تمارين نموذجية في الإحتمالات

من كتابة : الأستاذ ناعم محمد

1 يحتوي كيس على 4كرات صفراء و 8 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب بطريقة عشوائيّة كرتان من الكيس على التوالي دون إرجاع .

1/ أرسم شجرة الإحتمالات التي تنمذج الوضعيّة السّابقة

2/ أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

A : الحصول على كرة صفراء ثمّ كرة خضراء .

B : الحصول على كرة خضراء ثمّ كرة صفراء .

C : الحصول على كرتين من لونين مختلفين .

2 تتكوّن مجموعة أشخاص من ثمانيّة رجال و أربع نساء من بينهم رجل واحد إسمه ابراهيم و امرأة واحدة إسمها فاطمة ، نريد تكوين لجنة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام

1/ أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

A : تكوين لجنة تضم ثلاث رجال .

B : تكوين لجنة تضم رجل ؛ امرأتين .

C : تكوين لجنة تضم ابراهيم .

D : تكوين لجنة تضم ابراهيم أو فاطمة .

2/ ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ اختيار بعدد الرّجال في اللجنة المكوّنة .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X . و عيّن قانون إحتماله .

ب) أحسب الأمل الرّياضي ا التباين للمتغيّر العشوائي X.

3 لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمسابقة توظيف ؛ يسحب المترشّح عشوائيا على التّوالي دون إرجاع بطاقتين من صندوق يحوي 10 بطاقات : 8 منها خاصة بمادة الرّياضيات و 2 خاصة بمادة اللغة الفرنسيّة .

1/ لتكن الحادثة A : سحب بطاقتين تتعلّق باللغة الفرنسيّة ؛ و الحادثة B : سحب بطاقتين تتعلّق بمادتين مختلفتين (لا يمكن التّمييز بين البطاقات)

◁ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{1}{45}$ و $P(B)=\frac{16}{45}$.

2/ ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبة بعدد البطاقات المتعلّقة بمادة اللغة الفرنسيّة .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

ب) عيّن قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X.

ج) أحسب الأمل الرّياضي و التّباين للمتغيّر العشوائي X.

4 يحتوي كيس على 9 كريات لا نفرّق بينها عند اللمس ؛ ثلاث منها حمراء و أربع خضراء ؛ و كرتان بيضاوان ؛ نسحب عشوائيا كرتين على التّوالي دون إرجاع .

1/ عيّن عدد الحالات الممكنة للسّحب .

2/ نعتبر الحدثين A و B حيث (A : سحب كرة بيضاء في المرّة الأولى ؛ B : سحب كرتين من نفس اللون .)

أ) بيّن أنّ : $P(A)=\frac{2}{9}$.

ب) أحسب إحتمال B ثمّ استنتج $P(\overline{B})$.

3/ علما أنّ الكرة المسحوبة الأولي بيضاء ؛ أحسب إحتمال سحب كرتين من لونين مختلفين .

4/ ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة ؛ أنقل جدول قانون إحتمال X ؛ ثمّ إملأه معللا جوابك

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	.....	....	....

5 يحتوي صندوق U_1 على 7 كريات منها أربع حمراء و ثلاث خضراء (لا نفرّق بينها عند اللمس) ؛ و صندوق U_2 يحتوي على 5 كريات منها ثلاث حمراء و إثنان خضروان (لا نفرّق بينها عند اللمس) .

① نعتبر التجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس U_1 ؛ و نعتبر الحادثة A : الحصول على كريّة حمراء واحدة و كرتين خضراوين و الحادثة B : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون .

◁ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{12}{35}$ و $P(B)=\frac{1}{7}$.

② نعتبر التّجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس U_1 ؛ ثمّ نسحب كريّة من الكيس U_2 ؛ و لتكن الحادثة C : الحصول على ثلاث كريات حمراء .

