

تمارين محلولة في الأعداد والحساب

www.facebook.com/bac35

www.bac35.com

$A \equiv B[C]$

$ppcm$

$pgcd$

شعبي:

رياضي

تقني رياضي

إعداد:

عبد العزيز مصطفاي

التمرين 01:

n عدد صحيح . نضع $a = 3n + 7$ و $b = n + 1$.
- أثبت أنه إذا كان العدد d قاسماً لـ a و b فإن d يكون قاسماً للعدد 4 .

الحل:

لدينا d يقسم a و b ومنه d يقسم $a - 3b$ ولدينا $a - 3b = 3n + 7 - 3n - 1 = 4$ إذن d يقسم العدد 4 .

التمرين 02:

ليكن n عدداً طبيعياً أكبر من أو يساوي 3 .
برهن أن: $n + 5$ مضاعف لـ $n - 2$ إذا وفقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$

الحل:

$n + 5 \equiv 0 [n - 2]$ معناه $n - 2 \mid n + 5$ أي $n - 2 \mid 7$ ومنه $n - 2 \in \{1, 7\}$ أي $n = 3$ أو $n = 9$.

التمرين 03:

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n - 1$ و $n^2 + n + 3$.

أ - بين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$.

ب - استنتج أن a يقسم $3n + 2$.

ج - بين إذن أن a يقسم 5 .

د - ماهي القيم الصحيحة الممكنة لـ a .

الحل:

أ - تبين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$.

لدينا a يقسم $n - 1$ ومنه a يقسم $(n - 1)^2$ أي a يقسم $n^2 - 2n + 1$.

ب - استنتج أن a يقسم $3n + 2$.

لدينا a يقسم $n^2 - 2n + 1$ و a يقسم $n^2 + n + 3$ ومنه a يقسم $(n^2 + n + 3) - (n^2 - 2n + 1)$ أي a يقسم $3n + 2$.

ج - تبين أن a يقسم 5 .

a قاسم لـ $3n + 2$ و قاسم لـ $n - 1$ إذن a قاسم لـ $3(n - 1) + 2 = 3n - 1$ أي a قاسم للعدد 5 .

لدينا a قاسم للعدد 5 إذن $a \in \{1, 5, -1, -5\}$.

التمرين 04:

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

1. $3n \equiv 4 [5]$

2. $n^2 \equiv 4 [5]$

3. $n^2 \equiv n [5]$

4. $5n \equiv 2 [7]$

5. $n^2 - 3n + 4 \equiv 0 [7]$

6. $n^2 + n \equiv 0 [n + 2]$

الحل:

1.

$n \equiv$	1	2	3	4	$[5]$
$3n \equiv$	3	1	4	2	$[5]$

$3n \equiv 4 [5]$ يعني $n \equiv 3 [5]$ أي $n = 5p + 3$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

طريقة 2: $3n \equiv 4 [5]$ معناه $6n \equiv 8 [5]$ لكن $6n \equiv 1 [5]$ و $8 \equiv 3 [5]$ ومنه $n \equiv 3 [5]$ أي $n = 5p + 3$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

2.

$n \equiv$	1	2	3	4	$[5]$
$n^2 \equiv$	1	4	4	1	$[5]$

$n^2 \equiv 4[5]$ يعني $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv 3[5]$ أي $n = 5p + 2$ أو $n = 5p + 3$ مع $p \in \mathbb{N}$.
طريقة 2: $n^2 \equiv 4[5]$ يعني $n^2 - 4 \equiv 0[5]$ ومنه $(n-2)(n+2) \equiv 0[5]$ أي $n-2 \equiv 0[5]$ أو $n+2 \equiv 0[5]$ لأن العدد 5 أولي؛ ومنه $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv -2[5]$ وعليه $n \equiv 2[5]$ أو $n \equiv 3[5]$ وبالتالي $n = 5p + 2$ أو $n = 5p + 3$ مع $p \in \mathbb{N}$.

3.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	$[5]$

$n^2 \equiv n[5]$ يعني $n \equiv 0[5]$ أو $n \equiv 1[5]$ أي $n = 5p$ أو $n = 5p + 1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

طريقة 2: $n^2 \equiv n[5]$ يعني $n^2 - n \equiv 0[5]$ ومنه $n(n-1) \equiv 0[5]$ أي $n \equiv 0[5]$ أو $n-1 \equiv 0[5]$ لأن العدد 5

أولي؛ ومنه $n \equiv 0[5]$ أو $n \equiv 1[5]$ وعليه $n = 5p$ أو $n = 5p + 1$ مع $p \in \mathbb{N}$.

4. لدينا $5n \equiv 2[7]$ و $5+2 \equiv 0[7]$ أي $2 \equiv -5[7]$ ومنه $5n \equiv -5[7]$ وعليه $n \equiv -1[7]$ وبالتالي $n \equiv 6[7]$ أي $n = 7p + 6$ مع $p \in \mathbb{N}$.

5. $n^2 - 3n + 4 \equiv 0[7]$ و $3+4 \equiv 0[7]$ أي $4 \equiv -3[7]$ ومنه $n^2 + 4n + 4 \equiv 0[7]$ ومنه $(n+2)^2 \equiv 0[7]$ إذن

$n+2 \equiv 0[7]$ ومنه $n \equiv -2[7]$ إذن $n \equiv 5[7]$ أي $n = 7k + 5$ مع $k \in \mathbb{N}$.

6. $n^2 + n \equiv 0[n+2]$ تعني $n(n+1) \equiv 0[n+2]$ والعددين $n+1$ و $n+2$ أوليان فيما بينهما لأنهما عددين طبيعيين

متتابعين إذن حسب مبرهنة غوص يكون $n \equiv 0[n+2]$ ولدينا $n+2 \equiv 0[n+2]$ إذن بالطرح نجد

$n+2-n \equiv 0[n+2]$ أي $2 \equiv 0[n+2]$ ومنه $n+2 \in \{1, 2\}$ أي $n = 0$ أو $n = -1$ (مرفوض).

التمرين 05:

n عدد صحيح يختلف عن 1.

نضع $a = 3n + 5$ و $b = n - 1$.

1- أ- تحقق أن: $a = 3b + 8$.

ب - جد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

2- نفرض أن n عدد طبيعي.

أ - برهن أن $\gcd(a; b) = p$ هو قاسم للعدد 8.

ب - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\gcd(a; b) = 8$.

الحل:

1- أ- التحقق أن: $a = 3b + 8$

$a - 3b = 3n + 5 - 3(n - 1) = 8$ ومنه $a = 3b + 8$.

ب - إيجاد قيم العدد الصحيح n التي يكون من أجلها $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا.

لدينا $\frac{a}{b} = \frac{3b + 8}{b} = 3 + \frac{8}{b}$.

$\frac{a}{b}$ عدد صحيح معناه $b \in \{1, 2, 4, 8\}$ ومنه $n - 1 \in \{1, 2, 4, 8\}$ أي $n \in \{2, 3, 5, 9\}$.

2. أ - برهان أن $\gcd(a; b) = p$ هو قاسم للعدد 8.

نضع $\gcd(a; b) = d$ لدينا إذن d يقسم a ويقسم b ومنه d يقسم a ويقسم $3b$ فهو يقسم $a - 3b$ أي d قاسم للعدد 8.

ب - تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\gcd(a; b) = 8$.

$d = 8$ معناه كل من a و b مضاعف للعدد 8 ومعناه a مضاعف لـ 8 و $2b$ مضاعف لـ 8 ومنه $a - 2b$ مضاعف لـ 8 ولدينا $a - 2b = 3n + 5 - 2n + 2 = n + 7$ ومنه $n + 7 = 8k$ أي $n = 8k - 7$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.
يمكن الاعتماد على الموافقات.

$$d = 8 \text{ معناه } \begin{cases} a \equiv 0[8] \\ b \equiv 0[8] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 3n + 5 \equiv 0[8] \\ n - 1 \equiv 0[8] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 3n \equiv -5[8] \\ n \equiv 1[8] \end{cases} \text{ وعليه } \begin{cases} 3n \equiv 3[8] \\ n \equiv 1[8] \end{cases} \text{ أي } n \equiv 1[8] \text{ وبالتالي } n = 8p + 1 \text{ مع } p \in \mathbb{N}.$$

التمرين 06:

n عدد طبيعي حيث $n \geq 5$ ، نعتبر العددين x و y حيث:

$$x = 2n^2 - 7n - 4, \quad y = n^3 - n^2 - 12n.$$

1- بين أن كل من العددين x و y يقبل $(n-4)$.

2- نضع: $\alpha = 2n + 1$ ، $\beta = n + 3$ و $d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$.

أ- عين القيم الممكنة للعدد d .

ب- برهن أنه إذا كان: $\alpha \equiv 0[5]$ و $\beta \equiv 0[5]$ فإن $n - 2 \equiv 0[5]$.

ج- عين قيم n التي يكون من أجلها $d = 5$.

3- برهن أن: $\text{PGCD}(\alpha; n) = 1$.

4- أ- عين حسب قيم العدد $\text{PGCD}(x; y)$.

ب- تحقق من النتيجة السابقة من أجل $n = 7$ ، $n = 8$.

الحل:

1- تبين أن كل من العددين x و y يقبل القسمة على $(n-4)$.

من أجل $n = 4$:

$$\text{لدينا } 0 = 32 - 28 - 4 = 2 \times 4^2 - 7 \times 4 - 4 = x \text{ إذن } x \text{ يقبل القسمة على } (n-4).$$

$$\text{ولدينا } 0 = 64 - 16 - 48 = 4^3 - 4^2 - 12 \times 4 = y \text{ إذن } y \text{ يقبل القسمة على } (n-4).$$

2. أ- تعيين القيم الممكنة للعدد d .

لدينا d يقسم α و يقسم β إذن d يقسم أي مزج خطي بين α و β أي يقسم $2\beta - \alpha$ ولدينا $2\beta - \alpha = 5$ ومنه d يقسم 5 إذن $d \in \{1, 5\}$.

ب- برهان أنه إذا كان: $\alpha \equiv 0[5]$ و $\beta \equiv 0[5]$ فإن $n - 2 \equiv 0[5]$.

$$\text{معناه } \begin{cases} 2n + 1 \equiv 0[5] \\ n + 3 \equiv 0[5] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \alpha \equiv 0[5] \\ \beta \equiv 0[5] \end{cases} \text{ أي } (2n + 1) - (n + 3) \equiv 0[5] \text{ أي } n - 2 \equiv 0[5]$$

ج- تعيين قيم n التي يكون من أجلها $d = 5$.

$d = 5$ معناه $\alpha \equiv 0[5]$ و $\beta \equiv 0[5]$ ومنه $n - 2 \equiv 0[5]$ إذن $n \equiv 2[5]$ أي $n = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{N}$.

3- تبين أن: $\text{PGCD}(\alpha; n) = 1$.

تذكير: a و b أوليان فيما بينهما إذا وُجد عدنان صحيحان u و v بحيث $ua + vb = 1$.

لدينا $\alpha - 2n = 1$ إذن حسب ميرهنة بيزو العدنان α و n أوليان فيما بينهما وبالتالي $\text{PGCD}(\alpha; n) = 1$.

4- أ- تعيين حسب قيم العدد $\text{PGCD}(x; y)$.

$$\text{لدينا } x = (n-4)(n^2 + 3n) \text{ ومنه } x = (n-4)n(n+3) \text{ أي } x = (n-4)n\beta$$

$$\text{و } y = (n-4)(2n+1) \text{ أي } y = (n-4)\alpha$$

$$\text{ولدينا العدنان } \alpha \text{ و } n \text{ أوليان فيما بينهما ومنه } \text{PGCD}(x; y) = \text{PGCD}((n-4)n\beta; (n-4)\alpha)$$

$$= (n-4)\text{PGCD}(n\beta; \alpha) \text{ ومنه } \text{PGCD}(x; y) = \text{PGCD}(n\beta; \alpha)$$

$$\text{إذن } PGCD(x; y) = (n-4)PGCD(\beta; \alpha)$$

لدينا حسب ما سبق إذا كان $n = 5k + 2$ فإن $PGCD(\beta; \alpha) = 5$ ومنه $PGCD(x; y) = 5(n-4)$.

إذا كان $n \neq 5k + 2$ فإن $PGCD(\beta; \alpha) = 1$ ومنه $PGCD(x; y) = n-4$.

ب - التحقق من النتيجة السابقة من أجل $n = 7$ ، $n = 8$.

من أجل $n = 7$ أي $n = 5 \times 1 + 2$ إذن $PGCD(\beta; \alpha) = 5$.

لدينا $x = 2 \times 7^2 - 7 \times 7 - 4 = 45$ و $y = 7^3 - 7^2 - 12 \times 7 = 210$ إذن $PGCD(x; y) = 15$ ومنه

$$PGCD(x; y) = 5(7-4)$$

من أجل $n = 8$ أي $n \neq 5k + 2$.

