و اذا كان $a^{40} \equiv 1[55]$ فان $b^{33} \equiv a[55]$

حل التمرين(29) *Nouvelle Calédonie, mars 2007*

(1) (أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^{10} على 11:

$6^{10} = (6^2)^5 = 36^5$ و $36 \equiv 3[11]$ ومنه $36^5 \equiv 3^5[11]$ و $3^5 = 243$

ومنه $3^5 \equiv 1[11]$ اذن $\boxed{6^{10} \equiv 1[11]}$

(ب) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد 6^4 على 5:

لدينا $6 \equiv 1[5]$ **ومنه** $6^4 \equiv 1[5]$

(ج) الاستنتاج ان $6^{40} \equiv 1[11]$ وأن $6^{40} \equiv 1[5]$:

لدينا $6^{10} \equiv 1[11]$ ومنه $(6^{10})^4 \equiv 1[11]$ اذن $\boxed{6^{40} \equiv 1[11]}$

(د) بيان ان $6^{40} - 1$ يقبل القسمة على 55 :

$\begin{cases} 6^{40} \equiv 1[11] \\ 6^{40} \equiv 1[5] \end{cases}$ و $PGCD(11;5) = 1$ ومنه $6^{40} \equiv 1[55]$ ومنه $6^{40} - 1 \equiv 0[55]$

(2) (أ) تبيان أن $65x - 40y = 1$ لا تقبل حلا:

$PGCD(65,40) = 5$ و $65x - 40y = 1$ وبما ان 5 لا يقسم 1 ، فإن المعادلة (E) ليس لها حلول

(ب) تبيان أن $17x - 40y = 1$ تقبل حلا على الأقل:

$PGCD(17,40) = 1$ و $17x - 40y = 1$ ومنه المعادلة (E') تقبل على الأقل حلا .

(ج) تعيين حل خاص للمعادلة (2) :

$$40 = 17 \times 2 + 6; \quad 6 = 40 - 17 \times 2 \quad ;17 = 6 \times 2 + 5; \quad 5 = 17 - 6 \times 2$$
$$6 = 5 + 1; \quad 1 = 6 - 5 = 6 - (17 - 6 \times 2) = 17(-1) + 6(3)$$
$$= 17(-1) + 3(40 - 17 \times 2) = 17(-7) - 40(-3)$$
$$\Rightarrow \boxed{(x_0, y_0) = (-7, -3)}$$

(د) حل المعادلة $17x - 40y = 1$:

$\begin{cases} 17x - 40y = 1 \\ 17(-7) - 40(-3) = 1 \end{cases}$ ومنه $17(x+7) - 40(y+3) = 0$ و $\begin{cases} 40/17(x+7) \\ PGCD(40;17) = 1 \end{cases}$

$40/(x+7)$ اذن $x + 7 = 40k \Rightarrow x = 40k - 7$

نعوض في المعادلة نجد $17(40k) = 40(y+3)$ ومنه $y + 3 = 17k \Rightarrow y = 17k - 3$

اذن مجموعة الحلول $\boxed{S = \{(40k - 7; 17k - 3)\}; k \in \mathbb{Z}}$

استنتاج وجود x_0 حيث : $x_0 \prec 40$ و $17x_0 \equiv 1[40]$.

$x_0 = 40k - 7$ اذن $17x_0 - 40\alpha = 1$ ومنه $17x_0 = 40\alpha + 1$ معناه $17x_0 \equiv 1[40]$

$$0 \le x_0 \le 40 \Rightarrow 0 \le 40k - 7 \le 40 \Rightarrow 7 \le 40k \le 47$$

$$0,175 \le k \le 1,175 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = 33}$$

(3) برهان انه اذا كان $a^{17} \equiv b[55]$ و $a^{40} \equiv 1[55]$ فان $b^{33} \equiv a[55]$:

$\begin{cases} a^{17} \equiv b[55] \\ a^{40} \equiv 1[55] \end{cases}$ ومنه $b^{33} \equiv \left(a^{17}\right)^{33}[55]$ اذن $b^{33} \equiv a^{561}[55]$

و $b^{33} \equiv a^{560} \times a[55]$ ومنه $b^{33} \equiv \left(a^{40}\right)^{14} \times a[55]$

$$\Rightarrow \boxed{b^{33} \equiv a[55]}$$

التمرين(30): *N. Calédonie, mars 2008*

(1) لتكن الأرقام 0 , 1 , 2 , ... , 9 , α , β ارقام الكتابة في نظام التعداد ذي الأساس 12

مثلا : $\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta\times12^2 + \alpha\times12 + 7 = 11\times144 + 10\times12 + 7 = 1711$ يكتب 1711 في النظام العشري

(أ) ليكن العدد N_1 يكتب في النظام ذي الأساس 12 : $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$, اكتب N_1 في النظام العشري

(ب) ليكن العدد N_2 يكتب في النظام العشري : $N_2 = 1131 = 1\times10^3 + 1\times10^2 + 3\times10 + 1$

اكتب N_2 في نظام التعداد ذي الأساس 12

(2) في كل ما يلي كل عدد طبيعي N يكتب في التعداد ذي الأساس 12 بـ : $N = \overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}^{12}$

(أ) بين ان $N \equiv a_0[3]$. استنتج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 12

(ب) باستعمال كتابته في نظام التعداد ذي الأساس 12 , هل العدد N_2 يقبل القسمة على 3 ؟

– تأكد من ذلك باستعمال الكتابة في النظام العشري

(3) (أ) برهن أن : $N \equiv a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0[11]$

– استنتج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد طبيعي مكتوب في النظام ذي الأساس 12

(ب) باستعمال كتابته في نظام التعداد ذي الأساس 12 , هل العدد N_1 يقبل القسمة على 11 ؟

– تأكد من ذلك باستعمال الكتابة في النظام العشري

(4) العدد N يكتب : $N = \overline{x4y}^{12}$. عين قيم العددين x و y التي يكون من اجلها العدد N يقبل القسمة على 33

حل التمرين(30): N. Calédonie, mars 2008

(1)(أ) كتابة N_1 في النظام العشري حيث : $N_1=\overline{\beta 1\alpha}^{12}$

$$N_1=\overline{\beta 1\alpha}^{12}=12^2\times 11+12\times 1+10=1606$$

(ب) نقسم على 12 عدة مرات : $1131\equiv 12\times 94+3$ و $94\equiv 12\times 7+10=12\times 7+\alpha$

اذن : $N_2=\overline{7\alpha 3}^{12}=7\times 12^2+\alpha\times 12+3=7\times 144+10\times 12+3=1131$

(2) $N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}^{12}$

(أ) تبيان ان $N\equiv a_0[3]$:

$$N=12^{n-1}\times a_n+...+12\times a_1+a_0\equiv a_0[12]\equiv a_0[3]$$

استنتاج خاصية لقابلية القسمة على 3 لعدد مكتوب في نظام التعداد ذي الأساس 12 :

$N\equiv a_0[12]\equiv a_0[3]$ اذا كان الرقم الأخير $a_0\equiv 0[3]$ (اي مضاعف لـ 3) يكون العدد N يقبل القسمة على 3

(ب) لدينا $N_2=\overline{7\alpha 3}^{12}$ فالعدد N_2 تنتهي كتابته بالرقم 3 في نظام التعداد 12 فهو اذن يقبل القسمة على 3

– في النظام العشري كتابته $N_2=1131$ مجموع ارقامه 6 مضاعف لـ 3 ومنه العدد يقبل القسمة على 3

(3) (أ) برهان أن : $N\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0[11]$

$$N=\overline{a_na_{n-1}...a_1a_0}^{12}$$

ومنه : $N=a_0+a_1\times 12+a_2\times 12^2+...+a_n\times 12^n$

وبما ان $12\equiv 1[11]$ فانه من اجل كل عدد طبيعي p : $12^p\equiv 1[11]$

اذن : $N\equiv a_0+a_1+a_2+...+a_n[11]$ اي $N\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0[11]$