◁ بيّن أنّ : $P(C)=\frac{6}{35}$

6 يحتوي صندوق على 10 كريات ؛ 4 منها حمراء و الباقي خضراء (الكريّات لا نفرّق بينها عند اللمس) ؛ نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق .

1) نعتبر الحادثة A : الكريتان المسحوبتان حمراوان .

◁ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{2}{15}$.

2) ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ سحب عدد الكريّات الحمراء المتبقيّة في الصندوق بعد سحب الكرتين

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

ب) بيّن أنّ : $P(X=3)=\frac{8}{15}$ ؛ ثمّ حدّد قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرّياضي لـ X .

7 يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام 0, 1, 2 و كرتان سوداوان تحملان الرّقمين 1, 2 (لا يمكن التّمييز بين الكرات)؛ نسحب من الصندوق كرتان على التّوالي دون إرجاع .

1/ نعتبر الحادثتين A و B حيث A : الكرتان المسحوبتان تحملان الرّقم 1 ؛ B: سحب كرة بيضاء في المرّة الأولى .

◄ أ) بيّن أنّ : $P(A)=\frac{1}{10}$.

◄ ب) أحسب إحتمال الحادثة B و بيّن أنّ : $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$.

◄ ج) هل الحادثتان A و B مستقلّتان ؟ ؛ علل جوابك .

2/ X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب جداء الرّقمين اللذين تحملهما الكرتين المسحوبتين .

أ) أنقل الجدول أدناه و أكمله ؛ معللا جوابك .

ب) أحسب الأمل الرّياضي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X .

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	.....	....	....	....

8 A و B حادثتان من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائيّة ؛ $\overline{A}$ ؛ $\overline{B}$ الحادثتان العكسيتان لـ A و B ؛ نعتبر شجرة الإحتمال المبيّنة أدناه .

1/ أ) ما ذا يمثّل كلّ من x و y .

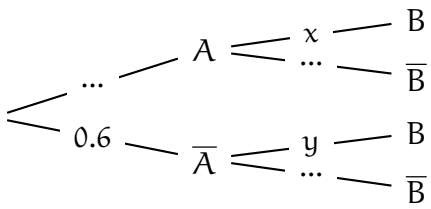
ب) أكمل شجرة الإحتمال .

2/ عبّر عن $P(B)$ بدلالة x و y .

3/ ماهي العلاقة بين x و y حتى تكون A و B مستقلّتان.

4/ عبّر عن $P_B(A)$ بدلالة x و y.

5/ نفرض أنّ $y=0.8$ ؛ هل توجد قيمة لـ x حتى تكون $P_B(A)=P_A(B)$ ؟.



9 صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء و كلّ الكرات متماثلة و لا نفرّق بينها عند اللمس ؛ نسحب عشوائيا كرة من الكيس و نسجّل لونها ثمّ نعيدها إلى الكيس و نسحب منه كرة واحدة و نسجّل لونها .

1/ أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

أ) الحصول على كرتين بيضاوين .

ب) الحصول على كرتين من نفس الّون .

2/ نعرّف لعبة حظ كما يلي : تمنح لكلّ كرة بيضاء العلامة α و لكلّ كرة سوداء العلامة $-\alpha$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ ؛ X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النّقاط المحصل عليها .

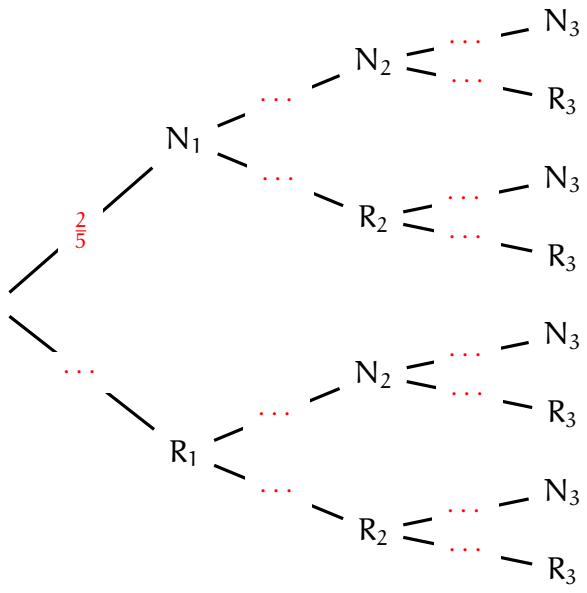
أ) عيّن قيم X ؛ ثمّ عيّن قانون إحتمال X و عيّن الأمل الرياضي لـ X

