تمارين في المتتاليات العددية

من كتابة : الأستاذ ناعم محمد

1

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=0$ و $u_1=1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+2}=\frac{2}{5}u_{n+1}-\frac{1}{25}u_n$ ، (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ و $w_n=5^n u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1/ بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثمّ أحسب v_n بدلالة n .

2/ أ) بين أن (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ، ثمّ أحسب w_n بدلالة n .

ب) أحسب u_n بدلالة n .

3/ أ) بين أن : $0<u_{n+1}\le\frac{2}{5}u_n$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

ب) استنتج أن : $0<u_n\le\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ لكل عدد طبيعي غير معدوم . ثمّ حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

2

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n(u_n+1)$.

1/ أ) برهن بالتراجع أنّ : $u_n\ge 1$ من أجل كل عدد طبيعي n

ب) بيّن أنّ (u_n) متزايدة .

2/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}\ge 2u_n$ و $u_n^2\ge u_n$.

3/ استنتج أنّ : $u_n\ge 2^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ثمّ حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4/ نضع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

• بيّن أنّ : $S_n\ge 2^{n+1}-1$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$.

3

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}(1+u_n)^2$ من أجل كل عدد طبيعي n .

1/ بين أن (u_n) متزايدة تماما .

2/ أ) بين أنّ : $u_{n+1}-u_n\ge\frac{5}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) استنتج أنّ : $u_n\ge 2+\frac{5n}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

3/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

4

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{u_n^3}{3u_n^2+1}$.

1/ بيّن بالتراجع أنّ : $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

2/ بيّن أنّ (u_n) متناقصة .

3/ استنتج أنّ (u_n) متقاربة .

4/ أ) بيّن أنّ : $u_{n+1}\le\frac{1}{3}u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) استنتج أنّ : $u_n\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

5

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=-1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{4u_n-4}{u_n+8}$.

1/ أ) برهن بالتراجع أنّ : $-2\le u_n\le -1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) بين أنّ (u_n) متناقصة . ، ثمّ استنتج أنها متقاربة

2/ (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{1}{u_n+1}$.

أ) بين أنّ (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأوّل .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3/ ليكن المجموع S_n حيث : $S_n=u_0v_0+u_1v_1+\cdots+u_nv_n$

• أحسب S_n بدلالة n .

6 (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{6u_n}{1+15u_n}$.

1/ أ) تحقق أنّ : $u_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{u_n-\frac{1}{3}}{15u_n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>\dfrac{1}{3}$.

2/ (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=1-\dfrac{1}{3u_n}$.

أ) بين أنّ (v_n) هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{6}$ ، يطلب تعيين حدها الأوّل .

ب) أكتب v_n بدلالة n .

3/ بين أنّ : $u_n=\dfrac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ من أجل كل عدد طبيعي n ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

4/ 3/ ليكن المجموع S_n حيث : $S_n=\dfrac{1}{3u_0}+\dfrac{1}{3u_1}+\cdots+\dfrac{1}{3u_n}$

• أحسب S_n بدلالة n .

7 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+3}$.

1/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ $x\geq 1$: $2f(x)\geq 1$.

ب) أدرس إشارة : $2f(x)-x$ على المجال $[1;+\infty[$.

2/ (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1}=2f(u_n)$.

أ) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq 1$.

ب) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة .

3/ أ) أثبت أنّه من كل $x\geq 1$: $0\leq f(x)-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{3}(x-1)$.

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0\leq u_{n+1}-1\leq\dfrac{2}{3}(u_n-1)$.

ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n-1\leq\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

8 (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2-u_n+8}{u_n^2+3}$.

1/ أثبت بالتراجع أنّ : $u_n>0$.

2/ تحقق أنّ : $u_{n+1}-2=\dfrac{2-u_n}{u_n^2+3}$.

3/ n عدد طبيعي كيفي ، أثبت أنّه إذا كان $u_n>2$ فإنّ : $u_{n+1}<2$ و $u_{n+2}>2$.

4/ أثبت أنّ (u_n) ليست رتيبة .

5/ بيّن أنّ : $u_n\neq 2$.

6/ أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0\leq u_{n+1}-2\leq\dfrac{1}{3}(u_n-2)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0\leq u_n-2\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}u_n$.

9 نعتبر المتتاليّة العدديّة (V_n) المعرّفة بالعلاقة التّراجعيّة التّاليّة :
$$\begin{cases}V_0=0\\ V_{n+1}=3V_n+n+1\end{cases}$$

1/ أحسب $V_1;V_2;V_3$.

2/ أثبت بالتّراجع أنّ : $V_n\geq 0$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ ثمّ استنتج إتّجاه تغيّر المتتاليّة (V_n) .