– استنتاج خاصية لقابلية القسمة على 11 لعدد طبيعي مكتوب في النظام ذي الأساس 12

من هذه الكتابة : $N\equiv a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0[11]$ يكون عدد يقبل القسمة على 11 اذا كان مجموع ارقامه $(a_n+a_{n-1}+...+a_1+a_0)$ يقبل القسمة على 11

ب) في نظام التعداد ذي الأساس 12 : $N_1=\overline{\beta 1\alpha}^{12}=12^2\times 11+12\times 1+10$

ومجموع ارقامه في نظام التعداد ذي الأساس 12 هو : $\beta+1+\alpha=11+1+10=22$

22 مضاعف لـ 11 اذن N_1 يقبل القسمة على 11

– في الكتابة العشرية : $N_1=\overline{\beta 1\alpha}^{12}=12^2\times 11+12\times 1+10=1606$ و $1606=11\times 146$

ومنه N_1 يقبل القسمة على 11

ملاحظة : يمكن التأكد من قابلية القسمة على 11 لعدد مكتوب في النظام العشري بالطريقة التالية :

اذا كان ((مجموع الأرقام ذات الرتبة الزوجية) ناقص (مجموع الأرقام ذات الرتبة الفردية)) يقبل القسمة على 11

في حالة N_1 : $N_1=1606$ ($(6+6)-(0+1)=11$) اذن N_1 يقبل القسمة على 11

(4) $N=\overline{x4y}^{12}$ تعيين قيم x و y التي يكون من اجلها العدد N يقبل القسمة على 33

العدد N يقبل القسمة على 33 معناه $N\equiv 0[33]$ اي اذا كان ($N\equiv 0[3]$ و $N\equiv 0[11]$)

من الشرط الأول نجد $y=3k$ ومن الشرط الثاني نجد $x+4+y=11k'$

نحل الجملة : $\begin{cases} y=3k \\ x+4+3k=11k' \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} y=3k \\ x=11k'-3k-4 \end{cases}$ اي $x+4+y\equiv 0[11]$ و $y\equiv 0[3]$

القيم الممكنة للعدد y هي 0 و 3 و 6 و 9 ومنه قيم k هي 0 و 1 و 2 و 3

من اجل $y=0$ نجد $x+4+0\equiv 0[11]$ ومنه $x\equiv -4[11]$ اي $x\equiv 7[11]$ ومنه $x=7$

من اجل $y=3$ نجد $x+4+3\equiv 0[11]$ ومنه $x\equiv -7[11]$ اي $x\equiv 4[11]$ ومنه $x=4$

من اجل $y=6$ نجد $x+4+6\equiv 0[11]$ ومنه $x\equiv -10[11]$ اي $x\equiv 1[11]$ ومنه $x=1$

من اجل $y=9$ نجد $x+4+9\equiv 0[11]$ ومنه $x\equiv -2[11]$ اي $x\equiv 9[11]$ ومنه $x=9$

k	y	x	k'	N	N (ن عشري)
0	0	7	1	$\overline{740}^{12}$	**1056**
1	3	4	1	$\overline{443}^{12}$	**627**
2	6	1	1	$\overline{146}^{12}$	**198**
3	9	9	2	$\overline{949}^{12}$	**1353**

التمرين(31) *France Juin 2009*

1) أ) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (E) : $8x-5y=3$

ب) ليكن m عدد صحيح بحيث يوجد عددان صحيحان $(p;q)$ يحقق : $m=8p+1$ و $m=5q+4$

– بين أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن $m\equiv 9[40]$

ج) عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000

2) ليكن n عدد طبيعي

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7 . (تغيير للعدد 2^{2009})

3) ليكن a و b عددان طبيعيان كلاهما أصغر من 9 مع $a \neq 0$

نعتبر العدد N حيث : $N = a \times 10^3 + b$

نذكر أن العدد N يكتب في النظام العشري : $N = \overline{a00b}^{10}$

نريد تعيين الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

تحقق أن $10^3 \equiv -1[7]$ ثم استنتج كل الأعداد المطلوبة N التي تقبل القسمة على 7

حل التمرين (31) France Juin 2009

1) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) : $8x - 5y = 3$

أ) واضح أن $(1;1)$ حل خاص للمعادلة (E) ومنه $8(x-1)-5(y-1)=0$ أي $8(x-1)=5(y-1)$

وبتطبيق مبرهنة غوص نجد $x = 5k+1$ وبالتعويض في المعادلة نجد $y = 8k+1$

اذن الحلول هي الثنائيات $(5k+1;8k+1)$ مع $k \in \mathbb{Z}$

ب) ليكن m عدد صحيح بحيث $m = 8p+1$ و $m = 5q+4$ أي ان $p = \frac{m-1}{8}$ و $q = \frac{m-1}{5}$

نعوض في المعادلة $8x-5y=3$ نجد $8\left(\frac{m-1}{8}\right)-5\left(\frac{m-4}{5}\right)=m-1-m+4=3$

ومنه $(p;q)$ حل للمعادلة (E) وهي من شكل الحلول في السؤال السابق أي

$m = 8p+1 = 8(1+5k)+1 = 9+40k$

$m = 5q+4 = 5(8k+1)+4 = 40k+9$

استنتاج أن $m \equiv 9[40]$: بما ان $(p;q)$ حل للمعادلة (E) فان $m = 40k+9$ تعني $m \equiv 9[40]$

ج) تعيين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000

لدينا $m > 2000$ معناه $40k+9 > 2000$ معناه $k > \frac{1991}{40} = 49.77$

ومنه $k = 50$ معناه $\boxed{m = 40 \times 50 + 9 = 2009}$

2) ليكن n عدد طبيعي

أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي k فان $2^{3k} \equiv 1[7]$

$2^{3k} = \left(2^3\right)^k = 8^k$ و $8^k \equiv 1^k[7] \equiv 1[7]$ ومنه $2^{3k} \equiv 1[7]$

ب) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7 .

لدينا $1437 \equiv 2[7]$ ومنه $1437^{2016} \equiv 2^{2016}[7]$ وبما ان $2016 = 3 \times 672$ فان $2^{2016} \equiv \left(2^3\right)^{672}[7]$ أي ان

$2^{2016} \equiv 1[7]$ ومنه $1437^{2016} \equiv 1[7]$ اذن باقي القسمة الاقليدية هو 1

3) نعتبر العدد N حيث : $N = a \times 10^3 + b$ أي $N = \overline{a00b}^{10}$

التحقق أن $10^3 \equiv -1[7]$

لدينا $10 \equiv 3[7]$ ومنه $10^3 \equiv 27[7]$ وبما ان $27 \equiv -1[7]$ فان $10^3 \equiv -1[7]$

– استنتاج كل الأعداد المطلوبة N التي تقبل القسمة على 7

لدينا $10^3 \equiv -1[7]$ ومنه $a10^3 + b \equiv b - a[7]$ ومنه $N \equiv b - a[7]$

N يقبل القسمة على 7 معناه $b-a\equiv 0[7]$ ومنه $b-a=7k$

وبما ان $a\in\{1,2,3,4,5,7,6,8,9\}$ و $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

فان الثنائيات (a,b) المطلوبة هي

$(a,b)=(1,1);(1,8);(2,2);(2,9);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6);(7,7);(7,0);(8,1);(8,8);(9,2);(9,9)$

و ينتج الأعداد N المطلوبة هي : $N=\overline{a00b}^{10}$

1001 , 1008 , 2002 , 2009 , 3003 , 4004 , 5005 , 6006 , 7007 , 7000 , 8001 , 8008 ,
9002 , 9009

التمرين(32) *Liban 2009*

الهدف من التمرين برهان انه يوجد عدد طبيعي n حيث الكتابة العشرية لمكعب هذا العدد تنتهي بـ 2009 أي ان :
$n^3\equiv 2009[10000]$

الجزء (1)

(1) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2009^2 على 16

(2) استنتج ان : $2009^{8001}\equiv 2009[16]$

الجزء (2)

نعتبر المتتالية u_n المعرفة في مجموعة الاعداد الطبيعية بـ : $u_0=2009^2-1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n
$u_{n+1}=(u_n+1)^5-1$