ب) عيّن قيمة α حتى تكون اللعبة مربحة .

3/ نضيف للكيس $n-3$ كريّة و نعيد عمليّة السحب أعلاه ؛ ما هو عدد الكرات السّوداء التي تمّ إضافتها إلى الصندوق ؛ علما أن إحتمال A هو $\frac{1}{4}$.

10 ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 ، الصندوق U_1 يحتوي 2 كرات سوداء و 3 حمراء ؛ الصندوق U_2 يحتوي على كرة سوداء و 4 حمراء ؛ و الصندوق U_3 يحتوي على 3 كرات سوداء و 4 حمراء ؛ نقوم التّجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا كرة من U_1 و كرة من U_2 و نضعهما في الصندوق U_3 ؛ ثمّ نسحب كرة من الصندوق U_3 ؛ نرمز بـ N_i للحادثة سحب كرة سوداء من الصندوق U_i حيث i يأخذ القيم 1, 2, 3 ، نفس الشيء R_i للحادثة سحب كرة سوداء من الصندوق U_i حيث i يأخذ القيم 1, 2, 3 .(الكرات لا نفرّق بينها عند اللمس).

1/ أعد رسم شجرة الإحتمالات التّاليّة و أكملها .



2/ أ) أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

$N_1\cap N_2\cap N_3$ و $N_1\cap R_2\cap N_3$.

ب) استنتج إحتمال $N_1\cap N_3$.

ج) أحسب بطريقة مماثلة إحتمال $R_1\cap N_3$.

3/ استنتج من السؤال السّابق إحتمال الحادثة N_3 .

4/ هل الحادثتان N_3 و N_1 مستقلّتان.

5/ نفرض أنّ الكرة المسحوبة من الصندوق U_3 سوداء ؛ ما هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء .

11 وحدة إنتاجيّة يسيّرها 10 عمال ، منهم 4 نساء و 6 رجال ، أرادوا اختيار لجنة تسيير مؤلّفة من 3 أعضاء من بين العمّال العشرة ، ما هو الإحتمال لكي تشمل :

1/ 3 نساء 2/ على الأكثر امرأتين.

3/ على الأقل إمرأتين 4/ على الأقل إمرأة .

12 في ورشة 2% من القطع المصنوعة فاسدة ، قرر صاحب الورشة أن يجري عملية مراقبة كما يلي :

◃ إذا كانت القطعة المصنوعة في حالة جيّدة فإنّ إحتمال قبولها هو 0.96.

◃ إذا كانت القطعة المصنوعة فاسدة فإنّ إحتمال رفضها هو 0.98.

نختار قطعة و بقبل أنّ الإختيارات متساويّة الإحتمال ، نرمز بـ C إلى الحادثة : القطعة المصنوعة في حالة جيّدة و مرفوضة ، ماهو إحتمال الحادثة C .

13 نعتبر صندوقين U_1 و U_2 بهما كريّات لانفرق بينها عند اللمس ؛ الصندوق U_1 يحتوي n كريّة بيضاء و 3 سوداء n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 ، الصندوق U_2 يحتوي كرتين بيضاوين و كريّة سوداء ، نسحب عشوائيا كريّة من الصندوق U_1 و نضعها في الصندوق U_2 ؛ ثمّ نسحب كريّة من الصندوق U_2 .