3/ نعرّف المتتاليّة (U_n) حيث : $U_n=\ln\left(V_n+\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{4}\right)$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

أ) أثبت أنّ (U_n) حسابيّة يطلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب U_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج V_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

4/ نضع : $S_n=U_0+U_1+U_2+\ldots\ldots+U_n$ ؛ $S'_n=V_0+V_1+V_2+\ldots\ldots+V_n$.

◁ أحسب S_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج S'_n .

10 نعتبر الدّالّة f المعرّفة على المجال $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1/ أدرس إتّجاه تغيّر الدّالّة f ؛ ثمّ أرسم (C_f) .

2/ (u_n) متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

أ) مثّل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$ على حامل محور الفواصل دون

حسابها مبيّنا خطوط الإنشاء .

ب) بيّن بالتراجع أنّ : $u_n > 1$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ج) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تمامًا . ماذا تستنتج ؟ .

3/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - 1 \le \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $u_n - 1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ ثمّ استنتج نهاية المتتاليّة (u_n) .

4/ (v_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) هندسيّة يُطْلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل ؛ ثمّ أكتب v_n بدلالة n

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \ldots + \frac{v_n - 1}{u_n}.$$

11 المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{5} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$

1/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

2/أ) برهن بالتراجع أنّ : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) هل (u_n) متقاربة ؟ . عين نهايتها .

3/ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n + 1}$.

أ) أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n و أحسب نهاية (u_n) من جديد .

4/ ليكن المجموع S_n حيث :

$$S_n = \frac{u_0}{2u_0 + 1} + \frac{u_1}{2u_1 + 1} + \cdots + \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

• أحسب S_n بدلالة n .

12 المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}.$$

1/ أحسب $u_1, u_2 u_3$ ، ثمّ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2/أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \le n+3$.

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ج) استنتج أنّ المتتالية (u_n) محدودة من الأدنى ، هل يمكن القول أنّ : (u_n) متقاربة ؟ .

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - n$.

أ) بين أنّ (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

4/ (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = \ln v_n$.

أ) بين أنّ (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أحسب بدلالة n المجموع L_n حيث : $L_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$.

ج) ب) أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$.

13 (V_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}V_n^2 + 1} \end{cases}.$$

1/ أحسب V_1 و V_2 .

2/ نضع : $U_n = V_n^2 - 2$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

أ) بيّن أنّ (U_n) متتاليّة هندسيّة يُطْلَبُ تعيين أساسها q و حدّها الأوّل .

ب) أكتب U_n بدلالة n ، ثمّ استنتج V_n بدلالة n .

3/أ) بيّن أنّ : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2}$ لكلّ عدد حقيقي x موجب تماما .

ب) استنتج أنّ : $\sqrt{2} \leqslant V_n \leqslant \sqrt{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$ لكلّ عدد

طبيعي n ؛ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

4/ ليكن المجموع S_n حيث: $S_n = V_0^2 + V_1^2 + V_2^2 + \ldots\ldots + V_n^2$
.

◃ أحسب S_n بدلالة n .

14 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$. من أجل كل عدد طبيعي n .

1/ برهن بالتراجع أنّ : $u_n > 2$ من أجل كل عدد طبيعي n .

2/ أ) أثبت أنّ : $u_n^2 \geq u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) بيّن أنّ : $u_{n+1} \geq 2u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ج) استنتج أنّ : $u_n \geq 2^n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

3/ تحقق أنّ : $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = (2-x)(x^2-1)$.

4/ أدرس إتجاه تغيّر (u_n) ، هل هي متقاربة ؟ . علل .

5/ أ) بيّن أنّ : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) استنتج أنّ : $u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n .؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ من جديد .

15 f الدالة المعرفة على المجال $\left[\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right]$ بـ : $f(x) = \frac{5x-8}{x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني .

1/ أدرس تغيّرات الدالة f .

2/ بيّن أنه إذا كان : $x \in [3;5]$ فإنّ : $f(x) \in [3;5]$.

3/ أنشئ المنحنى (C_f) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4/ نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$.

أ) مثّل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و v_0, v_1, v_2 (دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء .) .

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر كل من (u_n) و (v_n) و تقاربهما .

ج) باستخدام البرهان بالتراجع أثبت ما يلي :

$3 < u_n < 5$ و $3 < v_n < 5$ من أجل كل عدد طبيعي n .

5/ نقبل صحة الخاصيتين التاليتين : $u_n \leq u_{n+1}$ و $v_{n+1} \leq u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) أثبت أنّ : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3(v_n - u_n)}{(v_n-1)(u_n-1)}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) بيّن أنّ : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(v_n - u_n)$ و $v_n - u_n \geq 0$ من أجل كل عدد طبيعي n .

ج) استنتج أنّ : $v_n - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n
.

د) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين نحو نفس النهاية ℓ ، ثمّ عيّن القيمة المضبوطة للعدد ℓ .