(1) (أ) بين ان u_0 يقبل القسمة على 5

(ب) بين باستعمال دستور ثنائي الحد انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\left(u_n^4+5\left(u_n^3+2u_n^2+2u_n+1\right)\right)$

(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ان الحد u_n يقبل القسمة على 5^{n+1}

(2) (أ) تحقق ان : $u_3=2009^{250}-1$ ثم استنتج ان $2009^{250}\equiv 1[625]$

(ب) برهن ان : $2009^{8001}\equiv 2009[625]$

الجزء (3) :

(1) باستعمال مبرهنة غوص والنتائج المحصلة في الاسئلة السابقة بين ان العدد $2009^{8001}-2009$ يقبل القسمة على10000

(2) استنتج عددا طبيعيا حيث الكتابة العشرية لمكعبه تنتهي بـ : 2009

حل التمرين(32) *Liban 2009*

الجزء (1)

(1) تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2009^2 على 16 :

لدينا $2009\equiv 9[16]$ ومنه $2009^2\equiv 81[16]$ و $81\equiv 1[16]$ اذن $2009^2\equiv 1[16]$

اذن الباقي هو 1

(2) استنتاج ان : $2009^{8001} \equiv 2009[16]$

لدينا $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009^{1}$ و $2009^{8000} = (2009^{2})^{4000}$ وبما ان $2009^{2} \equiv 1[16]$ فان :

$(2009^{2})^{4000} \equiv 1[16]$ وبالتالي : $2009^{8001} \equiv 2009[16]$

الجزء (2) :

u_n متتالية معرفة بـ : $u_0 = 2009^{2} - 1$ ومن اجل كل n : $u_{n+1} = (u_n + 1)^{5} - 1$

(1) (أ) لدينا $2009 \equiv 4[5]$ ومنه $2009^{2} \equiv 16[5]$ أي $2009^{2} \equiv 1[5]$ وبالتالي $2009^{2} - 1 \equiv 0[5]$

أي u_0 يقبل القسمة على 5

(ب) باستعمال دستور ثنائي الحد نجد : $(u_n+1)^{5} = u_n^{5} + 5u_n^{4} + 10u_n^{3} + 10u_n^{2} + 5u_n + 1$ ومنه

$u_{n+1} = (u_n+1)^{5} - 1$ ومنه $u_{n+1} + 1 = (u_n+1)^{5} = u_n^{5} + 5u_n^{4} + 10u_n^{3} + 10u_n^{2} + 5u_n + 1$

وبالتالي : $u_{n+1} = u_n^{5} + 5u_n^{4} + 10u_n^{3} + 10u_n^{2} + 5u_n$

ومنه نجد : $u_{n+1} = u_n\left(u_n^{4} + 5\left(u_n^{3} + 2u_n^{2} + 2u_n + 1\right)\right)$

(ج) البرهان بالتراجع ان u_n يقبل القسمة على 5^{n+1} :

لدينا سابقا u_0 يقبل القسمة على 5 فهي محققة

نفرض الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$ أي نفرض ان u_n يقبل القسمة على 5^{n+1}

ونبرهن ان u_{n+1} يقبل القسمة على 5^{n+2} أي نفرض ان $u_n = 5^{n+1}k$ ونبرهن ان : $u_{n+1} = 5^{n+2}k'$

$u_{n+1} = u_n\left(u_n^{4} + 5\left(u_n^{3} + 2u_n^{2} + 2u_n + 1\right)\right) = 5^{n+1}k\left(\left(5^{n+1}k\right)^{4} + 5\left(u_n^{3} + 2u_n^{2} + 2u_n + 1\right)\right)$

ومنه $u_{n+1} = 5^{n+1}k\left(\left(5^{4n+4}k^{4}\right) + 5\left(u_n^{3} + 2u_n^{2} + 2u_n + 1\right)\right) = 5^{n+1}k(5l) = 5^{n+2}k'$ حيث k و k' طبيعيان

ومنه الخاصية محققة من اجل $n+1$ اذن من اجل كل n : u_n يقبل القسمة على 5^{n+1}

(2) (أ) التحقق ان : $u_3 = 2009^{250} - 1$:

لدينا $u_{n+1} + 1 = (u_n+1)^{5}$ و $u_0 + 1 = 2009^{2}$ ومنه $u_1 + 1 = (u_0+1)^{5} = 2009^{10}$ و $u_2 + 1 = (u_1+1)^{5} = 2009^{50}$

و $u_3 + 1 = (u_2+1)^{5} = \left(2009^{50}\right)^{5} = 2009^{250}$ اذن : $u_3 = 2009^{250} - 1$

– استنتاج ان $2009^{250} \equiv 1[625]$:

لدينا u_n يقبل القسمة على 5^{n+1} ومنه u_3 يقبل القسمة على 5^{3+1} أي $5^{4} = 625$ نستنتج ان $u_3 \equiv 0[625]$

ومنه $u_3 + 1 \equiv 1[625]$ وبالتالي : $2009^{250} \equiv 1[625]$

(ب) برهان ان : $2009^{8001} \equiv 2009[625]$

لدينا : $2009^{8001} = 2009^{8000} \times 2009^{1} = \left(2009^{250}\right)^{32} \times 2009$ وبما ان $2009^{250} \equiv 1[625]$ فان

$2009^{8000} \equiv 1[625]$ وبالتالي : $2009^{8001} \equiv 2009[625]$

الجزء (3) :

(1) تبيان ان العدد $2009^{8001} - 2009$ يقبل القسمة على 10000 اي: $2009^{8001} - 2009 \equiv 0[10000]$

لدينا سابقا $2009^{8001} \equiv 2009[16]$ و $2009^{8001} \equiv 2009[625]$

ومنه نستنتج ان العدد $N = 2009^{8001} - 2009$ مضاعف في آن واحد لكل من 16 و 625

ونعلم انه اذا كان عدد يقبل القسمة على عددين اوليين فيما بينهما فانه يقبل القسمة على جدائهما

وبما ان 16 و 625 اوليان فيما بينهما فان العدد N يقبل القسمة على جدائهما $16\times625=10000$

اذن $N=2009^{8001}-2009\equiv0[1000]$

(2) استنتاج عددا n حيث الكتابة العشرية لمكعبه تنتهي بـ : 2009 أي $n^3\equiv2009[10000]$

نعلم ان: $2009^{8001}-2009\equiv0[10000]$ أي $2009^{8001}\equiv2009[10000]$ و لدينا $8001=3\times2667$

ومنه نجد $\left(2009^{2667}\right)^3\equiv2009[10000]$ أي ان الكتابة العشرية لمكعب العدد 2009^{2667} تنتهي بـ 2009

التمرين(33) *France & La Réunion, sep 2009*

(1)(أ) عين باقي قسمة العدد 2009 على 11

(ب)عين باقي قسمة العدد 2^{10} على 11

(ج) عين باقي قسمة العدد $2^{2009}+2009$ على 11

(2) ليكن p عددا طبيعيا . ومن اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر العدد $A_n=2^n+p$. ونسمي $PGCD(A_n;A_{n+1})=d_n$

(أ) بين ان d_n يقسم 2^n

(ب) عين شفعية العدد A_n بدلالة شفعية p , بين ذلك

(ج) عين شفعية العدد d_n بدلالة شفعية p

– استنتج القاسم المشترك الاكبر للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$

حل التمرين(33) *France & La Réunion, sep 2009*

(1)(أ) لدينا $2009=11\times182+7$ ومنه باقي قسمة العدد 2009 على 11 هو 7 اي $2009\equiv7[11]$

(ب)تعيين باقي قسمة العدد 2^{10} على 11:

لدينا $2^5=32=11\times2+10$ ومنه $2^5\equiv10[11]$ او $2^5\equiv-1[11]$ ومنه $\left(2^5\right)^2\equiv1[11]$ اذن $2^{10}\equiv1[11]$

اذن باقي القسمة هو 1

(ج) تعيين باقي قسمة العدد $2^{2009}+2009$ على 11:

$2^{2009}=2^{10(200)+9}=2^{10\times200}\times2^9=\left(2^{10}\right)^{200}\times2^9$ وبما ان $2^{10}\equiv1[11]$ فان $\left(2^{10}\right)^{200}\equiv1[11]$