نعتبر الحادثة B_i : سحب كريّة بيضاء من الصندوق U_i .

1/ نعتبر الحادثة A سحب كريّة من نفس اللون بالنّسبة للصندوقين U_1 و U_2 .

أ) بيّن أنّ إحتمال A هو $P(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

ب) عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A)$.

2/ نعتبر الحادثة B : بعد التّجربة ، الصندوق U_1 يحتوي على كريّة بيضاء واحدة

◃ بيّن أنّ $P(B)=\frac{6}{4(n+3)}$.

14 اختارت مجلّة عشرة كتب مختلفة مثنى مثنى و مكوّنة من 4 كتب في الرّواية و 4 كتب في العلوم و 2 في التّاريخ ، قرّرت إعداد لائحة تتضمّن ترتيبا لعناوين ثلاث كتب من بين العشرة عن طريق القرعة لسحب ثلاث عناوين واحد تلو الآخر دون إرجاع .

1/ بيّن أنّ عدد اللوائح هو 720 .

2/ أحسب إحتمال الحادثين التّاليتين :

A : الحصول علي لائحة يكون أوّلها عنوان كتاب تاريخ .

B: الحصول على لائحة لا تتضمّن أي عنوان كتب تاريخ .

3/ X المتغيّر العشوائي الذي يربط كل لائحة بعدد عناوين كتب التّاريخ .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

ب) عيّن قانون إحتمال X و أحسب أمله الرّياضي .

15 عادة ما ينسى الأستاذ مفاتيح القسم. من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، نسمي E_n الحادثة : (الأستاذ ينسى مفاتيحه في القسم في اليوم n) ؛ ليكن P_n احتمال E_n . نسمي الاحتمال $P_1=a$ بأنه ينسى مفاتيحه في اليوم الأول $n=1$.

نفرض أن الشروط التالية محققة :

◄ إذا نسي مفاتيحه في اليوم n ،فإنّ احتمال أن ينساهم في اليوم الموالي $n+1$ هو : $\frac{1}{10}$.

◄ إذا لم ينس مفاتيحه في اليوم n ، ،فإنّ احتمال أن ينساهم في اليوم الموالي $n+1$ هو : $\frac{4}{10}$.

1/ شكّل شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه الوضعية.

2/ احسب الإحتمالين الشرطيين : $P_{E_n}(E_{n+1})$ و $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$ ثم بدلالة P_n احسب الإحتمالين : $P(E_{n+1}\cap E_n)$ و $P(E_{n+1}\cap \overline{E_n})$.

3/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $P_{n+1}=-\frac{3}{10}P_n+\frac{4}{10}$.

4/ نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=13P_n-4$.

أ) بيّن أن (U_n) متتالية هندسية ، وعيّن الحد الأول لها بدلالة a .

ب) اكتب U_n بدلالة n و a ، ثم استنتج عبارة P_n بدلالة n و a .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$ ؛ كيف تفسّر هذه النّتيجة ؟.

16 صندوق U_1 يحتوي على 7 كريّات منها 4 حمراء و 3 خضراء و صندوق آخر U_2 يحتوي 5 كريّات منها 3 حمراء و 2 خضراء (الكريّات لا نفرق بينها عند اللمس) .

1/ نعتبر التّجربة العشوائيّة التّاليّة : نسحب عشوائيا 3 كريّات من الصندوق U_1 و نعتبر الحادثين A و B حيث ؛ A : الحصول على كريّة حمراء واحدة و إثنان خضراوان ؛ B: الحصول على ثلاث كريّات من نفس اللون .

◃ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{12}{35}$ و $P(B)=\frac{1}{7}$.

2/ نعتبر التّجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا كريتين من الصندوق U_1 ؛ ثمّ نسحب عشوائيا كريّة من الصندوق U_2 و لتكن الحادثة C : الحصول على ثلاث كريّات حمراء .

◃ بيّن أنّ : $P(C)=\frac{6}{35}$.