لدينا $x = 2 \times 8^2 - 7 \times 8 - 4 = 68$ و $y = 8^3 - 8^2 - 12 \times 8 = 352$ إذن $PGCD(x; y) = 4$ ومنه

$$PGCD(x; y) = 8-4 \text{ أي } PGCD(x; y) = n-4$$

التمرين 07: بكالوريا شعبة رياضيات 2013

1. n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β ، حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.

أ - بين أن: $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب - ماهي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$.

ج - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $PGCD(\alpha; \beta) = 5$.

2. أ - ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:
$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

الحل

أ - تبين أن: $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 14)$.

بإجراء القسمة الإقليدية للعدد α على β نجد $\alpha = \beta(2n^2 - 6n + 4) - 10$ وبوضع $q = 2n^2 - 6n + 4$ نجد

$$\alpha = \beta q - 10$$

نضع $PGCD(\alpha; \beta) = d$ و $PGCD(\beta; 10) = d'$.

لدينا $\alpha = \beta q - 10$ ومنه $10 = \beta q - \alpha$.

لدينا d يقسم β ومنه d يقسم βq ويقسم α إذن d يقسم $\beta q - \alpha$ أي d يقسم 10 ومنه d قاسم مشترك للعددين β و 10 وبالتالي d يقسم d' .

ولدينا d' يقسم β ومنه d' يقسم βq ويقسم 10 إذن d' يقسم $\beta q - 10$ أي d' يقسم α ومنه d' قاسم مشترك للعددين

α و β وبالتالي d' يقسم d وبما أن d يقسم d' فإن $d = d'$ إذن $PGCD(\alpha; \beta) = PGCD(\beta; 14)$.

ب - القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha; \beta)$.

بما أن d يقسم 10 فإن $d \in \{1, 2, 5, 10\}$.

ج - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، بحيث يكون $PGCD(\alpha; \beta) = 5$.

$PGCD(\alpha; \beta) = 5$ تعني $PGCD(\beta; 10) = 5$ إذن β مضاعف للعدد 5 وليس مضاعف للعدد 10 أي $\beta = 5k$ و

$k = 2\lambda + 1$ ومنه $\beta = 5(2\lambda + 1)$ معناه $\beta = 10\lambda + 5$ إذن $n + 3 = 10\lambda + 5$ أي $n = 10\lambda + 2$ مع $\lambda \in \mathbb{N}$.

2. أ - دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

$$4^0 \equiv 1[11], 4^1 \equiv 4[11], 4^2 \equiv 5[11], 4^3 \equiv 9[11], 4^4 \equiv 3[11] \text{ و } 4^5 \equiv 1[11]$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي p ؛ $4^{5p} \equiv 1[11]$ ، $4^{5p+1} \equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2} \equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3} \equiv 9[11]$ و $4^{5p+4} \equiv 3[11]$.

ب - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} 1 + 4^{10\lambda+2} + 10\lambda + 2 \equiv 0[11] \\ n = 10\lambda + 2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 4^{5 \times 2\lambda+2} + 10\lambda + 3 \equiv 0[11] \\ n = 10\lambda + 2 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} 10\lambda \equiv -8[11] \\ n = 10\lambda + 2 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} -\lambda \equiv -8[11] \\ n = 10\lambda + 2 \end{cases} \text{ ومعناه } \begin{cases} \lambda = 11\mu + 8 \\ n = 10\lambda + 2 \end{cases} \text{ إذن } n = 10(11\mu + 8) + 2 \text{ أي } n = 110\mu + 82$$

حيث μ عدد طبيعي.

التمرين 08:

1. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.
2. برهن، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $A = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1$ يقبل القسمة على 11.
3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$

الحل:

1. دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.
 $4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$
 إذن من أجل كل عدد طبيعي p ؛ $4^{5p} \equiv 1[11]$ ، $4^{5p+1} \equiv 4[11]$ ، $4^{5p+2} \equiv 5[11]$ ، $4^{5p+3} \equiv 9[11]$ و $4^{5p+4} \equiv 3[11]$.
2. تبين، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن العدد $A = 15^{5n+1} - 2 \times 26^{5n+2} + 3 \times 125^{5n+3} + 1$ يقبل القسمة على 11.
 لدينا $15 \equiv 4[11]$ ومنه $15^{5n+1} \equiv 4^{5n+1}[11]$ أي $15^{5n+1} \equiv 4[11]$
 و $26 \equiv 4[11]$ ومنه $26^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11]$ أي $26^{5n+2} \equiv 5[11]$
 و $125 \equiv 4[11]$ ومنه $125^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11]$ أي $125^{5n+3} \equiv 9[11]$
 إذن $A \equiv 4 - 2 \times 5 + 3 \times 9 + 1[11]$ ومنه $A \equiv 22[11]$ أي $A \equiv 0[11]$ إذن العدد A يقبل القسمة على 11.
3. تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $\begin{cases} 15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11] \\ 8 \leq n \leq 50 \end{cases}$
 $15^{5n+1} + 26^{5n+2} + 3n \equiv 0[11]$ تعني $4 + 5 + 3n \equiv 0[11]$ تكافئ $9 + 3n \equiv 0[11]$ تكافئ $3(3+n) \equiv 0[11]$ وبما أن العددين 3 و 11 أوليان فيما بينهما فإن $3+n \equiv 0[11]$ ومنه $n \equiv -3[11]$ أي $n \equiv 8[11]$ إذن $n = 11k + 8$ مع $k \in \mathbb{N}$.
 لدينا $8 \leq n \leq 50$ معناه $8 \leq 11k + 8 \leq 50$ يكافئ $0 \leq 11k \leq 42$ أي $0 \leq k \leq 3.8$ ومنه $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ أي $n \in \{8, 19, 30, 41\}$.

التمرين 09:

- 1- عين الأعداد الصحيحة x والتي تحقق $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$.
- 2- أ) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9، ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7^{2n} \equiv 4^n[9]$.

ب) استنتج تبعا لقيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9.

ج) عين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون: $\begin{cases} 4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha - 4 \equiv 0[9] \\ 2010 \leq \alpha \leq 2020 \end{cases}$

3- ما هو باقي قسمة العدد $5^{2010} + 25^{2011}$ على 9؟

4- عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9.

5- عين الثنائيات الطبيعية $(x; y)$ بحيث: $7^x + 4^y \equiv 2[9]$.

الحل

1- تعيين الأعداد الصحيحة x والتي تحقق $x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$.

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	[9]
$x^2 \equiv$	0	1	4	0	7	7	0	5	1	[9]
$x^2 - x + 6 \equiv$	6	6	8	3	0	8	0	4	8	[9]

$x^2 - x + 6 \equiv 0[9]$ معناه $x \equiv 4[9]$ أو $x \equiv 6[9]$ أي $x = 9k + 4$ أو $x = 9k + 6$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

2- (أ) دراسة تبعا لقيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9.

$$7^0 \equiv 1[9], 7^1 \equiv 7[9], 7^2 \equiv 4[9], 7^3 \equiv 1[9].$$

إن من أجل كل عدد طبيعي p ، $7^{3p} \equiv 1[9]$ ، $7^{3p+1} \equiv 7[9]$ ، $7^{3p+2} \equiv 4[9]$.

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4

تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $7^{2n} \equiv 4^n[9]$.

لدينا $7^2 \equiv 4[9]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $(7^2)^n \equiv 4^n[9]$ أي $7^{2n} \equiv 4^n[9]$.

(ب) استنتاج تبعا لقيم n الطبيعية باقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 9.

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7

(ج) تعيين قيم العدد الطبيعي α حتى يكون:

$$4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha - 4 \equiv 0[9]$$

معناه $4^n + 4^{n+1} + 4^{n+2} + \alpha - 4 \equiv 0[9]$ ومنه $21 \times 4^n + \alpha - 5 \equiv 0[9]$ ولدينا

$$3 \times 4^n + \alpha - 4 \equiv 0[9] \text{ إذن } 21 \equiv 3[9]$$

n	$3p$	$3p+1$	$3p+2$
باقي قسمة 4^n على 9	1	4	7
باقي قسمة 3×4^n على 9	3	3	3

وعليه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 \times 4^n \equiv 3[9]$ إذن $3 \times 4^n + \alpha - 4 \equiv 0[9]$ تكافئ $\alpha - 1 \equiv 0[9]$ أي $\alpha = 9p + 1$

ولدينا $2010 \leq \alpha \leq 2020$ معناه $2010 \leq 9p + 1 \leq 2020$ أي $223.22 \leq p \leq 224.33$ وعليه $p = 224$ وبالتالي

$$\alpha = 2017.$$

3- تعيين باقي قسمة العدد $5^{2010} + 25^{2011}$ على 9.

نعلم أن $2010 = 3 \times 670$ و $2011 = 3 \times 670 + 1$.

لدينا $25 \equiv 7[9]$ ومنه $25^{2011} \equiv 7^{2011}[9]$ إذن $25^{2011} \equiv 7^{3 \times 670 + 1}[9]$ أي $25^{2011} \equiv 1[9]$.

و لدينا $5 + 4 \equiv 0[9]$ ومنه $5 \equiv -4[9]$ إذن $5^{2010} \equiv (-4)^{2010} [9]$ وعليه $5^{2010} \equiv 4^{3 \times 670} [9]$ أي $5^{2010} \equiv 1[9]$.
 إذن $5^{2010} + 25^{2011} \equiv 1 + 1[9]$ أي $5^{2010} + 25^{2011} \equiv 2[9]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $5^{2010} + 25^{2011}$ على 9 هو 2.
 4- **تعيين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9.**

n	$3p$	$3p + 1$	$3p + 2$
باقي قسمة 7^n على 9	1	7	4
باقي قسمة 7^{2n} على 9	1	4	7
باقي قسمة $7^{2n} - 7^n + 6$ على 9	6	3	0

إذا كان $n = 3p + 2$ حيث $p \in \mathbb{N}$ فإن العدد $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9
 يمكن استعمال نتيجة السؤال الأول:

$$x^2 - x + 6 \equiv 0[9] \text{ معناه } x \equiv 4[9] \text{ أو } x \equiv 6[9].$$

ومنه $7^{2n} - 7^n + 6$ مضاعفا للعدد 9 معناه $7^n \equiv 4[9]$ أي $n = 3p + 2$ أو $7^n \equiv 6[9]$ وهذا غير ممكن لأن بواقي 7^n على 9 هي 1، 7 أو 4.

6- **تعيين الثنائيات الطبيعية $(x; y)$ بحيث: $7^x + 4^y \equiv 2[9]$.**

x	$3p$	$3p + 1$	$3p + 2$
باقي قسمة 7^x على 9	1	7	4

y	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
باقي قسمة 4^y على 9	1	4	7

$7^x + 4^y \equiv 2[9]$ معناه $(x; y) = (3p; 3k)$ أو $(x; y) = (3p + 1; 3k + 1)$ أو $(x; y) = (3p + 2; 3k + 2)$ وعليه
 $(x; y) \in \{(3p; 3k), (3p + 1; 3k + 1), (3p + 2; 3k + 2)\}$.

التمرين 10:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E) \dots\dots (x + 1)^2 = 9 + 5y$.

1. إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) ؛ بين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3. بين أنه، إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $PGCD(x; y)$ يقسم 8.

$$4. \text{ حل في } \mathbb{N}^2 \text{ الجملة: } \begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ PGCD(x; y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$

الحل:

تبين أن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$.

$$(x + 1)^2 = 9 + 5y \text{ معناه } (x + 1)^2 \equiv 9[5] \text{ أي } (x + 1)^2 \equiv 4[5].$$

$x \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$x + 1$	1	2	3	4	0	$[5]$
$(x + 1)^2$	1	4	4	1	0	$[5]$

$$(x+1)^2 \equiv 4[5] \text{ معناه } x \equiv 1[5] \text{ أو } x \equiv 2[5].$$

2. حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

إذا كان $x \equiv 1[5]$ أي $x = 5k + 1$ لدينا $(5k + 1 + 1)^2 = 9 + 5y$ ومنه $25k^2 + 20k + 4 = 9 + 5y$ يكافئ $5y = 25k^2 + 20k - 5$ أي $y = 5k^2 + 4k - 1$ وعليه $(x, y) \in (5k + 1, 5k^2 + 4k - 1)$.

إذا كان $x \equiv 2[5]$ أي $x = 5k + 2$ لدينا $(5k + 2 + 1)^2 = 9 + 5y$ ومنه $25k^2 + 30k + 9 = 9 + 5y$ يكافئ $5y = 25k^2 + 30k$ أي $y = 5k^2 + 6k$ وعليه $(x, y) \in (5k + 2, 5k^2 + 6k)$.