و $2^9=2^5\times2^4$ و $2^5\equiv-1[11]$ و $2^4=16\equiv5[11]$ اذن $2^9\equiv-5[11]$

وأخيرا $2^{2009}=\left(2^{10}\right)^{200}\times2^9\equiv1\times(-5)[11]$ اذن $2^{2009}\equiv-5[11]$ وبما ان $2009\equiv7[11]$ فان

$2^{2009}+2009\equiv-5+7[11]$ وبالتالي $2^{2009}+2009\equiv2[11]$ اذن الباقي هو 2

(2) $A_n=2^n+p$. ونسمي $PGCD(A_n;A_{n+1})=d_n$

(أ) تبيان ان d_n يقسم 2^n : لدينا $A_{n+1}=2^{n+1}+p$ و(d_n/A_n و d_n/A_{n+1}) ومنه d_n يقسم فرقهما

اي $d_n/\left(2^{n+1}+p\right)-\left(2^n+p\right)$ ومنه نجد $d_n/\left(2^{n+1}-2^n\right)=2^n(2-1)=2^n$ اذن d_n يقسم 2^n

(ب) تعيين شفعية العدد A_n بدلالة شفعية p

$A_n=2^n+p$ و بما ان $n\succ0$ فان 2^n زوجي وبالتالي A_n شفعيته من شفعية p

ج) تعيين شفعية العدد d_n بدلالة شفعية p :

حسب السؤال السابق فان A_n و A_{n+1} شفعيتهما من شفعية p

اذن اذا كان p زوجيا فان A_n و A_{n+1} وقاسمهما المشترك الاكبر تكون زوجية

واذا كان p فرديا فان A_n و A_{n+1} وقاسمهما المشترك الاكبر تكون فردية

ومن النتيجة السابق A_{2009} و A_{2010} عددان فرديان لان 2009 فردي وبالتالي قاسمهما المشترك الاكبر عدد فردي

ورأينا سابقا ان d_n يقسم 2^n و لكن 2^n كل قواسمه اعداد زوجية ما عدا 1

اذن $PGCD(A_{2009};A_{2010})=d_n=1$ ومنه القاسم المشترك الاكبر للعددين $2^{2009}+2009$ و $2^{2010}+2009$

هو 1 اذن هما عددان اوليان فيما بينهما

التمرين(34) N.elle Caledonie Novembre2009

السؤالان (1) و(2) منفصلان

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $3x+7y=10^{2n}\ \dots\ (E)$ حيث n عدد طبيعي n

(أ) عين ثنائية $(u;v)$ من الاعداد الصحيحة بحيث : $3u+7v=1$

استنتج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E)

(ب) عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من الاعداد الصحيحة حلول المعادلة (E)

(2) نعتبر المعادلة (G) : $3x^2+7y^2=10^{2n}$ حيث x و y صحيحان

(أ) بين ان $100\equiv 2[7]$

– برهن انه اذا كانت $(x;y)$حلا للمعادلة (G) فان $3x^2\equiv 2^n[7]$

(ب) أكمل الجدول التالي :

باقي قسمة x على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $3x^2$ على 7							

(ج) برهن ان : $2^n\equiv 1[7]$ او $2^n\equiv 2[7]$ او $2^n\equiv 4[7]$

استنتج ان المعادلة (G) لا تقبل حلولا

حل التمرين(34) N.elle Caledonie Novembre2009

(1) $3x+7y=10^{2n}\ \dots\ (E)$

(أ) تعيين ثنائية $(u;v)$ حيث $3u+7v=1$: لدينا $3(-2)+7\times1=1$ ومنه الثنائية $(-2;1)$ حل لها

استنتاج حلا خاصا $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E): بضرب طرفي المساواة $3(-2)+7\times1=1$ بالعدد 10^{2n} نجد:

$3(-2)10^{2n}+7\times1\times10^{2n}=10^{2n}$ أي $3\times(-2\times10^{2n})+7\times10^{2n}=10^{2n}$ ومنه الحل الخاص للمعادلة (E)

هو $(x_0;y_0)=(-2\times10^{2n};10^{2n})$

(ب) تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) : بما ان $(x_0;y_0)$ حلا خاصا لها فان $\begin{cases}3x_0+7y_0=10^{2n}\\3x+7y=10^{2n}\end{cases}$

ومنه بالطرح نجد: $3(x-x_0)=7(y_0-y)$

لدينا 7 يقسم $3(x-x_0)$ وبما ان العددين 7 و 3 اوليين فيما بينهما فان 7 يقسم $(x-x_0)$ اي $x-x_0=7k$

ومنه $x=x_0+7k$ وبنفس العمل نجد ان $y_0-y=3k$ اذن $y=y_0-3k$

اذن الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) هي : $(x;y)=(-2\times10^{2n}+7k;10^{2n}-3k)$

(2) (G) : $3x^2+7y^2=10^{2n}$:

(أ) تبيان ان $100\equiv2[7]$: لدينا $100=7\times14+2$ واضح ومنه الموافقة صحيحة

– برهان ان : $3x^2\equiv2^n[7]$ حيث $(x;y)$ حل للمعادلة (G)

لدينا $3x^2+7y^2=10^{2n}$ وبما ان $7y^2\equiv0[7]$ فان $3x^2+7y^2\equiv3x^2[7]$

ومن جهة اخرى بما ان $10^{2n}=(10^2)^n=100^n$ و $100\equiv2[7]$ فان $10^{2n}\equiv2^n[7]$

واخيرا اذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (G) و $3x^2+7y^2\equiv2^n[7]$ فان $3x^2\equiv2^n[7]$

(ب) اكمال الجدول :

باقي قسمة x على 7	0	1	2	3	4	5	6
باقي قسمة $3x^2$ على 7	0	3	5	6	6	5	3

(ج) برهان ان : $2^n\equiv1[7]$ او $2^n\equiv2[7]$ او $2^n\equiv4[7]$:

ندرس بواقي قسمة 2^n على 7 :

$2^3\equiv1[7],\quad 2^2\equiv4[7];\ 2^1\equiv2[7]\quad ;2^0\equiv1[7]$

و منه من العلاقة $2^3\equiv1[7]$ و حسب خواص الموافقات لدينا من أجل كل عدد طبيعي p

$(2^3)^p=2^{3p}\equiv1[7]$ و $2^{3p}\times2\equiv1\times2[7]$ إذن: $2^{3p+1}=2[7]$ و $2^{3p}\times2^2\equiv1\times4[7]$

إذن : $2^{3p+2}\equiv4[7]$

(ج) استنتاج ان المعادلة (G) : $3x^2+7y^2=10^{2n}$ لا تقبل حلا :

بما ان($2^n\equiv1[7]$ او $2^n\equiv2[7]$ او $2^n\equiv4[7]$) و من الجدول السابق وجدنا :

($3x^2\equiv0[7]$ او $3x^2\equiv3[7]$ او $3x^2\equiv5[7]$ او $3x^2\equiv6[7]$) فان $3x^2$ و 2^n لا يتوافقان

وبالتالي المعادلة $3x^2\equiv2^n[7]$ لا تقبل حلا اذن المعادلة $3x^2+7y^2=10^{2n}$ لا تقبل حلا

التمرين(35) Asie 2009

(1) نريد في هذا السؤال تعيين كل الاعداد الصحيحة N حيث : $\begin{cases}N\equiv5[13]\\N\equiv1[17]\end{cases}$

(أ) تحقق ان العدد 239 هو حل للجملة

(ب) ليكن N عددا صحيحا حلا للجملة . بين ان N يمكن ان يكتب على الشكل $N=1+17x=5+13y$

حيث x و y عددان صحيحان يحققان العلاقة $17x-13y=4.$

(ج) حل المعادلة $17x-13y=4.$ حيث x و y عددان صحيحان

(د) استنتج انه يوجد عدد صحيح k بحيث : $N=18+221k$

(هـ) برهن التكافؤ المنطقي التالي : $N\equiv 18[221]$ تكافئ $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$

(2) (أ) هل يوجد عدد طبيعي k بحيث : $10^k\equiv 1[17]$ ؟

(ب) هل يوجد عدد طبيعي m بحيث : $10^m\equiv 18[221]$ ؟

حل التمرين(35) Asie 2009

(1) (أ) التحقق ان العدد 239 هو حل للجملة : $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$

$239=13\times 18+5$ ومنه $239\equiv 5[13]$ و $239=14\times 17+1$ ومنه $239\equiv 1[17]$

اذن 239 هو حل للجملة

(ب) N صحيح حل للجملة معناه $N\equiv 5[13]$ أي انه يوجد عدد صحيح y حيث $N=5+13y$

و N حل للجملة معناه أيضا $N\equiv 1[17]$ أي انه يوجد عدد صحيح x حيث $N=1+17x$

اذن كل حل N للجملة يمكن ان يكتب على شكلين $N=1+17x=5+13y$ وبالتالي $1+17x=5+13y$

وينتج من هذه الكتابة ان $17x-13y=4$ حيث x و y عددان صحيحان

(ج) حل المعادلة $17x-13y=4.$:

واضح ان الثنائية $(1;1)$ حل خاص لها ومنه تنتج الجملة $\begin{cases} 17x-13y=4 \\ 17(1)-13(1)=4 \end{cases}$ وبالطرح نجد :

$17(x-1)=13(y-1)$ هذه الكتابة تعني ان العدد 17 يقسم $13(y-1)$ وبما ان 17 و 13 اوليان فيما بينهما فان

حسب مبرهنة غوص 17 يقسم $(y-1)$ أي ان $y-1=17k$ ومنه $y=1+17k$ حيث k عدد صحيح

وبالتعويض في المعادلة $17(x-1)=13(y-1)$ نجد $x=1+13k$ حيث k عدد صحيح

اذن الثنائيات حل المعادلة هي : $(x,y)=(13k+1;17k+1)$

(د) استنتاج: $N=18+221k$:

رأينا سابقا ان كل الحلول $N=1+17x=5+13y$ ومنه $N=1+17(1+13k)=18+221k$

(هـ) برهان التكافؤ المنطقي: $N\equiv 18[221]$ تكافئ $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$

من السؤال السابق اذا كان $\begin{cases} N\equiv 5[13] \\ N\equiv 1[17] \end{cases}$ فان $N=18+221k$ اي ان $N\equiv 18[221]$

نبرهن الان العكس اي نفرض ان : $N\equiv 18[221]$ وهذا يعني $N=221q+18$ ويكتب على الشكل

$N=17\times 13q+18=17\times 13q+17+1=17\times(13q+1)+1$ ومنه $N=17m+1$ اي $N\equiv 1[17]$

ويمكن أيضا ان نكتب : $N\equiv 18[221]$ وهذا يعني $N=221q+18$ ومنه نكتب

$N=17\times 13q+18=17\times 13q+13+5=13\times(17q+1)+5$ اي $N=13p+5$ اي $N\equiv 5[13]$

(2) (أ) هل يوجد عدد طبيعي k بحيث : $10^k\equiv 1[17]$ ؟

الجواب نعم اذا كان N على الشكل 10^k

حسب المبرهنة الصغيرة لفيرما : 17 عدد اولي و 10 لا يقبل القسمة على 17 نعلم اذن ان $10^{17-1} \equiv 1[17]$

اي $10^{16} \equiv 1[17]$ اذن يوجد عدد طبيعي k هو $k=16$ يحقق $10^{k} \equiv 1[17]$

(ب) هل يوجد عدد طبيعي m بحيث : $10^{m} \equiv 18[221]$ ؟

رأينا سابقا ان $10^{p} \equiv 18[221]$ تعني $\begin{cases} 10^{p} \equiv 5[13] \\ 10^{p} \equiv 1[17] \end{cases}$ وبحساب بواقي القسمة الاقليدية للعدد 10على 13 نجد:

$10^{1} \equiv -3[13]$ و $10^{2} \equiv 9[13]$ و $10^{3} \equiv -1[13]$ و $10^{4} \equiv 3[13]$ و $10^{5} \equiv 4[13]$ و $10^{6} \equiv 1[13]$

اذن بواقي القسمة هي اما : -3 او -1 او 3 او 4 او 9 لكن لا يمكن ان يكون 5

اذن لا يوجد عدد صحيح m بحيث : $10^{m} \equiv 18[221]$

التمرين(36) : *Polynesie juin 2010*

الجزءان (1) و(2) مستقلان

الجزء (1)

(1) نعتبر المعادلة $7x-6y=1$ .. E حيث x و y طبيعيان, عين حلا خاصا للمعادلة

(2) عين مجموعة حلول المعادلة (E)

الجزء (2)

في هذا الجزء نريد تعيين الثنائيات $(n;m)$ من الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق العلاقة :

$7^{n}-3\times 2^{m}=1$ .. (F)

(1) نفرض $m \leq 4$. بين انه يوجد ثنائيتان فقط تحققان (F)

(2) نفرض الان $m \geq 5$

(أ) بين انه اذا كانت $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) فان $7^{n} \equiv 1[32]$

(ب) بدراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^{n} على 32 بين انه اذا كانت $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) فان العدد n يقبل القسمة على 4

(ج) استنتج انه اذا كانت $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) فان $7^{n} \equiv 1[5]$

(د) عندما $m \geq 5$, هل توجد ثنائيات $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) ؟

(3) ضع خلاصة. بمعنى عين جميع الثنائيات $(n;m)$ من الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق العلاقة (F)

حل التمرين(36) : *Polynesie juin 2010*

الجزء (1)

(1) واضح ان الثنائية $(1;1)$ حل خاص للمعادلة (E)

(2) لدينا $7x-6y=1$ و $7(1)-6(1)=1$ وبالطرح نجد: $7(x-1)=6(y-1)$

7 يقسم $6(y-1)$ وبما انه اولي مع 6 فانه حسب غوص 7 يقسم $y-1$ أي $y-1=7k$ ومنه $y=7k+1$

وبالتعويض في $7(x-1)=6(y-1)$ نجد $x=6k+1$

اذن حلول المعادلة هي : $(x;y)=(6k+1;7k+1)$ حيث k عدد صحيح

الجزء(2) : تعيين الثنائيات $(n;m)$: $7^n-3\times 2^m=1 \quad ...(F)$

(1) $m\le 4$. نبين انه يوجد ثنائيتان فقط تحققان (F)

– اذا كان $m=0$ فان : $7^n-3\times 2^0=1$ أي $7^n=1+3=4$ مستحيلة

– اذا كان $m=1$ فان $7^n-3\times 2^1=1$ أي $7^n=7$ ومنه $n=1$ اذن الثنائية $(1;1)$ حل

– اذا كان $m=2$ فان $7^n-3\times 2^2=1$ أي $7^n=13$ مستحيلة

– اذا كان $m=3$ فان $7^n-3\times 2^3=1$ أي $7^n=25$ مستحيلة

– اذا كان $m=4$ فان $7^n-3\times 2^4=1$ أي $7^n=49$ ومنه $n=2$ اذن الثنائية $(2;4)$ حل

(2) (أ) نفرض $m\ge 5$ ونبين انه اذا كانت $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) فان $7^n\equiv 1[32]$

$7^n-3\times 2^m=1$ ومنه $7^n=1+3\times 2^m=1+3\times 2^5\times 2^{m-5}=1+32\left(3\times 2^{m-5}\right)=1+32k$

اذن $7^n=1+32k$ حيث k عدد صحيح لان $2^{m-5}\ge 1$

ومنه اذا كان $m\ge 5$ فان $7^n=1+32k$ وهذا يعني $7^n\equiv 1[32]$

(ب) دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 7^n على 32 : $7^0\equiv 1[32]$, $7^1\equiv 7[32]$, $7^2\equiv 17[32]$,

$7^3\equiv 23[32]$ و $7^4\equiv 1[32]$ وبالتالي :

$7^{4k}\equiv 1[32]$ و $7^{4k+1}\equiv 7[32]$ و $7^{4k+2}\equiv 17[32]$ و $7^{4k+3}\equiv 23[32]$

–تبيان انه اذا كانت $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) فان n يقبل القسمة على 4 : أي $n\equiv 0[4]$