3. تبين أنه، إذا كانت الثانية (x, y) حلاً للمعادلة (E) فإن $PGCD(x, y)$ يقسم 8.

$(x+1)^2 = 9 + 5y$ تكافئ $x^2 + 2x + 1 = 9 + 5y$ أي $x^2 + 2x - 5y = 8$ أي $(x+2)x - 5y = 8$.
نضع $PGCD(x, y) = d$.

لدينا d يقسم x ومنه d يقسم $(x+2)x$ ويقسم y إذن d يقسم $(x+2)x - 5y$ أي d يقسم 8.

$$4. \text{ حل في } \mathbb{N}^2 \text{ الجملة: } \begin{cases} 121^x = 59^y \\ PGCD(x, y) = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases} (1).$$

$$(1) \text{ تكافئ } \begin{cases} 1 + 2x + x^2 = 9 + 5y \\ PGCD(x, y) = 8 \\ x = 5k + 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 1 \times x^0 + 2x + 1 \times x^2 = 9 \times y^0 + 5y \\ PGCD(x, y) = 8 \\ x = 5k + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 5k^2 + 4k - 1 \end{cases} \text{ وعليه } \begin{cases} (x+1)^2 = 9 + 5y \dots (E) \\ PGCD(x, y) = 8 \\ x = 5k + 1 \end{cases}$$

$PGCD(x, y) = 8$ يعني $x \equiv 0[8]$ و $y \equiv 0[8]$ ومنه $5k + 1 \equiv 0[8]$ ومنه $5k \equiv -1[8]$ ومعناه $15k \equiv -3[8]$

ولدينا $15 \equiv -1[8]$ إذن $-k \equiv -3[8]$ أي $k = 8\alpha + 3$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ وبالتالي

$$\begin{cases} x = 5(8\alpha + 3) + 1 \\ y = 5(8\alpha + 3)^2 + 4(8\alpha + 3) - 1 \end{cases} \text{ أي}$$

$$\text{حيث } \alpha \in \mathbb{N} \begin{cases} x = 40\alpha + 16 \\ y = 320\alpha^2 + 272\alpha + 56 \end{cases}$$

التمرين 11:

1. عَيّن $PGCD(2688; 3024)$.

2. أ - تحقق أن المعادلتين $2688x + 3024y = -3360 \dots (1)$ و $8x + 9y = -10 \dots (2)$ متكافئتان.

ب - تحقق أن $(1; -2)$ حل للمعادلة (2).

3. نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المستويين (P) و (P') اللذين معادلتيهما على

$$\text{الترتيب: } x + 2y - z = -2 \text{ و } 3x - y + 5z = 0.$$

أ - بين أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d) .

ب - بين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2)، ثم استنتج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

❖ الحل ❖

1. تعيين $PGCD(2688; 3024)$.

لدينا $2688 = 2^7 \times 3 \times 7$ و $3024 = 2^4 \times 3^3 \times 7$ ومنه $PGCD(2688; 3024) = 2^4 \times 3 \times 7$ أي $PGCD(2688; 3024) = 336$.

2. أ - التحقق أن المعادلتين (1) $2688x + 3024y = -3360$ و (2) $8x + 9y = -10$ متكافئتان.

$$(1) \text{ تكافئ } 336(8x + 9y) = -3360 \text{ تكافئ } 8x + 9y = \frac{-3360}{336} \text{ أي } 8x + 9y = -10$$

ب - التحقق أن (1; -2) حل للمعادلة (2).

لدينا $8 \times 1 + 9 \times (-2) = 8 - 18 = -10$ إذن (1; -2) حل للمعادلة (2).

2. أ - تبين أن المستويين (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d).

لدينا $\vec{n}(1; 2; -1)$ و $\vec{n}'(3; -1; 5)$ شعاعان ناظميان للمستويين (P) و (P') على الترتيب و $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$ ومنه $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ غير

مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان (P) و (P') يتقاطعان وفق مستقيم (d).

ب - تبين أن إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء

$$M \in (d) \text{ معناه } \begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 5x + 10y - 5z = -10 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases} \text{ أي } 8x + 9y = -10$$

ومنه إحداثيات نقط (d) تحقق المعادلة (2).

استنتاج (E) مجموعة نقط (d) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

نحل المعادلة (2).

$$\text{لدينا } \begin{cases} 8x + 9y = -10 \\ 8x + 9y = -10 \end{cases} \text{ بالطرح نحصل على } 8(x-1) + 9(y+2) = 0 \text{ أي } 8(x-1) = -9(y+2) \text{ لدينا 9}$$

يقسم $8(x-1)$ والعددان 9 و 8 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 9 يقسم $x-1$ ومنه $x-1 = 9k$ أي $x = 9k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في $8(x-1) = -9(y+2)$ نجد $8 \times 9k = -9(y+2)$ ومنه $y+2 = -8k$ أي $y = -8k - 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن إحداثيات النقطة M من الشكل $M(9k+1; -8k-2; z)$ ولدينا $M \in (P)$ معناه $9k+1-16k-4-z = -2$ أي $z = -7k-1$ وبالتالي $M(9k+1; -8k-2; -7k-1)$ حيث k عدد صحيح.

❖ التمرين 12: ❖

1- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x', y') : $9x' - 14y' = 13$ علماً أن (3,1) حلاً لها2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $45x - 28y = 130$ بين أنه إذا كان (x, y) حلاً لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5، ثم حل

هذه المعادلة.

3- N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام تعداد أساسه 9 و $5\beta\beta6$ في نظام تعداد أساسه 7.عَيِّن α و β ، ثم اكتب N في النظام العشري.

❖ الحل ❖

1- حل في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x', y') : $9x' - 14y' = 13$ علماً أن (3,1) حلاً لها

$$\left\{ \begin{array}{l} 9x' - 14y' = 13 \\ 9(3) - 14(1) = 13 \end{array} \right. \quad \text{لدينا}$$

يقسم $(x' - 3)$ و 9 و 14 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص

14 يقسم $x' - 3$ ومنه $x' - 3 = 14k$ أي $x' = 14k + 3$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في $9(x' - 3) = 14(y' - 1)$ نجد

$$14(y' - 1) = 9 \times 14k \quad \text{ومنه } y' - 1 = 9k \quad \text{أي } y' = 9k + 1 \quad \text{مع } k \in \mathbb{Z}$$

2- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة ذات المجهول (x, y) : $45x - 28y = 130$

تبين أنه إذا كان (x, y) حلاً لهذه المعادلة فإن x مضاعف للعدد 2 و y مضاعف للعدد 5.

$$45x - 28y = 130 \quad \text{تكافئ } 45x = 28y + 130 \quad \text{أي } 45x = 2(y + 65) \quad \text{ومنه 2 يقسم } 45x \text{ والعددان 2 و 45 أوليان فيما}$$

بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 2 يقسم x أي x مضاعف للعدد 2.

$$\text{وكذلك لدينا } 28y = 45x - 130 \quad \text{أي } 28y = 5(x - 26) \quad \text{ومنه 5 يقسم } 28y \text{ والعددان 5 و 28 أوليان فيما بينهما إذن}$$

حسب مبرهنة غوص 5 يقسم y أي y مضاعف للعدد 5.

حل المعادلة.

$$x \text{ مضاعف للعدد 2 معناه } x = 2x' \text{ حيث } x' \in \mathbb{Z} \text{ و } y \text{ مضاعف للعدد 5 معناه } y = 5y' \text{ حيث } y' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{إذن } 45x - 28y = 130 \quad \text{تكافئ } 45 \times 2x' - 28 \times 5y' = 130 \quad \text{تكافئ } 10(9x' - 14y') = 130 \quad \text{أي } 9x' - 14y' = 13$$

$$\text{وحسب ما سبق } x' = 14k + 3 \text{ و } y' = 9k + 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{وعليه } x = 2(14k + 3) \text{ و } y = 5(9k + 1) \quad \text{أي } x = 28k + 6 \text{ و } y = 45k + 5 \quad \text{مع } k \in \mathbb{Z}.$$

3- N عدد طبيعي يكتب $2\alpha\alpha3$ في نظام تعداد أساسه 9 و $5\beta\beta6$ في نظام تعداد أساسه 7.

تعيين α و β ، ثم كتابة N في النظام العشري.

$$\text{لدينا } N = 3 \times 9^0 + \alpha \times 9^1 + \alpha \times 9^2 + 2 \times 9^3 \quad \text{ومنه } N = 3 + 9\alpha + 81\alpha + 1458 \quad \text{أي } N = 90\alpha + 1461 \text{ حيث}$$

$$0 \leq \alpha \leq 8 \quad \text{ومن جهة أخرى } N = 6 \times 7^0 + \beta \times 7^1 + \beta \times 7^2 + 5 \times 7^3 \quad \text{أي } N = 56\beta + 1721$$

$$\text{حيث } 0 \leq \beta \leq 6 \quad \text{وعليه } 90\alpha + 1461 = 56\beta + 1721 \quad \text{ومنه } 90\alpha - 56\beta = 260$$

$$45\alpha - 28\beta = 130 \quad \text{وحسب ماسبق } \alpha = 28k + 6 \text{ و } \beta = 45k + 5 \quad \text{مع } k \in \mathbb{N} \quad \text{ولدينا } 0 \leq \alpha \leq 8 \text{ و } 0 \leq \beta \leq 6 \quad \text{معناه}$$

$$28k + 6 \leq 8 \quad \text{و } 45k + 5 \leq 6 \quad \text{أي } k \leq \frac{1}{14} \quad \text{و } k \leq \frac{1}{45} \quad \text{وعليه } k = 0 \quad \text{وبالتالي } \alpha = 6 \text{ و } \beta = 5$$

$$\text{إذن } N = 90 \times 6 + 1461 = 2001.$$

التمرين 13:

$$1. \text{ من أجل كل عدد حقيقي } t \text{ أنشر العبارة } (t-6)(t^2+1).$$

$$2. a, b \text{ و } c \text{ أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس } p \text{ كما يلي: } a = 102, b = 125, c = 13154.$$

أ - علما أن $ab = c$ جد قيمة العدد الحقيقي p .

ب - اكتب كلا من الأعداد a, b و c في النظام العشري.

$$3. \text{ نعتبر في } \mathbb{Z}^2 \text{ المعادلة: } (1) \quad 38x - 53y = 15 \dots\dots\dots$$

$$\text{أ - بين أنه إذا كانت الثنائية } (x; y) \text{ حلاً للمعادلة (1) فإن } x \equiv 52[53]$$

ب - استنتج حلول المعادلة (1).

$$4. \text{ نعتبر الآن } x \text{ و } y \text{ عددان طبيعيان ونسمي } d \text{ قاسمهما المشترك الأكبر.}$$

أ - عيّن القيم الممكنة للعدد d .

ب - جد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$.

$$5. \text{ أ - ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي } n, \text{ بواقي القسمة الإقليدية للعدد } 4^n \text{ على 7.}$$

$$\text{ب - من أجل كل } (x; y) \text{ من } \mathbb{N}^2 \text{ حلول المعادلة (1)؛ عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد } 2013^x \times 1432^{2y} \text{ على 7.}$$

❖ الحل ❖

1. نشر العبارة $(t-6)(t^2+1)$ من أجل كل عدد حقيقي t

$$(t-6)(t^2+1) = t^3 + t - 6t^2 - 6$$

2. a, b و c أعداد طبيعية تكتب في نظام التعداد ذي الأساس p كما يلي: $a = 102$ ، $b = 125$ و $c = 13154$.

أ - علما أن $ab = c$ إيجاد قيمة العدد الحقيقي p .

$$\text{لدينا } b = 5 \times p^0 + 2 \times p^1 + p^2 = 5 + 2p + p^2, a = 2 \times p^0 + 0 \times p^1 + p^2 = 2 + p^2$$

$$b = 4 \times p^0 + 5 \times p^1 + p^2 + 3p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$$

$$ab = c \text{ معناه } (2 + p^2)(5 + 2p + p^2) = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4$$

$$\text{ويكافئ } 10 + 4p + 2p^2 + 5p^2 + 2p^3 + p^4 = 4 + 5p + p^2 + 3p^3 + p^4 \text{ ويكافئ } p^3 - 6p^2 + p - 6 = 0$$

$$\text{أي } (t-6)(t^2+1) = 0 \text{ ومنه } t = 6.$$

ب - كتابة كلا من الأعداد a, b و c في النظام العشري.

$$c = 4 + 5 \times 6 + 6^2 + 3 \times 6^3 + 6^4 = 2014 \text{ و } b = 5 + 2 \times 6 + 6^2 = 53, a = 2 + 6^2 = 38$$

3. نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: (1) $38x - 53y = 15$

أ - بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $x \equiv 52[53]$

$$38x - 53y = 15 \text{ يكافئ } 38x = 15 + 53y \text{ وهذا يعني أن } 38x \equiv 15[53] \text{ ولدينا } 38 \equiv -15[53]$$

$$\text{ومنه } -15x \equiv 15[53] \text{ أي } x \equiv -1[53] \text{ وعليه } x \equiv 52[53].$$

ب - استنتاج حلول المعادلة (1).