$(n;m)$ تحقق العلاقة (F) أي ان $7^n\equiv 1[32]$ أي $7^n=32k+1=1+4(8k)$ وهذا يعني $7^n\equiv 1[4]$

ومن دراسة البواقي السابق نجد ان $7^n\equiv 1[32]$ محققة عندما $n=4k$ وهذا يعني $n\equiv 0[4]$ أي ان n يقبل القسمة على 4

(ج) استنتاج ان $7^n\equiv 1[5]$:

اذا كانت $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) فانه يوجد عدد صحيح k حيث $n=4k$

وعندئذ $7^n=7^{4k}=\left(7^4\right)^k$ ونعلم ان $7^4=\left(7^2\right)^2=49^2$ و $49\equiv -1[5]$ ومنه $49^2\equiv 1[5]$

وبالتالي $\left(7^4\right)^k\equiv 1[5]$ أي $7^n\equiv 1[5]$

(د) عندما $m\ge 5$, هل توجد ثنائيات $(n;m)$ تحقق العلاقة (F) ؟؟

لدينا $7\equiv 2[5]$ ومنه $7^n\equiv 2^n[5]\equiv 1[5]$ الحل الوحيد هو $n=0$

ومنه $7^0-3\times 2^m=1$ وهذه مستحيلة مع $m\ge 5$

(3) الخلاصة: مجموع الثنائيات $(n;m)$ من الاعداد الطبيعية غير المعدومة التي تحقق العلاقة (F) هي : $(1;1)$ و $(2;4)$

التمرين (37) Polynésie 2011

نعتبر المتتالية (u_n) لأعداد طبيعية معرفة بحدها الأول $u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=10u_n+21$

(1) احسب u_1 ، u_2 ، و u_3

(2) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$

(ب) استنتج من اجل كل عدد طبيعي n الكتابة العشرية للعدد u_n

(3) بين ان u_2 عدد أولي

(4) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، u_n لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 .

(5) (أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n : $3u_n \equiv 4-(-1)^n [11]$

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n فان u_n لا يقبل القسمة على 11

(6) (أ) برهن ان $10^8 \equiv -1[17]$ ثم بين ان $10^{16} \equiv 1[17]$

(ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي k ، u_{16k+8} يقبل القسمة على 17

حل التمرين (37) *Polynésie 2011*

(1)حساب u_1 ، u_2 ، و u_3 :

$u_1 = 10u_0 + 21 = 10\times1+21 = 31$ و $u_2 = 331$ و $u_3 = 3331$

(2) (أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل n : $3u_n = 10^{n+1} - 7$

$3u_0 = 3 = 10-7 = 10^{0+1}-7$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n=0$

نفرض ان : $3u_n = 10^{n+1} - 7$ ونبين ان $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$

$63 + \left(10^{n+1}-7\right)10 = 63 + 3u_n \times 10 = \left(21 + 10u_n\right)3 = 3u_{n+1}$ ومنه $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$

ومنه من اجل كل n طبيعي : $3u_n = 10^{n+1} - 7$

(ب) استنتاج الكتابة العشرية للعدد u_n : لدينا $3u_n = 10^{n+1} - 7$

$10^{n+1} - 7 = \underbrace{10....0}_{n+1} - 7 = \underbrace{99....9}_{n}3$ وبالقسمة على 3 نجد :

$u_n = \dfrac{10^{n+1}-7}{3} = \dfrac{99...93}{3} = \underbrace{33...3}_{n}1$ ومنه الكتابة العشرية لـ u_n هي $\underbrace{33...3}_{n}1$

(3) تبيان ان u_2 عدد أولي : $u_2 = 331$ و $\sqrt{u_2} = \sqrt{331} \approx 18,1$

العدد 331 لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 ولا على 7 ولا على 11 ولا على 13

وبما ان $\dfrac{331}{17} = 19,4 \succ 18,1$ فان العدد 331 اولي اذن u_2 عدد أولي

(4) برهان ان u_n لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5 .

ليكن n طبيعي كيفي. حسب السؤال (2)(ب) فان رقم احاد u_n هو 1 ومنه u_n لا يقبل القسمة على 2 ولا على 5

ومجموع ارقام العدد u_n هو $\underbrace{3+3+...3}_{n}+1 = 3n+1$ فمجموع ارقامه لا يقبل القسمة على 3

ومنه u_n لا يقبل القسمة على 3 . اذن من اجل كل n فان u_n لا يقبل القسمة على 2 ولا على 3 ولا على 5

(5) (أ) برهان ان : $3u_n \equiv 4-(-1)^n [11]$

$10 \equiv -1[11]$ لدينا ومنه $10^{n+1} \equiv (-1)^{n+1} [11]$ اي ان $10^{n+1} \equiv -(-1)^n [11]$

ولدينا أيضا $-7 \equiv 4[11]$ ونعلم ان $3u_n = 10^{n+1} - 7$ ومنه بالجمع نجد :

اذن $10^{n+1}-7\equiv 4-(-1)^n[11]$ ومنه $3u_n\equiv 4-(-1)^n[11]$

(ب) استنتاج انه من اجل كل n, u_n لا يقبل القسمة على 11 :

– اذا كان n زوجيا فان : $3u_n\equiv 4-1[11]$ اي $3u_n\equiv 3[11]$ وبما ان 3 لا يوافق 0 بترديد 11 فان $3u_n$ لا يوافق 0 بترديد 11 وبالتالي ليس مضاعف لـ 11 ومنه u_n ليس مضاعف لـ 11

– اذا كان n فرديا فان $3u_n\equiv 4+1[11]$ اي $3u_n\equiv 5[11]$ وبما ان 5 لا يوافق 0 بترديد 11 فان $3u_n$ لا يوافق 0 بترديد 11 وبالتالي ليس مضاعف لـ 11 ومنه u_n ليس مضاعف لـ 11

اذن من اجل كل n طبيعي u_n ليس مضاعف لـ 11

(6) (أ) برهان ان $10^8\equiv -1[17]$: لدينا $10\equiv -7[17]$ و $10^2\equiv 49[17]$ و منه $10^2\equiv 49-3\times 17[17]$

اذن $10^2\equiv -2[17]$ وبالتالي : $10^8\equiv (-2)^4[17]$ اي ان $10^8\equiv 16[17]$ اي $10^8\equiv -1[17]$

– تبيان ان $10^{16}\equiv 1[17]$: من النتيجة السابقة لدينا $10^8\equiv -1[17]$ ومنه $10^{16}\equiv (-1)^2[17]$ اذن $10^{16}\equiv 1[17]$

(ب) استنتاج انه من اجل كل k ، u_{16k+8} يقبل القسمة على 17 : اي $u_{16k+8}\equiv 0[17]$

حسب السؤال (2) (أ) : $3u_n=10^{n+1}-7$ ومنه $3u_{16k+8}=10^{16k+9}-7$

حسب السؤال (أ) $10^{16k+9}=(10^{16})^k\times 10^8\times 10$ ولدينا : $10^{16k+9}\equiv (1)^k\times(-1)\times(-7)[17]$

اذن $10^{16k+9}\equiv 7[17]$ ومنه نجد $10^{16k+9}-7\equiv 0[17]$ اي ان $10^{16k+9}-7$ يقبل القسمة على 17

وبالتالي 17 يقسم $3\times u_{16k+8}$ وبما ان 17 اولي مع 3 فانه حسب غوص 17 يقسم u_{16k+8} وهو المطلوب

التمرين(38) *Antilles Guyane 2012*

(1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $11x-5y=14\ \ldots(E)$

(أ)تحقق ان $(4,6)$ حل للمعادلة (E)

(ب)عين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E)

(2)(أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2^{3n}\equiv 1[7]$

(ب) عين باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 7

(3)(أ) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العددين: $a=3n+1$ و $b=2n+3$

بين ان القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b هو 1 او 7

(ب) عين حسب قيم n القاسم المشترك الاكبر للعددين a و b

حل التمرين(38) *Antilles Guyane 2012*

(1) لدينا $11x-5y=14$

(أ) التحقق ان $(4,6)$ حل للمعادلة (E) : بالتعويض نجد $11(4)-5(6)=14$

(ب)تعيين كل الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E):