لدينا $x = 53k + 52$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في (1) نجد $38(53k + 52) - 53y = 15$ ومنه $y = 38k + 37$ حيث

$k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(53k + 52; 38k + 37)$ و $k \in \mathbb{Z}$

4. نعتبر الآن x و y عدداً طبيعيين ونسمي d قاسمهما المشترك الأكبر.

أ - تعيين القيم الممكنة للعدد d .

لدينا d يقسم x و d يقسم y إذن d يقسم $38x - 53y$ أي d يقسم 15 وبالتالي $d \in \{1; 3; 5; 15\}$.

ب - إيجاد كل الثنائيات $(x; y)$ بحيث يكون $d = 15$.

نضع $x' = 15x$ و $y' = 15y$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما.

$$\text{نحصل على } 38 \times 15x' - 53 \times 15y' = 15 \text{ ومنه } 38x' - 53y' = 1 \text{ لدينا الثنائية } (7; 5) \text{ حلا خاصا للمعادلة}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} 38x' - 53y' = 1 \\ 38 \times 7 - 53 \times 5 = 1 \end{cases} \text{ بالطرح نجد } 38(x' - 7) - 53(y' - 5) = 0 \text{ أي } 38(x' - 7) = 53(y' - 5)$$

لدينا 53 يقسم $38(x' - 7)$ والعددان 38 و 53 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 53 يقسم $x' - 7$ ومنه

$$x' - 7 = 53\alpha \text{ أي } x' = 53\alpha + 7 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض في } 38(x' - 7) = 53(y' - 5) \text{ نجد}$$

$$38 \times 53\alpha = 53(y' - 5) \text{ ومنه } y' - 5 = 38\alpha \text{ أي } y' = 38\alpha + 5 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبما أن } 38x' - 53y' = 1 \text{ فإنه}$$

حسب مبرهنة بيزو يكون العدداً x' و y' أوليان فيما بينهما وبالتالي $x = 15(53\alpha + 7)$ أي $x = 795\alpha + 105$

$$\text{و } y = 15(38\alpha + 5) \text{ أي } y = 570\alpha + 75 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N}$$

5. أ - دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7.

$$\text{لدينا } 4^0 \equiv 1[7], 4^1 \equiv 4[7], 4^2 \equiv 2[7] \text{ و } 4^3 \equiv 1[7]$$

$$\text{وعليه من أجل كل عدد طبيعي } p, 4^{3p} \equiv 1[7], 4^{3p+1} \equiv 4[7] \text{ و } 4^{3p+2} \equiv 2[7].$$

ب - من أجل كل $(x; y)$ من $\mathbb{N}^2$ حلول المعادلة (1) تعيين باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7.

$$2013^x \times 1432^{2y} = 2013^{53k+52} \times 1432^{2(38k+37)}$$

لدينا $2013 \equiv 4[7]$ و $1432 \equiv 4[7]$ معناه $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{53k+52} \times 4^{2(38k+37)} [7]$

ويكافئ $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{129k+126} [7]$ ويكافئ $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 4^{3(43k+42)} [7]$ أي $2013^x \times 1432^{2y} \equiv 1[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $2013^x \times 1432^{2y}$ على 7 هو 1.

التمرين 14:

- 1- أثبت أن العدد 1999 أولي.
- 2- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر الأعداد :
 $a_n = 4 \cdot 10^n - 1$ ، $b_n = 2 \cdot 10^n - 1$ ، $c_n = 2 \cdot 10^n + 1$
- أ - احسب كلا من a_3 ، b_3 و c_3 .
- ب - أثبت أن العددين a_n ، c_n يقبلان القسمة على 3.
- ج - أثبت أن: $b_n c_n = a_{2n}$ ثم استنتج تحليل الجداء عوامل أولية للعدد a_6 .
- 3- برهن أن $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(b_n, 2)$ ، ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.
- 4- نعتبر المعادلة : $b_3 x + c_3 y = 1 \dots (*)$ ذات المجهولين x و y .
- باستعمال خوارزمية اقليدس ، عين حلا خاصا للمعادلة $(*)$ ، ثم عين حلول المعادلة $(*)$.

الحل:

- 1- إثبات أن العدد 1999 أولي.
- لدينا $\sqrt{1999} \approx 44.7$ والعدد 1999 لا يقبل القسمة على كل من الأعداد 1، 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41 و 43 فهو إذن عدد أولي.
2. أ - حساب كلا من a_3 ، b_3 و c_3 .
- $a_3 = 4 \times 10^3 - 1 = 3999$ ، $b_3 = 2 \times 10^3 - 1 = 1999$ و $c_3 = 2 \times 10^3 + 1 = 2001$
- ب - إثبات أن العددين a_n ، c_n يقبلان القسمة على 3.
- لدينا $10 \equiv 1[3]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $10^n \equiv 1[3]$ ولدينا $4 \equiv 1[3]$ إذن $4 \times 10^n \equiv 1[3]$ ومنه $4 \times 10^n - 1 \equiv 0[3]$ أي $a_n \equiv 0[3]$ وهذا يعني أن a_n يقبل القسمة على 3.
- ولدينا $10^n \equiv 1[3]$ معناه $2 \times 10^n \equiv 2[3]$ ومنه $2 \times 10^n + 1 \equiv 3[3]$ أي $c_n \equiv 0[3]$ وهذا يعني أن c_n يقبل القسمة على 3.
- ج - إثبات أن: $b_n c_n = a_{2n}$ واستنتج تحليل الجداء عوامل أولية للعدد a_6 .
- $b_n c_n = (2 \cdot 10^n - 1)(2 \cdot 10^n + 1) = (2 \cdot 10^n)^2 - 1 = 4 \cdot 10^{2n} - 1 = a_{2n}$
- إذن $a_6 = a_{2 \times 3} = b_3 c_3 = 1999 \times 2001 = 1999 \times 3 \times 23 \times 29$
- 3- برهان أن $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)$.
- لدينا $c_n = b_n + 2$ ومنه $PGCD(b_n, c_n) = PGCD(c_n, 2)$ ونضع $d = PGCD(b_n, c_n)$ ومنه $d = PGCD(c_n, 2)$ لدينا إذن $d \in \{1, 2\}$ وبما أن العدد c_n فردي فإن $d = 1$ أي أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

التمرين 15:

1. عين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $4x \equiv 33[5]$.
2. أ - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $4x - 5y = 33 \dots (E)$
- ب - استنتج حلول الجملة $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$ حيث $\lambda \in \mathbb{Z}$.
- ج - عين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x + y + 3| < 27$.
- 3 أ - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11.

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$.

ج - عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$$

4. N عدد طبيعي يكتب $abbaba$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 حيث $a \neq 0$. عين a و b بحيث يكون N قابلاً للقسمة على 33، ثم اكتب N في النظام العشري (لاحظ أن $11 \times 3 = 33$)

الحل

1. تعيين مجموعة الأعداد الصحيحة x بحيث: $4x \equiv 33[5]$.

لدينا $33 \equiv 3[5]$ و $4 \equiv -1[5]$ ومنه $4x \equiv 33[5]$ تعني $-x \equiv 3[5]$ تكافئ $x \equiv -3[5]$ ومنه $x \equiv 2[5]$ أي $x = 5k + 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

2. أ - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$: $4x - 5y = 33 \dots (E)$

(E) تكافئ $4x = 33 + 5y$ ومنه $4x \equiv 33[5]$ أي $x = 5k + 2$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في (E) نجد $4(5k + 2) - 5y = 33$ ومنه $5y = 20k - 25$ أي $y = 4k - 5$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن (E) تكافئ $(x, y) \in \{5k + 2, 4k - 5\}$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ب - استنتاج حلول الجملة

$$\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases} \text{ حيث } \lambda \in \mathbb{Z}$$

معناه $\begin{cases} \lambda \equiv 55[5] \\ \lambda \equiv 22[4] \end{cases}$ ومنه $4u + 22 = 5v + 55$ أي $4u - 5v = 33$ ومنه الثنائية (u, v) حل للمعادلة

(E) إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $u = 5k + 2$ ومنه $\lambda = 4(5k + 2) + 22$ أي $\lambda = 20k + 30$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ج - تعيين جميع الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق $|x + y + 3| < 27$.

$|x + y + 3| < 27$ تعني $|5k + 2 + 4k - 5 + 3| < 27$ ومنه $|9k| < 27$ يكافئ $-27 < 9k < 27$ أي $-3 < k < 3$ ومنه $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ وعليه $(x, y) \in \{(-8, -13), (-3, -9), (2, -5), (7, -1), (12, 3)\}$.

3 أ - دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 11.

لدينا $5^0 \equiv 1[11]$ ، $5^1 \equiv 5[11]$ ، $5^2 \equiv 3[11]$ ، $5^3 \equiv 4[11]$ ، $5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي p : $5^{5p} \equiv 1[11]$ ، $5^{5p+1} \equiv 5[11]$ ، $5^{5p+2} \equiv 3[11]$ ، $5^{5p+3} \equiv 4[11]$ و $5^{5p+4} \equiv 9[11]$.

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$.

لدينا $10 \equiv -1[11]$ ومنه $10^{10n} \equiv (-1)^{10n} [11]$ أي $10^{10n} \equiv 1[11]$.

و $16 \equiv 5[11]$ ومنه $16^{5n-4} \equiv 5^{5n-4} [11]$ يكافئ $16^{5n-4} \equiv 5^{(n-1)+1} [11]$ إذن $16^{5n-4} \equiv 5^{5p+1} [11]$ أي $16^{5n-4} \equiv 5[11]$.

و $27 \equiv 5[11]$ ومنه $27^{5n+2} \equiv 5^{5n+2} [11]$ أي $27^{5n+2} \equiv 3[11]$.

و $38 \equiv 5[11]$ ومنه $38^{5n+3} \equiv 5^{5n+3} [11]$ أي $38^{5n+3} \equiv 4[11]$.

و $49 \equiv 5[11]$ ومنه $49^{5n-1} \equiv 5^{5n-1} [11]$ يكافئ $49^{5n-1} \equiv 5^{(n-1)+4} [11]$ إذن $49^{5n-1} \equiv 5^{5p+4} [11]$ أي $49^{5n-1} \equiv 9[11]$.

إذن $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 1 + 5 + 3 + 4 + 9[11]$ ومنه

$10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 0[11]$ أي $10^{10n} + 16^{5n-4} + 27^{5n+2} + 38^{5n+3} + 49^{5n-1} \equiv 22[11]$.

ج - تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية:

$$\begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases}$$

$n \equiv 2[5]$ معناه $n = 5p + 2$ ومنه $5^n \equiv 3[11]$ إذن:

$$\begin{aligned} & \text{يكافئ} \begin{cases} n = 11\alpha + 3 \\ 11\alpha + 3 \equiv 2[5] \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} n = 11\alpha + 3 \\ n \equiv 2[5] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} n \equiv 3[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} n - 3 \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases} \text{ تعني } \begin{cases} n - 5^n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[5] \end{cases} \\ & \text{ولدينا } \begin{cases} n = 11\alpha + 3 \\ 11\alpha \equiv -1[5] \end{cases} \text{ إذن } -1 \equiv 4[5] \text{ و } 11 \equiv 1[5] \text{ أي } \begin{cases} n = 11(5p + 4) + 3 \\ \alpha \equiv 5p + 4 \end{cases} \\ & \text{مع } p \in \mathbb{N} \text{ أي } n = 55p + 47 \end{aligned}$$

4. تعيين a و b بحيث يكون N قابلاً للقسمة على 33، ثم اكتب N في النظام العشري (لاحظ أن $11 \times 3 = 33$)

$$N = \overline{abbaba} = a \times 4^0 + b \times 4^1 + a \times 4^2 + b \times 4^3 + a \times 4^4 + b \times 4^5$$

$$N = 1041a + 324b$$

$$N \equiv 0[33] \text{ يكافئ } N \equiv 0[3] \text{ و } N \equiv 0[11] \text{ لأن العددين 3 و 11 أوليان فيما بينهما.}$$

$$\text{لدينا } N = 1041a + 324b = 3(347a + 108b)$$

$$\text{إذن } N \equiv 0[33] \text{ معناه } N \equiv 0[11] \text{ يكافئ } 1041a + 324b \equiv 0[11] \text{ يكافئ } 7a + 5b \equiv 0[11].$$

$$\text{لدينا } 1 \leq a \leq 3 \text{ معناه } 7 \leq 7a \leq 21 \text{ وكذلك } 0 \leq b \leq 3 \text{ معناه } 0 \leq 5b \leq 15 \text{ إذن } 1 \leq 7a + 5b \leq 36 \text{ وهذا يعني أن } 7a + 5b \in \{11, 22, 33\}$$

$$\text{الحالة الأولى: } 7a + 5b = 11$$

$$\text{إذا كان } a = 1 \text{ فإن } 7 + 5b = 11 \text{ ومنه } b = \frac{4}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{إذا كان } a = 2 \text{ فإن } 14 + 5b = 11 \text{ ومنه } b = -\frac{3}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{إذا كان } a = 3 \text{ فإن } 21 + 5b = 11 \text{ ومنه } b = -2 \text{ مرفوض.}$$

$$\text{الحالة الثانية: } 7a + 5b = 22$$

$$\text{إذا كان } a = 1 \text{ فإن } 7 + 5b = 22 \text{ ومنه } b = 3 \text{ ومنه } N = 1041 + 324 \times 3 = 2013.$$

$$\text{إذا كان } a = 2 \text{ فإن } 14 + 5b = 22 \text{ ومنه } b = \frac{8}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{إذا كان } a = 3 \text{ فإن } 21 + 5b = 22 \text{ ومنه } b = \frac{1}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{الحالة الثالثة: } 7a + 5b = 33$$

$$\text{إذا كان } a = 1 \text{ فإن } 7 + 5b = 33 \text{ ومنه } b = \frac{26}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{إذا كان } a = 2 \text{ فإن } 14 + 5b = 33 \text{ ومنه } b = \frac{19}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{إذا كان } a = 3 \text{ فإن } 21 + 5b = 33 \text{ ومنه } b = \frac{12}{5} \text{ مرفوض.}$$

$$\text{إذن } (a, b) = (1, 3) \text{ و } N = 2013.$$

طريقة ثانية

a	1	2	3	
b	0	1	2	3
$7a$	7	14	21	
$5b$	0	5	10	15

$$7a + 5b \equiv 0[11] \text{ معناه } (7a, 5b) = (7, 15) \text{ أي } (a, b) = (1, 3).$$

التمرين 16:

1- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) $8x - 5y = 3$.2- ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية (p, q) من الأعداد الصحيحة تحقق: $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$ أ - بين أن الثنائية (p, q) حل للمعادلة (1) ثم استنتج أن: $m \equiv 9[40]$ ب - عين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000.3- ليكن k عددا طبيعياأ - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k} \equiv 1[7]$.ب - ما هو باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟4- ليكن a و b عدنان طبيعيان حيث $0 < a \leq 9$ و $b \leq 9$ ونعتبر العدد N الذي يكتب في النظام العشري على الشكل $N = a00b$ ؛ $N = a \times 10^3 + b$ نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7.أ - تحقق أن: $10^3 \equiv -1[7]$.ب - استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7.

الحل:

نلاحظ أن الثنائية (1,1) حل للمعادلة (1) لدينا إذن $\begin{cases} 8x - 5y = 3 \\ 8 \times 1 - 4 \times 1 = 3 \end{cases}$ بالطرح نحصل على $8(x-1) - 5(y-1) = 0$ أي $8(x-1) = 5(y-1)$ لدينا 5 يقسم $8(x-1)$ والعدنان 5 و 8 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص5 يقسم $x-1$ ومنه $x-1 = 5k$ أي $x = 5k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في $8(x-1) = 5(y-1)$ نجد $5(y-1) = 8 \times 5k$ ومنه $y-1 = 8k$ أي $y = 8k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.2. أ - تبين أن الثنائية (p, q) حل للمعادلة (1)لدينا $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$ ومنه $8p + 1 = 5q + 4$ أي $8p - 5q = 3$ وعليه الثنائية (p, q) حل للمعادلة (1).استنتاج أن: $m \equiv 9[40]$. (p, q) حل للمعادلة (1) إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $p = 5k + 1$ ومنه $m = 8p + 1 = 8(5k + 1) + 1$ أي $m = 40k + 9$ وبالتالي $m \equiv 9[40]$.ب - تعيين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000. $m > 2000$ معناه $40k + 9 > 2000$ يكافئ $40k > 1991$ ومنه $k > \frac{1991}{40}$ أي $k > 49,7$ وعليه $k = 50$ أي $m = 40 \times 50 + 9 = 2009$.3. أ - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k} \equiv 1[7]$.لدينا $2^3 \equiv 1[7]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k ، $(2^3)^k \equiv 1[7]$ أي $2^{3k} \equiv 1[7]$.ب - تعيين باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2009} على 7 ؟لدينا $2009 = 3 \times 669 + 2$.ولدينا $2^{3 \times 669} \equiv 1[7]$ إذن $2^{3 \times 669} \times 2^2 \equiv 2^2[7]$ ومنه $2^{3 \times 669 + 2} \equiv 4[7]$ أي $2^{2009} \equiv 4[7]$ وبالتالي باقي القسمة الاقليديةللعدد 2^{2009} على 7 هو 4.أ - التحقق أن: $10^3 \equiv -1[7]$.لدينا $10^3 + 1 = 1001 = 7 \times 143$ ومنه $10^3 + 1 \equiv 0[7]$ أي $10^3 \equiv -1[7]$.ب - استنتاج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7. $N \equiv 0[7]$ معناه $a \times 10^3 + b \equiv 0[7]$ ومنه $-a + b \equiv 0[7]$ أي $b \equiv a[7]$ وبما أن $0 < a \leq 9$ و $b \leq 9$ فإن: $(a, b) \in \{(1,1), (1,8), (2,2), (2,9), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (7,0), (8,8), (8,1), (9,9), (9,2)\}$ ومنه

$$N \in \{1001, 1008, 2002, 2009, 3003, 4004, 5005, 6006, 7007, 7000, 8008, 8001, 9009, 9002\}$$

التمرين 17: (بكالوريا تقني رياضي 2010).

نعتبر العدد الطبيعي n الذي يكتب في نظام العد ذي الأساس 7 كما يلي: $n = 11\alpha 00$ حيث α عدد طبيعي.

- 1- عين α حتى يكون n قابلاً للقسمة على 3.
- 2- عين العدد α حتى يكون n قابلاً للقسمة على 5.
- استنتج قيمة α التي تجعل n قابلاً للقسمة على 15.
- 3- نأخذ $\alpha = 4$ ، اكتب العدد n في النظام العشري.

الحل

- 1- **تعيين α حتى يكون n قابلاً للقسمة على 3.**

لدينا $n = 7^4 + 7^3 + \alpha \times 7^2$ ولدينا $7 \equiv 1[3]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k ، $7^k \equiv 1[3]$.

$n \equiv 0[3]$ معناه $7^4 + 7^3 + \alpha \times 7^2 \equiv 0[3]$ ومنه $1 + 1 + \alpha \equiv 0[3]$ وعليه $\alpha \equiv -2[3]$ أي $\alpha \equiv 1[3]$ وبما أن $0 \leq \alpha \leq 6$ فإن $\alpha = 1$ أو $\alpha = 4$.

- 2- **تعيين العدد α حتى يكون n قابلاً للقسمة على 5.**

لدينا $n = 7^2(7^2 + 7 + \alpha)$ ومنه $n = 7^2(56 + \alpha)$.

$n \equiv 0[5]$ معناه $7^2(56 + \alpha) \equiv 0[5]$ ولدينا 7 و 5 أوليان فيما بينهما ومنه 7^2 و 5 أوليان فيما بينهما إذن $56 + \alpha \equiv 0[5]$

ومنه $56 + \alpha \equiv 0[5]$ أي $1 + \alpha \equiv 0[5]$ وبما أن $0 \leq \alpha \leq 6$ فإن $\alpha = 4$.

- استنتاج قيمة α التي تجعل n قابلاً للقسمة على 15.

من أجل $\alpha = 4$ يكون $n \equiv 0[3]$ و $n \equiv 0[5]$ وبما أن العددين 3 و 5 أوليان فيما بينهما فإن $n \equiv 0[15]$ أي n يقبل القسمة على 15.

- 3- **نأخذ $\alpha = 4$ ، كتابة العدد n في النظام العشري.**

$$n = 7^4 + 7^3 + 4 \times 7^2 = 2940$$

التمرين 18: (بكالوريا تقني رياضي 2017).

- (1) **بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k} \equiv 1[11]$.**

(2) استنتج تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

- (3) **بيّن أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11.**

- (4) **عَيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلاً للقسمة على 11.**

الحل

- (1) **تبين أن: من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k} \equiv 1[11]$.**

لدينا $4^5 \equiv 1[11]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي k ، $(4^5)^k \equiv 1[11]$ أي $4^{5k} \equiv 1[11]$.

- (2) **استنتاج تبعاً لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.**

لدينا من أجل كل عدد طبيعي k ، $4^{5k} \equiv 1[11]$ ومنه $4 \times 4^{5k} \equiv 4[11]$ أي $4^{5k+1} \equiv 4[11]$ و $4^{5k+2} \equiv 5[11]$ و $4^{5k+3} \equiv 9[11]$ و $4^{5k+4} \equiv 3[11]$.

- (3) **تبين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $(2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1)$ يقبل القسمة على 11.**

لدينا $2017 \equiv 4[11]$ ومنه $2017^{5n+3} \equiv 4^{5n+3}[11]$ و $4^{5n+3} \equiv 9[11]$ إذن $(2017)^{5n+3} \equiv 9[11]$ أي

$$1438^{10n} \equiv (2^2)^{3(5n)}[11] \text{ ومنه } 1438^{10n} \equiv (2^3)^{2(5n)}[11] \text{ ومنه } 1438^{10n} \equiv 8^{10n}[11] ; 2 \times (2017)^{5n+3} \equiv 7[11]$$

أي $1438^{10n} \equiv 4^{5(3n)}[11]$ و $4^{5(3n)} \equiv 1[11]$ إذن $1438^{10n} \equiv 1[11]$ ومنه $3 \times 1438^{10n} \equiv 3[11]$ وعليه:

$2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 0[11]$ أي $2 \times 2017^{5n+3} + 3 \times 1438^{10n} + 1 \equiv 7 + 3 + 1[11]$ كل عدد طبيعي n ، يقبل القسمة على 11.

(4) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ قابلاً للقسمة على 11.

$2017^{5n+2} \equiv 4^{5n+2}[11]$ ومنه $2017^{5n+2} \equiv 5[11]$ أي $2 \times 2017^{5n+2} \equiv 10[11]$ إذن $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 7 + n[11]$

$(2 \times 2017^{5n+2} + n - 3)$ يقبل القسمة على 11 معناه $2 \times 2017^{5n+2} + n - 3 \equiv 0[11]$ ومنه $7 + n \equiv 0[11]$ يكافئ $n \equiv -7[11]$ أي $n \equiv 6[11]$ مع $n = 11k + 6$ مع $k \in \mathbb{N}$.

التمرين 19:

1. نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة: (1) $3x - 7y = 14$

أ- بين أن الثنائية $(7, 1)$ حلاً للمعادلة (1).

ب- عين الثنائيات $(x; y)$ حلول للمعادلة (1).

ج- ماهي القيم الممكنة لـ $(x; y)$ حتى يكون y قابلاً لـ x ؟

2. أ- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

ب- ماهو باقي قسمة العدد $3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945}$ على 7 ؟

3. ليكن العدد الطبيعي A_n حيث: $A_n = 4^n - n + 1$.

أ- عين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7.

ب- استنتج باقي قسمة $A_{2010} - A_{2009}$ على 7.

الحل:

1. أ- تبين أن الثنائية $(7, 1)$ حلاً للمعادلة (1).

لدينا $3 \times 7 - 7 \times 1 = 21 - 7 = 14$ ومنه الثنائية $(7, 1)$ حل للمعادلة (1).

ب- تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول للمعادلة (1).

لدينا $\begin{cases} 3x - 7y = 14 \\ 3 \times 7 - 7 \times 1 = 14 \end{cases}$ بالطرح نحصل على $3(x - 7) - 7(y - 1) = 0$ أي $3(x - 7) = 7(y - 1)$ لدينا 7 يقسم

$3(x - 7)$ والعددين 7 و 3 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 7 يقسم $x - 7 = 7k$ ومنه $x - 7 = 7k$

$x = 7k + 7$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في $3(x - 7) = 7(y - 1)$ نجد $3 \times 7k = 7(y - 1)$ ومنه $y - 1 = 3k$ أي

$y = 3k + 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

إذن حلول المعادلة (1) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(7k + 7, 3k + 1)$.