لدينا $\begin{cases}11x-5y=14\\ 11(4)-5(6)=14\end{cases}$ بالطرح نجد : $11(x-4)=5(y-6)$

هذه الاخيرة تعني العدد 11 يقسم $5(y-6)$ وبما ان 11 و 5 اوليان فيما بينهما فانه حسب مبرهنة غوص

11 يقسم $y-6$ أي ان $y-6=11k$ وبالتالي $y=6+11k$ حيث k عدد صحيح

وبتعويض $y=6+11k$ في المعادلة $11(x-4)=5(y-6)$ نجد $x=6+5k$

اذن مجموعة الثنائيات حلول المعادلة (E) هي : $(x;y)=(6+5k;6+11k)$ حيث k عدد صحيح

(2)(أ) تبيان ان $2^{3n}\equiv 1[7]$:

نعلم ان $2^3=8\equiv 1[7]$ ومنه $(2^3)^n\equiv 1[7]$ وبالتالي $2^{3n}\equiv 1[7]$

(ب) تعيين باقي قسمة العدد 2011^{2012} على 7 :

لدينا $2011=287\times 7+2$ أي ان $2011\equiv 2[7]$ ومنه $2011^{2012}\equiv 2^{2012}[7]$

ونعلم ايضا : $2012=3\times 670+2$ ومنه $2^{2012}=2^{3\times 670}\times 2^2$

ولدينا من السؤال (أ) $2^{3n}\equiv 1[7]$ وبالتالي $2^{3\times 670}\equiv 1[7]$ ومنه ينتج $2^{2012}\equiv 2^2[7]$

واخيرا نجد ان $2011^{2012}\equiv 4[7]$ وبالتالي باقي القسمة هو 4

(3)(أ) $a=3n+1$ و $b=2n+3$ تبيان ان $PGCD(a;b)$ هو 1 او 7 :

نضع $PGCD(a;b)=d$ ومنه d لقسم كلا من a و b

وبالتالي d يقسم العدد $3b-2a=3(2n+3)-2(3n+1)=7$ ومنه القيم الممكنة لـ d هي 1 او 7

(ب) تعيين حسب قيم n $PGCD(a;b)$:

اذا كان $PGCD(a;b)=7$ فان 7 يقسم $3n+1$ اي ان $3n+1\equiv 0[7]$

و $3n+1\equiv 0[7]$ تعني $3n\equiv -1[7]$ ومنه $6n\equiv -2[7]$ وبالتالي $-n\equiv -2[7]$ اذن $n\equiv 2[7]$

اذن اذا كان $PGCD(a;b)=7$ فان $n=7k+2$

ومن جهة اخرى ايضا اذا كان $PGCD(a;b)=7$ فهذا يعني : $\begin{cases}3n+1\equiv 0[7]\\ 2n+3\equiv 0[7]\end{cases}$ وبالطرح نجد :

$(3n+1)-(2n+3)\equiv 0[7]$ اي ان $n-2\equiv 0[7]$ وبالتالي $n\equiv 2[7]$ اي ان $n=7k+2$

اذن من اجل كل عدد طبيعي n : $PGCD(a;b)=7$ اذا كان $n=7k+2$

$PGCD(a;b)=1$ اذا كان $n\neq 7k+2$

التمرين(39) Polynésie 2012

الجزء الأول

نعتبر في مجموعة الاعداد الصحيحة المعادلة : $25x-108y=1....(E)$

(1) بين ان الثنائية $(13,3)$ حلا للمعادلة (1) .

(2) عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ حلول المعادلة (E).

الجزء الثاني :

في هذا الجزء نعتبر a عددا طبيعيا . ونعتبر العددين الطبيعيين g و c يحققان : $25g-108c=1$

(1) ليكن x عددا طبيعيا

بين انه اذا كان $x\equiv a[7]$ و $x\equiv a[19]$ فان $x\equiv a[133]$

(2) (أ) بين انه من اجل كل عدد صحيح x حيث : $1\le x\le 6$ فانه يكون $x^6\equiv 1[7]$

(ب) اذا فرضنا ان a ليس مضاعفا للعدد 7 , بين ان $a^{108}\equiv 1[7]$

– استنتج ان $(a^{25})^g\equiv a[7]$

(ج) نفرض ان a مضاعف للعدد 7 , برهن ان $(a^{25})^g\equiv a[7]$

(د) نقبل انه من اجل كل عدد طبيعي a , $(a^{25})^g\equiv a[19]$, برهن عندئذ ان $(a^{25})^g\equiv a[133]$

حل التمرين (39): Polynésie 2012

الجزء الأول : $25x-108y=1....(E)$

(1) تبيان ان الثنائية $(13,3)$ حلا للمعادلة (1): هذا يعني $25(13)-108(3)=325-324=1$ وهي محققة

(2) تعيين حلول المعادلة (E) : لدينا $\begin{cases}25x-108y=1\\25(13)-108(3)=1\end{cases}$ ومنه بالطرح نجد :

$25(x-13)=108(y-3)$ وهذه المعادلة تعني ان 108 قاسم لـ $25(x-13)$ وبما ان 108 و 25 اوليان فيما بينهما فان 108 قاسم لـ $(x-13)$ اي ان $(x-13)=108k$ ومنه $x=108k+13$

وبالتعويض في المعادلة $25(x-13)=108(y-3)$ نجد $y=25k+3$ ومنه حلول المعادلة هي :

$(x;y)=(108k+13;25k+3)$ حيث k عدد صحيح

الجزء الثاني :

a عدد طبيعي . و g و c طبيعيان يحققان : $25g-108c=1$

(1) تبيان ان اذا كان ($x\equiv a[7]$ و $x\equiv a[19]$) فان $x\equiv a[133]$

اذا كان $x\equiv a[7]$ فان $(x-a)$ مضاعف للعدد 7

واذا كان $x\equiv a[19]$ فان $(x-a)$ مضاعف للعدد 19 ومنه $(x-a)$ مضاعف مشترك للعددين 7 و 19

اي ان $(x-a)$ مضاعف للعدد 7×19 اي ان $(x-a)$ مضاعف للعدد 133 وهذا يعني $x-a\equiv 0[133]$

ومنه $x\equiv a[133]$

(2) (أ) تبيان انه اذا كان $1\le x\le 6$ فان $x^6\equiv 1[7]$:

لدينا $1^6=1$ ومنه $1^6\equiv 1[7]$ ولدينا $2^6=8^2$ و $8\equiv 1[7]$ اذن $8^2\equiv 1[7]$ ومنه $2^6\equiv 1[7]$

ولدينا $3^6=9^3$ و $9\equiv 2[7]$ ومنه $9^3\equiv 8[7]$ وبالتالي $3^6\equiv 1[7]$

و لدينا $4\equiv -3[7]$ ومنه $4^6\equiv 3^6[7]$ بالتالي $4^6\equiv 1[7]$

ولدينا $5\equiv -2[7]$ ومنه $5^6\equiv (-2)^6[7]\equiv 2^6[7]$ وحسب ما سبق فان $5^6\equiv 1[7]$

ولدينا $6\equiv -1[7]$ ومنه $6^6\equiv (-1)^6[7]$ اذن $6^6\equiv 1[7]$

اذن من اجل كل $1\le x\le 6$ فان $x^6\equiv 1[7]$

(ب) نعلم ان كل عدد صحيح يوافق بترديد n باقي قسمته على n

فاذا فرضنا a ليس مضاعفا للعدد 7 فهذا يعني : $a\equiv x[7]$ حيث $1\le x\le 6$

, تبيان ان $a^{108}\equiv 1[7]$: حيث لدينا من السؤال السابق $x^6\equiv 1[7]$

من $a\equiv x[7]$ نجد $a^{108}\equiv x^{108}[7]$ ومنه $a^{108}\equiv x^{6\times 18}[7]$ اي $a^{108}\equiv \left(x^6\right)^{18}[7]$ وبالتالي

$a^{108}\equiv (1)^{18}[7]$ اذن $a^{108}\equiv 1[7]$

– استنتاج ان $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[7]$:

لدينا $25g-108c=1$ ومنه $25g=108c+1$

و $\left(a^{25}\right)^g=a^{25g}=a^{108c+1}=a\times a^{108c}$ وبما ان $a^{108}\equiv 1[7]$ فان $\left(a^{108}\right)^c\equiv (1)^c[7]$ اي

$a^{108c}\equiv 1[7]$ اذن $a\times a^{108c}\equiv a[7]$ وبالتالي $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[7]$

(ج) برهان ان $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[7]$

اذا فرضنا ان a مضاعف للعدد 7 فهذا يعني : $a\equiv 0[7]$ ومنه $(a)^{25}\equiv 0[7]$ وأيضا $\left(a^{25}\right)^g\equiv 0[7]$

وبالتالي $\left(a^{25}\right)^g$ و a متوافقان بترديد 7 (لهما نفس باقي القسمة على 7) اذن $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[7]$

(د) برهان ان $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[133]$:

لدينا من السؤال السابق $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[7]$ وقبلنا ان $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[19]$

ومن الجزء (2) س (1) : ($x\equiv a[7]$ و $x\equiv a[19]$) فان $x\equiv a[133]$) نجد :

$\left(a^{25}\right)^g\equiv a[7\times 19]$ اذن $\left(a^{25}\right)^g\equiv a[133]$

التمرين(40) *Antilles Guyane 2017*

نعتبر المتتالية المعرفة بحدها الأول $u_0=3$ ومن اجل كل n طبيعي : $u_{n+1}=2u_n+6$

(1) بين انه من اجل كل n طبيعي : $u_n=9\times 2^n-6$

(2) برهن انه من اجل كل طبيعي $n\ge 1$ فان u_n يقبل القسمة على 6

(3) نعرف المتتالية (v_n) من اجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$: $v_n=\dfrac{u_n}{6}$

نعتبر الجملة التالية :(من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم , v_n هو عدد أولي)

اذكر ان كانت هذه الجملة صحيحة ام خاطئة مع التبرير

(4) (أ) برهن انه من اجل كل $n\ge 1$: $v_{n+1}-2v_n=1$

(ب) استنتج انه من اجل كل $n\ge 1$: v_n و v_{n+1} اوليان فيما بينهما

(ج) استنتج من اجل كل $n\ge 1$ القاسم المشترك الاكبر لـ : u_n و u_{n+1}

(5) (أ) تأكد ان $2^4\equiv 1[5]$

(ب) استنتج انه اذا كان n من الشكل $4k+2$ حيث k طبيعي فان u_n يقبل القسمة على 5

(ج) هل العدد u_n يقبل القسمة على 5 من اجل القيم الأخرى للعدد n ؟ برر ذلك

حل التمرين (40): *Antilles Guyane 2017*

(1) البرهان بالتراجع انه من اجل كل n طبيعي : $u_n=9\times 2^n-6$

$u_0=9\times 2^0-6=3$ وهي محققة لان $u_0=3$

نفرض الخاصية صحيحة من اجل كل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

$$u_{n+1}=2u_n+6=2\times\left(9\times 2^n-6\right)+6=9\times 2\times 2^n-12+6=9\times 2^{n+1}-6$$

ومنه $u_{n+1}=9\times 2^{n+1}-6$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n وبالتالي : $u_n=9\times 2^n-6$

(2) برهان انه من اجل $n\geq 1$ فان u_n يقبل القسمة على 6 :

لدينا $u_n=9\times 2^n-6=3\times 3\times 2\times 2^{n-1}-6$ ومنه $u_n=6\left(3\times 2^{n-1}-1\right)$ ،

وبما ان $3\times 2^{n-1}-1$ عدد طبيعي لان $n\geq 1$ فان هذا يدل ان u_n يقبل القسمة على 6

(3) المتتالية (v_n) معرفة من اجل $n\geq 1$ بـ : $v_n=\dfrac{u_n}{6}$

الجملة :(من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، v_n هو عدد أولي) تكون صحيحة عندما تتحقق :

v_n هو عدد أولي مهما كان n ، اذن حتى تكون خاطئة يكفي إيجاد عدد طبيعي بحيث يكون v_n ليس اوليا

$v_n=\dfrac{u_n}{6}$ ومنه $v_n=3\times 2^{n-1}-1$

كحالة خاصة $v_6=3\times 2^5-1=3\times 32-1=95=5\times 19$ اذن v_6 ليس عدد اولي وبالتالي يوجد على الأقل عدد طبيعي بحيث v_n ليس اوليا. الجملة اذن ليست صحيحة

(4) (أ) برهان انه من اجل كل $n\geq 1$: $v_{n+1}-2v_n=1$:

$v_{n+1}-2v_n=\dfrac{u_{n+1}}{6}-2\dfrac{u_n}{6}=\dfrac{1}{6}\left(u_{n+1}-2u_n\right)$ ومنه $v_{n+1}-2v_n=\dfrac{1}{6}\left(2u_n+6-2u_n\right)=1$

(ب) استنتاج ان v_n و v_{n+1} اوليان فيما بينهما : من العلاقة السابقة لدينا $v_{n+1}-2v_n=1$ و هذه تكتب $1\times v_{n+1}+(-2)v_n=1$ ومنه يوجد عددان صحيحان a و b بحيث : $a\times v_{n+1}+b\times v_n=1$ وحسب مبرهنة بيزو فان العددين v_n و v_{n+1} اوليان فيما بينهما

(ج) استنتاج القاسم المشترك الاكبر لـ : u_n و u_{n+1} :

لدينا $u_{n+1}=6\times v_{n+1}$ و $u_n=6\times v_n$ وحيث v_n و v_{n+1} اوليان فيما بينهما

اذن $PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)=PGCD\left(6v_{n+1};6v_n\right)=6\times PGCD\left(v_{n+1};v_n\right)=6\times 1=6$

اذن من اجل $n\geq 1$: $PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)=6$

(5) (أ) التأكد ان : $2^4\equiv 1[5]$ واضح لان $2^4=16=1+3\times 5\equiv 1[5]$

(ب) استنتاج انه اذا كان $n=4k+2$ فان u_n يقبل القسمة على 5 اي $u_n\equiv 0[5]$

لدينا $u_n=9\times 2^n-6$ فاذا كان $n=4k+2$ فان $2^n=2^{4k+2}=\left(2^4\right)^k\times 2^2$

ومن السؤال السابق $2^4\equiv 1[5]$ ومنه $\left(2^4\right)^k\equiv 1[5]$ وبالتالي $\left(2^4\right)^k\times 2^2\equiv 2^2[5]$ اذن $2^n\equiv 4[5]$

ومنه نستنتج ان $9\times 2^{n}-6\equiv 9\times 4-6[5]$ اي $9\times 2^{n}-6\equiv 30[5]$ اذن $u_n\equiv 0[5]$

وهكذا ينتج ان $u_n\equiv 0[5]$ مضاعف للعدد u_n 5

(ج) باقي قسمة u_n على 5 من اجل القيم الأخرى للعدد n :

ليكن n عددا طبيعيا . العدد n يكتب اما على الشكل $n=4k$ او $n=4k+1$ او $n=4k+3$

اذا كان $n=4k$ فان : $2^{n}\equiv 2^{4k}\equiv 1[5]$ ثم $u_n\equiv 9\times 1-6[5]$ اي $u_n\equiv 3[5]$ اذن u_n لا يقبل القسمة على 5

اذا كان $n=4k+1$ فان $2^{n}=2^{4k+1}=2^{4k}\times 2\equiv 2[5]$ ثم $u_n\equiv 9\times 2-6[5]\equiv 2[5]$

اذن u_n لا يقبل القسمة على 5

اذا كان $n=4k+3$ فان $2^{n}=2^{4k+3}=2^{4k}\times 2^{3}\equiv 3[5]$ ثم $u_n\equiv 1[5]$ اذن u_n لا يقبل القسمة على 5

الخلاصة : من اجل كل $n\geq 0$ فان u_n يقبل القسمة على 5 اذا وفقط اذا كان $n=4k+2$ حيث k طبيعي