ج- تعيين القيم الممكنة لـ $(x; y)$ حتى يكون y قابلاً لـ x ؟

y قاسم لـ x معناه $x \equiv 0[y]$ يكافئ $7k + 7 \equiv 0[3k + 1]$ ومنه $\begin{cases} 7k + 7 \equiv 0[3k + 1] \\ 3k + 1 \equiv 0[3k + 1] \end{cases}$ وعليه

بالطرح نجد $14 \equiv 0[3k + 1]$ إذن $14 \in \{1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14\}$ $3k + 1 \in \{1, -1, 2, -2, 7, -7, 14, -14\}$

$3k + 1 = 1$ ومنه $k = 0$.

$3k + 1 = -1$ ومنه $k = -\frac{2}{3}$ مرفوض.

$$3k + 1 = 2 \text{ ومنه } k = \frac{1}{3} \text{ مرفوض.}$$

$$3k + 1 = -2 \text{ ومنه } k = -1$$

$$3k + 1 = 7 \text{ ومنه } k = 2$$

$$3k + 1 = -7 \text{ ومنه } k = -\frac{8}{3} \text{ مرفوض.}$$

$$3k + 1 = 14 \text{ ومنه } k = \frac{13}{3} \text{ مرفوض.}$$

$$3k + 1 = -14 \text{ ومنه } k = -5$$

$$\text{وعليه } k \in \{0, -1, 2, -5\} \text{ ومنه } (x, y) \in \{(7, 1), (0, -2), (21, 7), (-28, -14)\}$$

2. أ - دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 4^n على 7.

$$4^0 \equiv 1[7], 4^1 \equiv 4[7], 4^2 \equiv 2[7] \text{ و } 4^3 \equiv 1[7]$$

$$\text{إذن من أجل كل عدد طبيعي } \alpha, 4^{3\alpha} \equiv 1[7], 4^{3\alpha+1} \equiv 4[7] \text{ و } 4^{3\alpha+2} \equiv 2[7]$$

ب - تعيين باقي قسمة العدد $3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945}$ على 7 ؟

$$\text{بما أن } 2010 = 3 \times 670 \text{ فإن } 4^{2010} \equiv 1[7] \text{ ومنه } 3 \times 4^{2010} \equiv 3[7] \text{ ولدينا } 1945 = 3 \times 648 + 1 \text{ ومنه } 4^{1945} \equiv 4[7] \text{ أي}$$

$$2 \times 4^{1945} \equiv 1[7] \text{ إذن } 3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945} \equiv 3 - 1[7] \text{ أي } 3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945} \equiv 2[7] \text{ وبالتالي باقي قسمة العدد}$$

$$3 \times 4^{2010} - 2 \times 4^{1945} \text{ على 7 هو 2.}$$

3. أ - تعيين قيم n حتى يقبل A_n القسمة على 7.

$$A_n \text{ يقبل القسمة على 7 معناه } 4^n - n + 1 \equiv 0[7]$$

نعلم أن كل عدد طبيعي n يكتب من الشكل $n = 21p + \lambda$ حيث $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$ و $p \in \mathbb{N}$

$$\text{إذن } 4^n - n + 1 \equiv 0[7] \text{ تعني } 4^{21p+\lambda} - (21p + \lambda) + 1 \equiv 0[7] \text{ لكن } 4^{21p+\lambda} \equiv 4^{21p} \times 4^\lambda[7] \text{ أي } 4^{21p+\lambda} \equiv 4^\lambda[7] \text{ لأن}$$

$$4^{21p} \equiv 1[7] \text{ ولدينا } 21p + \lambda \equiv \lambda[7] \text{ إذن } 4^\lambda - \lambda + 1 \equiv 0[7] \text{ حيث } \lambda \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 20\}$$

$\lambda =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$4^\lambda \equiv$	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	2
$\lambda \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
$4^\lambda - \lambda + 1 \equiv$	2	4	1	6	1	5	3	5	2	0	2	6	4	6	3	1	3	0	5	0	4

$$\text{إذن } A_n \equiv 0[7] \text{ معناه } \lambda = 9 \text{ أو } \lambda = 17 \text{ أو } \lambda = 19 \text{ أي } n = 21p + 9 \text{ أو } n = 21p + 17 \text{ أو } n = 21p + 19 \text{ مع}$$

$$p \in \mathbb{N}$$

طريقة 2:

$$A_n \text{ يقبل القسمة على 7 معناه } 4^n - n + 1 \equiv 0[7]$$

$$\bullet \text{ إذا كان } n = 3\alpha \text{ يكون } 4^{3\alpha} - 3\alpha + 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه } 1 - 3\alpha + 1 \equiv 0[7] \text{ يكافئ } 3\alpha \equiv 2[7] \text{ ومنه } 15\alpha \equiv 10[7]$$

$$\text{ولدينا } 15 \equiv 1[7] \text{ و } 10 \equiv 3[7] \text{ إذن } \alpha \equiv 3[7] \text{ أي } \alpha = 7p + 3 \text{ وبالتالي } n = 3(7p + 3) = 21p + 9 \text{ مع } p \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } n = 3\alpha + 1 \text{ يكون } 4^{3\alpha+1} - (3\alpha + 1) + 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه } 4 - 3\alpha \equiv 0[7] \text{ يكافئ } 3\alpha \equiv 4[7] \text{ ومنه}$$

$$3\alpha \equiv -3[7] \text{ وعليه } \alpha \equiv -1[7] \text{ أي } \alpha = 7p + 6 \text{ ومنه } \alpha = 7p + 6 \text{ وبالتالي } n = 3(7p + 6) + 1 = 21p + 19 \text{ مع } p \in \mathbb{N}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } n = 3\alpha + 2 \text{ يكون } 4^{3\alpha+2} - (3\alpha + 2) + 1 \equiv 0[7] \text{ ومنه } 2 - 3\alpha - 1 \equiv 0[7] \text{ يكافئ } 3\alpha \equiv 1[7] \text{ ومنه}$$

$$15\alpha \equiv 5[7] \text{ وعليه } \alpha \equiv 5[7] \text{ أي } \alpha = 7p + 5 \text{ وبالتالي } n = 3(7p + 5) + 2 = 21p + 17 \text{ مع } p \in \mathbb{N}$$

لدينا $2010 = 21 \times 95 + 5$ أي $2010 = 21p + 5$ ومنه $A_{2010} \equiv 5[7]$ ولدينا $2009 = 21 \times 95 + 4$ أي $A_{2009} \equiv 4[7]$ ومنه $A_{2009} \equiv 4[7]$ إذن $A_{2010} - A_{2009} \equiv 5 - 4[7]$ أي $A_{2010} - A_{2009} \equiv 1[7]$ وبالتالي باقي قسمة العدد $A_{2010} - A_{2009}$ على 7 هو 1.

التمرين 20: (بكالوريا 2015 تقنى رياضي)

- (1) أ) عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
 ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13.
 (2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$.
 ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، حتى يكون: $(5n+1)64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$.

الحل

- (1) أ) تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.
 لدينا $8^0 \equiv 1[13]$ ، $8^1 \equiv 8[13]$ ، $8^2 \equiv 12[13]$ ومنه $8^2 \equiv -1[13]$ أي $8^4 \equiv 1[13]$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي p ، $8^{4p} \equiv 1[13]$ ، $8^{4p+1} \equiv 8[13]$ ، $8^{4p+2} \equiv 12[13]$ ، $8^{4p+3} \equiv 5[13]$.

n	$4p$	$4p+1$	$4p+2$	$4p+3$
باقي قسمة 8^n على 13	1	8	12	5

- (2) استنتاج باقي القسمة الإقليدية للعدد $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3$ على 13.
 لدينا $42 \equiv 3[13]$ و $138 \equiv 8[13]$ ومنه $138^{2015} \equiv 8^{2015} [13]$ أي $138^{2015} \equiv 8^{4 \times 503 + 3} [13]$ ولدينا $138^{2015} \equiv 5[13]$ إذن $42 \times 138^{2015} \equiv 3 \times 5[13]$ وعليه $42 \times 138^{2015} \equiv 15[13]$ أي $42 \times 138^{2015} \equiv 2[13]$.
 و $2014 \equiv 12[13]$ أي $2014 \equiv -1[13]$ ومنه $2014^{2037} \equiv (-1)^{2037} [13]$ وعليه $2014^{2037} \equiv -1[13]$ أي $2014^{2037} \equiv 12[13]$.
 إذن $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 2 + 12 - 3[13]$ أي $42 \times 138^{2015} + 2014^{2037} - 3 \equiv 11[13]$.
 (2) أ) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$.
 لدينا $5 + 8 \equiv 0[13]$ معناه $5 \equiv -8[13]$ ومنه $5^{2n} \equiv (-8)^{2n} [13]$ أي $5^{2n} \equiv 8^{2n} [13]$ و $5^3 \equiv -5[13]$ وعليه $5^{2n} \times 5^3 \equiv -5 \times 8^{2n} [13]$ أي $5^{2n+3} \equiv -5 \times 8^{2n} [13]$ معناه $5^{2n+3} \equiv 5 \times 8^{2n} [13]$ يكافئ $(5n+1)64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+1)8^{2n} + 5 \times 8^{2n} [13]$ ويكافئ $(5n+1)64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$ أي $(5n+1) \times 64^n - 5^{2n+3} \equiv (5n+6)8^{2n} [13]$.
 ب) تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n ، حتى يكون: $(5n+1)64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$.
 $(5n+1)64^n - 5^{2n+3} \equiv 0[13]$ معناه $(5n+1)64^n \equiv 5^{2n+3} [13]$ وبما أن 8 و 13 أوليان فيما بينهما فإن 8^{2n} و 13 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص $5n+6 \equiv 0[13]$ يكافئ $5n \equiv -6[13]$ يكافئ $5n \equiv 20[13]$ أي $n \equiv 4[13]$ إذن $n = 13p + 4$ حيث $p \in \mathbb{N}$.

التمرين 21: (بكالوريا 2016 شعبة رياضيات)

- (1) أ) ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.
 ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.
 (2) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهول $(x; y)$: $7x - 3y = 8$ حيث x و y عدنان طبيعيان.
 أ) حل المعادلة (E).
 ب) d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E).
 - ما هي القيم الممكنة للعدد d .

- عيّن الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

(ج) جد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$.

الحل

(1) أ) دراسة، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 3^n و 7^n على 11.

$$3^0 \equiv 1[11], 3^1 \equiv 3[11], 3^2 \equiv 9[11], 3^3 \equiv 5[11], 3^4 \equiv 4[11], 3^5 \equiv 1[11]$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي k ، $3^{5k} \equiv 1[11]$ ومنه $3 \times 3^{5k} \equiv 3[11]$ أي $3^{5k+1} \equiv 3[11]$.

$$\text{و } 3 \times 3^{5k+1} \equiv 9[11] \text{ أي } 3^{5k+2} \equiv 9[11] \text{ و } 3 \times 3^{5k+2} \equiv 5[11] \text{ أي } 3^{5k+3} \equiv 5[11] \text{ و } 3 \times 3^{5k+3} \equiv 4[11] \text{ أي } 3^{5k+4} \equiv 4[11]$$

$$7^0 \equiv 1[11], 7^1 \equiv 7[11], 7^2 \equiv 5[11], 7^3 \equiv 2[11], 7^4 \equiv 3[11], 7^5 \equiv 10[11] \text{ ومنه } 7^5 \equiv -1[11] \text{ وهذا يعني}$$

$$(7^5)^2 \equiv 1[11] \text{ أي } 7^{10} \equiv 1[11] \text{ إذن من أجل كل عدد طبيعي } k, 7^{10k} \equiv 1[11] \text{ و } 7 \times 7^{10k} \equiv 7[11]$$

$$7^{10k+1} \equiv 7[11] \text{ و } 7 \times 7^{10k+1} \equiv 5[11] \text{ أي } 7^{10k+2} \equiv 5[11], 7^{10k+3} \equiv 2[11], 7^{10k+4} \equiv 3[11], 7^{10k+5} \equiv 10[11]$$

$$7^{10k+6} \equiv 4[11], 7^{10k+7} \equiv 6[11], 7^{10k+8} \equiv 9[11], 7^{10k+9} \equiv 8[11]$$

n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
باقي قسمة 3^n على 11	1	3	9	5	4

n	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$
باقي قسمة 7^n على 11	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8

(ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

لدينا $1437 \equiv 7[11]$ ومنه $1437^{10n+4} \equiv 7^{10n+4}[11]$ و $1437^{10n+4} \equiv 3[11]$ إذن $1437^{10n+4} \equiv 3[11]$.

ولدينا $2016^{5n+4} \equiv 3^{5n+4}[11]$ ومنه $2016^{5n+4} \equiv 4[11]$ أي $2 \times 2016^{5n+4} \equiv 8[11]$ إذن

$$2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 8 + 3[11] \text{ أي } 2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4} \equiv 0[11] \text{ وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n,$$

العدد $2 \times 2016^{5n+4} + 1437^{10n+4}$ مضاعف للعدد 11.

(2) أ) حل المعادلة (E) .

$$\text{لدينا } 7 \times 2 - 3 \times 2 = 8 \text{ ومنه الثنائية } (2; 2) \text{ حلا خاصا للمعادلة ومنه } \begin{cases} 7x - 3y = 8 \\ 7 \times 2 - 3 \times 2 = 8 \end{cases} \text{ بالطرح نجد}$$

$$7(x-2) = 3(y-2) \text{ أي } 7(x-2) - 3(y-2) = 0$$

لدينا 3 يقسم $7(x-2)$ والعددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x-2$ ومنه

$$x-2 = 3\alpha \text{ أي } x = 3\alpha + 2 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض في } 7(x-2) = 3(y-2) \text{ نجد } 7 \times 3\alpha = 3(y-2) \text{ ومنه}$$

$$y-2 = 7\alpha \text{ أي } y = 7\alpha + 2 \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{N}$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ من الشكل $(3\alpha + 2; 7\alpha + 2)$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$.

(ب) تعيين القيم الممكنة للعدد d .

لدينا d يقسم x و d يقسم y إذن d يقسم $7x - 3y$ أي d يقسم 8 وبالتالي $d \in \{1; 2; 4; 8\}$.

تعيين الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) من أجل $d = 4$.

$$d = 4 \text{ معناه كل من } x \text{ و } y \text{ مضاعفين للعدد 4 وليسا مضاعفين للعدد 8 وهذا يعني } \begin{cases} x \equiv 4[8] \\ y \equiv 4[8] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3\alpha + 2 \equiv 4[8] \\ 7\alpha + 2 \equiv 4[8] \end{cases}$$

$$\text{يكافئ } \begin{cases} 3\alpha - 2 \equiv 0[8] \\ 7\alpha - 2 \equiv 0[8] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 9\alpha - 6 \equiv 0[8] \\ -\alpha - 2 \equiv 0[8] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 9\alpha \equiv 6[8] \\ \alpha \equiv -2[8] \end{cases} \text{ ومنه } \alpha \equiv 6[8] \text{ أي } \alpha = 8p + 6 \text{ مع } p \in \mathbb{N}$$

$$\text{وبالتالي } x = 3\alpha + 2 = 3(8p + 6) + 2 = 24p + 20 \text{ و } y = 7\alpha + 2 = 7(8p + 6) + 2 = 56p + 44 \text{ مع } p \in \mathbb{N}.$$

طريقة ثانية:نضع $x' = 4x$ و $y' = 4y$ مع x' و y' أوليان فيما بينهما.

$$7x - 3y = 8 \text{ معناه } 7x' - 3y' = 8 \text{ تكافئ } 7x' - 3y' = 2 \text{ نلاحظ أن الثنائية } (2; 4) \text{ حلا خاصا للمعادلة ومنه}$$

$$\begin{cases} 7x' - 3y' = 2 \\ 7 \times 2 - 3 \times 4 = 2 \end{cases} \text{ بالطرح نجد } \begin{cases} 7(x' - 2) - 3(y' - 4) = 0 \\ 7(x' - 2) = 3(y' - 4) \end{cases} \text{ أي } 7(x' - 2) = 3(y' - 4)$$

$$\text{لدينا 3 يقسم } 7(x' - 2) \text{ والعددان 3 و 7 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم } x' - 2 \text{ ومنه } x' - 2 = 3\beta \text{ أي } x' = 3\beta + 2 \text{ حيث } \beta \in \mathbb{N} \text{ وبالتعويض في } 7(x' - 2) = 3(y' - 4) \text{ نجد } 7 \times 3\beta = 3(y' - 4) \text{ ومنه } y' - 4 = 7\beta \text{ أي } y' = 7\beta + 4 \text{ حيث } \beta \in \mathbb{N}$$

$$\text{نضع } d' = \text{PGCD}(x'; y') \text{ لدينا إذن } d' \text{ يقسم } x' \text{ و } y' \text{ إذن } d' \text{ يقسم } 7x' - 3y' \text{ أي } d' \text{ يقسم 2 وبالتالي } d' \in \{1, 2\}$$

نريد تعيين x' و y' بحيث $d' = 1$ أي x' و y' أوليان فيما بينهما.

$$\text{معناه } d' = 2 \text{ يكافئ } \begin{cases} x' \equiv 0[2] \\ y' \equiv 0[2] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3\beta + 2 \equiv 0[2] \\ 7\beta + 4 \equiv 0[2] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} 3\beta \equiv 0[2] \\ 7\beta \equiv 0[2] \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \beta \equiv 0[2] \\ \beta \equiv 0[2] \end{cases} \text{ إذن من أجل } \beta \text{ زوجي}$$

$$\text{يكون } d' = 2 \text{ وبالتالي } d' = 1 \text{ معناه } \beta \text{ فردي أي } \beta = 2p + 1 \text{ ومنه } x' = 3(2p + 1) + 2 = 6p + 5 \text{ و } y' = 7(2p + 1) + 4 = 14p + 11$$

$$\text{وعليه } x = 4x' = 4(6p + 5) = 24p + 20 \text{ و } y = 4y' = 4(14p + 11) = 56p + 44 \text{ مع } p \in \mathbb{N}$$

(ج) إيجاد الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11]$.

$$\text{لدينا } 2016 \equiv 3[11] \text{ ومنه } 2016^{7x} \equiv 3^{7x} [11] \text{ و } 1437^{3y} \equiv 7^{3y} [11] \text{ إذن } 2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 3^{7x} + 7^{3y} [11]$$

$$3^{7x} + 7^{3y} = 3^{21\alpha+14} + 7^{21\alpha+6} \text{ أي } 3^{7x} + 7^{3y} = 3^{7(3\alpha+2)} + 7^{3(7\alpha+2)}$$

$$\text{لدينا } 21\alpha \equiv \alpha[5] \text{ و } 14 \equiv 4[5] \text{ ومنه } 21\alpha + 14 \equiv \alpha + 4[5] \text{ إذن يوجد عدد طبيعي } u \text{ بحيث } 21\alpha + 14 = 5u + 4 + \alpha$$

$$\text{ومنه } 3^{21\alpha+14} = 3^{5u+4+\alpha} = 3^{5u+4} \times 3^\alpha \text{ أي } 3^{21\alpha+14} = 3^{5u+4} \times 3^\alpha \text{ وعليه } 3^{21\alpha+14} \equiv 3^{5u+4} \times 3^\alpha [11] \text{ أي } 3^{21\alpha+14} \equiv 4 \times 3^\alpha [11]$$

$$\text{وكذلك لدينا } 7^{21\alpha+6} = 7^{10 \times 2\alpha + \alpha + 6} \text{ أي } 7^{21\alpha+6} = 10 \times 2\alpha + \alpha + 6 \text{ إذن } 7^{21\alpha+6} \equiv 7^{10u+6+\alpha} [11] \text{ يكافئ}$$

$$7^{21\alpha+6} \equiv 7^{10u+6} \times 7^\alpha [11] \text{ أي } 7^{21\alpha+6} \equiv 4 \times 7^\alpha [11] \text{ وهذا يعني أن } 7^{21\alpha+6} \equiv 4 \times 7^\alpha [11] \text{ و } 3^{7x} + 7^{3y} \equiv 4 \times 3^\alpha + 4 \times 7^\alpha [11]$$

$$\text{إذن } 2016^{7x} + 1437^{3y} \equiv 0[11] \text{ معناه } 3^{7x} + 7^{3y} \equiv 0[11] \text{ يكافئ } 4 \times 3^\alpha + 4 \times 7^\alpha \equiv 0[11] \text{ يكافئ}$$

$$4(3^\alpha + 7^\alpha) \equiv 0[11] \text{ أي } 3^\alpha + 7^\alpha \equiv 0[11] \text{ لأن العددين 4 و 11 أوليان فيما بينهما.}$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } k \text{ لدينا } 3^{5k} \equiv 1[11] \text{ إذن } (3^{5k})^2 \equiv 1[11] \text{ أي } 3^{10k} \equiv 1[11] \text{ ومنه } 3 \times 3^{10k} \equiv 3[11] \text{ أي}$$

$$3^{10k+3} \equiv 3[11] \text{ و } 3 \times 3^{10k+1} \equiv 9[11] \text{ أي } 3^{10k+2} \equiv 9[11] \text{ و } 3 \times 3^{10k+2} \equiv 27[11] \text{ أي } 3 \times 3^{10k+3} \equiv 5[11] \text{ و}$$

$$3 \times 3^{10k+3} \equiv 15[11] \text{ أي } 3 \times 3^{10k+4} \equiv 12[11] \text{ و } 3^{10k+4} \equiv 4[11] \text{ أي } 3 \times 3^{10k+5} \equiv 1[11] \text{ و } 3^{10k+5} \equiv 3[11] \text{ أي}$$

$$3^{10k+6} \equiv 3[11] \text{ و } 3 \times 3^{10k+6} \equiv 9[11] \text{ أي } 3^{10k+7} \equiv 9[11] \text{ و } 3 \times 3^{10k+7} \equiv 27[11] \text{ أي } 3^{10k+8} \equiv 5[11] \text{ و } 3^{10k+9} \equiv 4[11] \text{ أي } 3 \times 3^{10k+8} \equiv 15[11]$$

α	$10k$	$10k+1$	$10k+2$	$10k+3$	$10k+4$	$10k+5$	$10k+6$	$10k+7$	$10k+8$	$10k+9$
$3^\alpha \equiv$	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4
$7^\alpha \equiv$	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8
$3^\alpha + 7^\alpha \equiv$	2	10	3	7	7	0	7	4	3	1

إذا كان $\alpha = 10k + 5$ فإن $3^\alpha + 7^\alpha \equiv 0[11]$ إذن $x = 3\alpha + 2 = 30k + 17$ و $x = 7\alpha + 2 = 70k + 37$ مع $k \in \mathbb{N}$

التمرين 22:

نعتبر المعادلة (E) $7x - 3y = 10$ ذات المجهول $(x; y)$ حيث x و y عدنان صحيحان.

$$(1) \text{ عيّن الحل الخاص } (x_0; y_0) \text{ للمعادلة (E) الذي يحقق: } \begin{cases} x_0 - 1 \equiv 0[3] \\ -2 < x_0 < 4 \end{cases}$$

ثم حل المعادلة (E).

(2) بفرض أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) حيث x و y عدنان طبيعيين؛

$$\text{عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية } n \text{ التي تحقق الجملة التالية: } \begin{cases} 2^x + y + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases}$$

(3) جد الثنائية الوحيدة $(x; y)$ حل للمعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين x و y هو 2139.

الحل:

$$(1) \text{ تعيين الحل الخاص } (x_0; y_0) \text{ للمعادلة (E) الذي يحقق: } \begin{cases} x_0 - 1 \equiv 0[3] \\ -2 < x_0 < 4 \end{cases}$$

لدينا $x_0 - 1 \equiv 0[3]$ معناه $x_0 \equiv 1[3]$ إذن يوجد عدد صحيح k بحيث $x_0 = 3k + 1$ وبما أن $-2 < x_0 < 4$ هذا معناه $-2 < 3k + 1 < 4$ ومنه $-3 < 3k < 3$ يكافئ $-1 < k < 1$ وعليه $k = 0$ إذن $x_0 = 3 \times 0 + 1$ أي $x_0 = 1$ وبالتعويض عن x_0 في (E) نجد $7 \times 1 - 3y_0 = 10$ ومنه $y_0 = -1$ وعليه $(x_0; y_0) = (1; -1)$.

حل المعادلة (E).

$$\text{لدينا } \begin{cases} 7x - 3y = 10 \\ 7 \times 1 - 3 \times (-1) = 10 \end{cases} \text{ بالطرح نحصل على } 7(x - 1) - 3(y + 1) = 0 \text{ أي } 7(x - 1) = 3(y + 1) \text{ لدينا 3 يقسم}$$

$7(x - 1)$ والعدنان 3 و 7 أوليان فيما بينهما إذن حسب مبرهنة غوص 3 يقسم $x - 1$ ومنه $x - 1 = 3k$ أي $x = 3k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض في $7(x - 1) = 3(y + 1)$ نجد $3(y + 1) = 7 \times 3k$ ومنه $y + 1 = 7k$ أي $y = 7k - 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{تعيين مجموعة الأعداد الطبيعية } n \text{ التي تحقق الجملة التالية: } \begin{cases} 2^x + y + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases} (*)$$

$$\begin{cases} 2 \times 2^{3k} + 7k + n^2 - 3 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 2^{3k+1} + 7k - 1 + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 2^x + y + n^2 - 2 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases}$$

لدينا $2^3 \equiv 1[7]$ إذن من أجل كل عدد طبيعي، $2^{3k} \equiv 1[7]$ ومنه $2 \times 2^{3k} \equiv 2[7]$ ولدينا $7k \equiv 0[7]$ إذن

$$(*) \text{ تكافئ } \begin{cases} n^2 - 1 \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} (n-1)(n+1) \equiv 0[7] \\ 0 < n < 18 \end{cases} \text{ ومنه } n-1 \equiv 0[7] \text{ أو } n+1 \equiv 0[7] \text{ و } 0 < n < 18$$

ومنه $n = 7p + 1$ أو $n = 7p + 6$ مع $p \in \mathbb{N}$ و $0 < n < 18$ وعليه $n \in \{1; 6; 8; 13; 15\}$.

(3) إيجاد الثنائية الوحيدة $(x; y)$ حل المعادلة (E) بحيث المضاعف المشترك الأصغر للعددين x و y هو 2139.

نضع $d = p \gcd(x; y)$ و $m = p \text{ppcm}(x; y)$

ونضع $x = dx'$ و $y = dy'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما لدينا $m = \frac{xy}{d}$ ومنه $m = \frac{d^2 x' y'}{d}$ ومنه $dx' y' = m$ أي $dx' y' = 2139$.

لدينا d يقسم x و d يقسم y ومنه d يقسم $7x - 3y$ أي d يقسم 10 ومنه $d \in \{1; 2; 5; 10\}$ بما أن $dx' y' = 2139$ فإن d يقسم 2139 والأعداد 10، 5 و 2 لا تقسم العدد 2139 إذن $d = 1$ وعليه $x' y' = 2139$ و x' و y' أوليان فيما بينهما وعليه:

$$x' = 1 \text{ و } y' = 2139 \text{ أي } x = 1 \text{ و } y = 2139$$

$$x' = 31 \text{ و } y' = 69 \text{ أي } x = 31 \text{ و } y = 69$$

$$x' = 23 \text{ و } y' = 93 \text{ أي } x = 23 \text{ و } y = 93$$

$$x' = 713 \text{ و } y' = 3 \text{ أي } x = 713 \text{ و } y = 3$$

$$x' = 3 \text{ و } y' = 713 \text{ أي } x = 3 \text{ و } y = 713$$

$$x' = 93 \text{ و } y' = 23 \text{ أي } x = 93 \text{ و } y = 23$$

$$x' = 69 \text{ و } y' = 31 \text{ أي } x = 69 \text{ و } y = 31$$

$$x' = 2139 \text{ و } y' = 1 \text{ أي } x = 2139 \text{ و } y = 1$$

الثنائية الوحيدة $(x; y)$ من الثنائيات السابقة حل للمعادلة (E) هي $(31; 69)$ لأن $7 \times 31 - 3 \times 69 = 10$.

التمرين 23:

(1) حل، في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x; y)$ التالية: $2x - 5y = 4$.

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

a و b عدنان صحيحان غير معدومين و (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = au_n + b - 2$.

أ - عين $(b; a)$ التي من أجلها تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 (ارشاد: استعمل السؤال الأول).

ب - اكتب v_n بدلالة n ، a و b وبين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n \equiv 0[7]$.

ج - بين أنه عندما يكون $a \equiv 0[5]$ فإنه لكل n من $\mathbb{N}$: v_n يقبل القسمة على 5.

الحل:

$2x - 5y = 4$ معناه $2x = 5y + 4$ ومنه $2x \equiv 4[5]$ أي $x \equiv 2[5]$ إذن $x = 5k + 2$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتعويض في

المعادلة نجد $2(5k + 2) - 5y = 4$ أي $y = 2k$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(2) أ - تعيين $(b; a)$ التي من أجلها تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها 3.

ليكن n عددا طبيعيا؛ $v_{n+1} = au_{n+1} + b - 2 = a(3u_n + 5) + b - 2 = 3au_n + 5a + b - 2$

ولدينا $v_n = au_n + b - 2$ ومنه $au_n = v_n - b + 2$ إذن $v_{n+1} = 3(v_n - b + 2) + 5a + b - 2$ ومنه

$$v_{n+1} = 3v_n - 2b + 5a + 4$$

(v_n) متتالية هندسية معناه $-2b + 5a + 4 = 0$ أي $2b - 5a = 4$ وحسب السؤال الأول $b = 5k + 2$ و $a = 2k$ مع

$$k \in \mathbb{Z}$$

ب - كتابة v_n بدلالة n ، a و b .

(v_n) متتالية هندسية إذن $v_n = v_0(3)^n$ لدينا $v_0 = a + b - 2$ ومنه $v_n = (a + b - 2)(3)^n$ من $\mathbb{N}$.

لدينا $a + b - 2 = 2k + 5k + 2 - 2 = 7k$ ومنه $a + b - 2 \equiv 0[7]$ وهذا يعني $(a + b - 2)3^n \equiv 0[7]$ أي $v_n \equiv 0[7]$

ج - تبين أنه عندما يكون $a \equiv 0[5]$ فإنه لكل n من $\mathbb{N}$: v_n يقبل القسمة على 5.

لدينا $b - 2 = 5k$ ومنه $b - 2 \equiv 0[5]$ و بما أن $a \equiv 0[5]$ فإن $a + b - 2 \equiv 0[5]$ إذن $(a + b - 2)3^n \equiv 0[5]$ أي من أجل كل n من $\mathbb{N}$: v_n يقبل القسمة على 5.

التمرين 24: (بكالوريا شعبة رياضيات 2015)

- (1) أ) عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.
 ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7.
- (2) أ) بيّن أن 89 عدد أولي
 ب) عيّن كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.
 ج) بيّن أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.
- (3) x و y عدنان طبيعيين غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases}$$
 عيّن x و y علماً أن:
 (4) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .
 أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهن أن a أولي مع $b \times c$.
 ب) باستعمال الإستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $PGCD(a; b^n) = 1$.
 (يُرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)
 ج) استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1962^{1954} و 1954^{1962} .

الحل

- (1) أ) تعيين، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 7.
 لدينا $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ و $2^3 \equiv 1[7]$ وعليه من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k} \equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2} \equiv 4[7]$.

n	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
باقي قسمة العدد 2^n على 7.	1	2	4

- ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}]$ على 7.

لدينا $1962 \equiv 2[7]$ ومنه $1962^{1954} \equiv 2^{1954}[7]$ ولدينا $1954 = 3 \times 651 + 1$ ومنه $2^{1954} \equiv 2[7]$ إذن $1962^{1954} \equiv 2[7]$ ولدينا $1954 \equiv 1[7]$ ومنه $1954^{1962} \equiv 1[7]$ و $2015 \equiv -1[7]$ معناه $2015 + 1 \equiv 0[7]$ أي $2015^{53} \equiv -1[7]$.
 وعليه $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}] \equiv 2 - 1 - 1[7] \equiv 0[7]$ أي $[1962^{1954} - 1954^{1962} + 2015^{53}] \equiv 0[7]$.

- (2) أ) تبين أن 89 عدد أولي.

لدينا $\sqrt{89} < 11$ والأعداد الأولية الأصغر من 11 هي 2، 3، 5 و 7.
 ولدينا $89 = 2 \times 44 + 1$ ، $89 = 3 \times 29 + 2$ ، $89 = 5 \times 17 + 4$ و $89 = 7 \times 12 + 5$ العدد 89 لا يقبل القسمة على 2 ولا 3 ولا 5 ولا 7 إذن فهو عدد أولي.

- ب) تعيين كل القواسم الطبيعية للعدد 7832.

لدينا $7832 = 2^3 \times 11 \times 89$ ومنه عدد قواسم العدد 7832 هو $(3+1)(1+1)(1+1)$ أي 16 قاسماً.

وعليه $D_{7832} = \{1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88, 89, 178, 356, 712, 979, 1958, 3916, 7832\}$.

- ج) تبين أن العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

نسمي d القاسم المشترك الأكبر للعددين 981 و 977 إذن d يقسم 981 ويقسم 977 فهو يقسم $981 - 977$ أي d يقسم 4 ومنه $d \in \{1; 2; 4\}$ وبما أن 981 و 977 فرديان فإن $d = 1$ أي العددين 981 و 977 أوليان فيما بينهما.

- (3) x و y عدنان طبيعيين غير معدومين قاسماهما المشترك الأكبر هو 2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases} \quad \text{تعيين } x \text{ و } y \text{ علماً أن}$$

نضع $x = 2x'$ و $y = 2y'$ حيث x' و y' أوليان فيما بينهما.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 31328 \\ x - y \equiv 8[22] \end{cases} \quad \text{معناه} \quad \begin{cases} 4x'^2 - 4y'^2 = 31328 \\ 2x' - 2y' \equiv 8[22] \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} x'^2 - y'^2 = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$\begin{cases} (x' + y')(x' - y') = 7832 \\ x' - y' \equiv 4[11] \end{cases} \quad \text{بما أن العددين } x' \text{ و } y' \text{ طبيعيين فإن } x' + y' > x' - y'$$

$x' + y'$	7832	3916	1958	979	712	356	178	89	
$x' - y'$	1	2	4	8	11	22	44	88	
$x' - y' \equiv$	1	2	4	8	0	0	0	0	[11]

ومنه $\begin{cases} x' + y' = 1958 \\ x' - y' = 4 \end{cases}$ بجمع المعادلتين نجد $2x' = 1962$ أي $x = 1962$ وبطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد

$$2y' = 1954 \quad \text{أي } y = 1954$$

(4) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة حيث a أولي مع b و a أولي مع c .

(أ) باستعمال مبرهنة بيزو، برهان أن a أولي مع $b \times c$.

بما أن a أولي مع b و a أولي مع c فإنه يوجد عددين صحيحان α و β حيث $\alpha a + \beta b = 1$ ويوجد عدنان

صحيحان α' و β' بحيث $\alpha' a + \beta' c = 1$ ومنه $(\alpha a + \beta b)(\alpha' a + \beta' c) = 1$ يكافئ

$$\alpha \alpha' a^2 + \alpha \beta' a c + \beta b \alpha' a + \beta b \beta' c = 1 \quad \text{أي } \alpha \alpha' a^2 + \alpha \beta' a c + \beta b \alpha' a + \beta b \beta' c = 1$$

صحيحان u و v بحيث $u a + v \times b c = 1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو a أولي مع $b \times c$.

خلاصة: إذا كان a أولي مع b و a أولي مع c فإن a أولي مع $b \times c$.

(ب) باستعمال البرهان بالتراجع إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a; b^n) = 1$.

$$PGCD(a; b^1) = PGCD(a; b) = 1 \quad \text{لدينا} \quad \text{ومنه خاصية الإبتداء محققة.}$$

ليكن n عدداً طبيعياً

نفرض أن $PGCD(a; b^n) = 1$ ونبرهن أن $PGCD(a; b^{n+1}) = 1$ أي نفرض أن a أولي مع b^n ونبرهن أن a أولي مع b^{n+1} .

a أولي مع b^n ولدينا a أولي مع b إذن حسب السؤال السابق a أولي مع $b \times b^n$ أي a أولي مع b^{n+1} ومنه حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $PGCD(a; b^n) = 1$.

(ج) استنتاج القاسم المشترك الأكبر للعددين 1954^{1962} و 1962^{1954} .

$$\text{لدينا } 1954 = 2 \times 977 \quad \text{ومنه } 1954^{1962} = 2^{1962} \times 977^{1962} = 2^{1954} \times 2^8 \times 977^{1962} \quad \text{و } 1962 = 2 \times 981 \quad \text{ومنه}$$

$$1962^{1954} = 2^{1954} \times 981^{1954} \quad \text{وعليه:}$$

$$PGCD(1954^{1962}; 1962^{1954}) = PGCD(2^{1954} \times 2^8 \times 977^{1962}; 2^{1954} \times 981^{1954}) = 2^{1954} PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954})$$

$$\text{لدينا } PGCD(977; 981) = 1 \quad \text{ومنه } PGCD(977^{1962}; 981^{1954}) = 1 \quad \text{وكذلك } PGCD(2; 981) = 1 \quad \text{ومنه}$$

$$PGCD(2^8; 981^{1954}) = 1 \quad \text{إذن } PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954}) = 1 \quad \text{و } 981^{1954} \text{ أولي مع } 2^8 \quad \text{و بالتالي } 981^{1954} \text{ أولي مع}$$

$$2^8 \times 977^{1962} \quad \text{أي } PGCD(2^8 \times 977^{1962}; 981^{1954}) = 1 \quad \text{وعليه } PGCD(1954^{1962}; 1962^{1954}) = 2^{1954}.$$