1 مبرهنة القيم المتوسطة

◄ مبرهنة القيم المتوسطة (الصيغة 1) :

$$\begin{cases} f \text{ مستمرة على } [a;b] \\ k \in f([a;b]) \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha \in [a;b] ; k = f(\alpha)$$

◄ مبرهنة القيم المتوسطة (الصيغة 2) :

$$\begin{cases} f \text{ مستمرة على } [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \exists \alpha \in [a;b] ; f(\alpha) = 0$$

◄ المعادلة : $f(x) = 0$

$$\begin{cases} f \text{ مستمرة على } [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{تقبل على الأقل حلاً في المجال }]a;b[$$

◄ المعادلة : $f(x) = 0$

$$\begin{cases} f \text{ مستمرة على } [a;b] \\ f \text{ رتيبة على } [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{تقبل حلاً وحيدًا في المجال }]a;b[$$

01 بيّن أن المعادلة : $x^5 - 3x^4 + x^2 - 1 = 0$ لها على الأقل حلاً في المجال $[0;3]$.

02 بيّن أن المعادلة: $-x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلاً وحيدًا في المجال $[1;2]$.

03 بيّن أن المعادلة: $\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}\cos x$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[2\pi;3\pi]$.

04 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :
$$f(x) = \tan x - x - 1$$

1) بيّن أن f دالة مستمرة على المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$.
2) بيّن أن f دالة متزايدة تمامًا على المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$.
3) حدد صورة المجال $[0;\frac{\pi}{2}[$ بالدالة f .
4) استنتج أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ حيث $\tan\alpha = \alpha + 1$.

05 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :
$$f(x) = x^3 + 3x + 8$$

1) أُدرس تغيرات الدالة f.
2) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $-1.52 < \alpha < -1.51$
3) عين اشارة $f(x)$ حسب قيم x .

06 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :
$$f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$$

1) أُدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;\pi]$.
2) استنتج أنّه يوجد α وحيد من المجال $[0;\pi]$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$.

07 نعتبر f دالة عددية مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث : $f([0;1]) = [0;1]$ نضع من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$ $g(x) = f(x) - x$.

1) بيّن أن : $g(0)g(1) \leq 0$.
2) استنتج أنه يوجد α من المجال $[0;1]$ حيث $f(\alpha) = \alpha$.

08 لتكن f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$: $1 < f(x) \leq 2$ ، ولتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي : $g(x) = xf(x) - 1$.

1) بيّن أن الدالة g مستمرة على المجال $[0;1]$.
2) حدّد اشارة كل من $g(0)$ وَ $g(1)$.
3) استنتج أنه يوجد عدد c من المجال $]0;1[$ حيث : $f(c) = \frac{1}{c}$.

09 لتكن f دالة عددية مستمرة على المجال $[0;1]$. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0;1]$ بما يلي :
$$g(x) = x(x-1)f(x) - 2x + 1$$

1) بيّن أن الدالة g مستمرة على المجال $[0;1]$.
2) أُحسب $g(0)g(1)$.
3) استنتج أنه يوجد α من المجال $]0;1[$ حيث : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}$.

10 ليكن p و q عددين من $\mathbb{R}_+^*$ ولتكن f دالة عددية مستمرة على المجال $[0;1]$ بحيث : $f(0) \neq f(1)$. نعتبر الدالة العددية g والمعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي :
$$g(x) = f(x) - \frac{pf(0) + qf(1)}{p+q}$$

1) بيّن أن الدال g مستمرة على المجال $[0;1]$.
2) حدّد إشارة الجداء $g(0)g(1)$.
3) بيّن أنه يوجد c من المجال $]0;1[$ حيث :
$$f(c) = \frac{pf(0) + qf(1)}{p+q}$$

حصر حلول المعادلة $f(x)=0$ باستعمال طريقة التنصيف :

1) إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على مجال $I=[a;b]$ حيث ($f(a)<0$ و $f(b)>0$) فإنه حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in I$ يحقق $f(\alpha)=0$.

2) لحصول على تقريب أفضل للعدد α نتبع المراحل التالية :

ا- نحسب $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

ب- فإذا كانت النتيجة موجبة و حيث أن $f(a)<0$ فهذا يعني أن $\alpha\in J$ حيث $J=\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ أو $J=\left[\frac{a+b}{2};a\right]$ (حسب رتابة الدالة f).

ج- و إذا كانت النتيجة سالبة و حيث أن $f(b)>0$ فهذا يعني أن $\alpha\in J$ حيث $J=\left[b;\frac{a+b}{2}\right]$ أو $J=\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ (حسب رتابة الدالة f).

د- بذلك و في جميع الحالات نكون قد وجدنا حصراً أفضل للعدد α حيث أن سعة المجال J أصغر من سعة المجال I .

إذن لحصول تأطير أكثر دقة نكرر العملية السابقة انطلاقا من المجال J حتى نحصل على السعة المرغوبة.

11

1) بيّن أن المعادلة : $x^3+x-1=0$ تقبل حلًا وحيدًا α ينتمي إلى المجال $]0;1[$.

2) حدد حصراً للعدد α سعته 0.25 .

12

1) بيّن أن المعادلة : $x^3-6x^2+6=0$ تقبل حلًا وحيدًا α ينتمي إلى المجال $[0;4]$

2) حدد حصراً للعدد α سعته 0.5 .

2 قابلية الاشتقاق والتفسير البياني

01

في كل حالة ،أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة a ،وفسّر النتيجة المحصل عليها بيانيًا.

1) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ ، $a=1$ من اليمين.

2) $f(x)=x^2-1+|x-2|$ ، $a=2$.

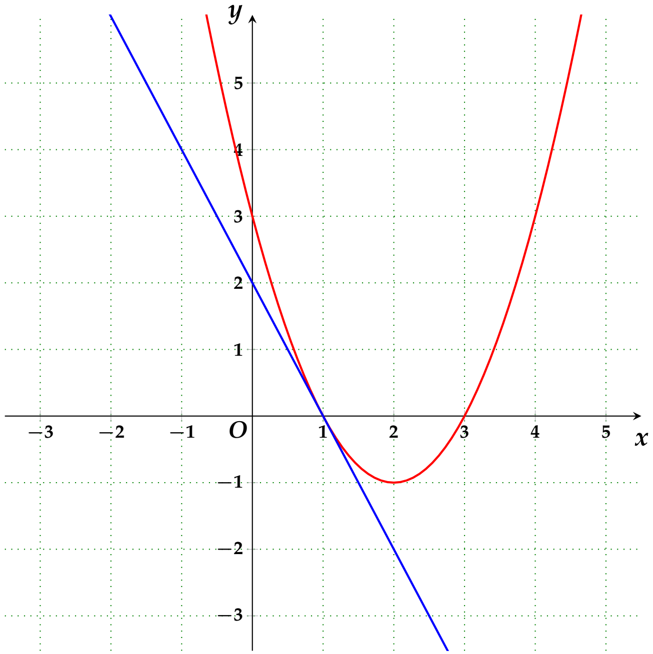
3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\,;x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$, $a=0$.

02

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a,b,c أعداد حقيقية. (C_f) تمثيلها البياني في الشكل المقابل .

1) بقراءة بيانية أحسب كلًا من : $f(1)$ ، $f(2)$ و $f'(1)$.

2) باستعمال النتائج السابقة عيّن a,b,c .



03

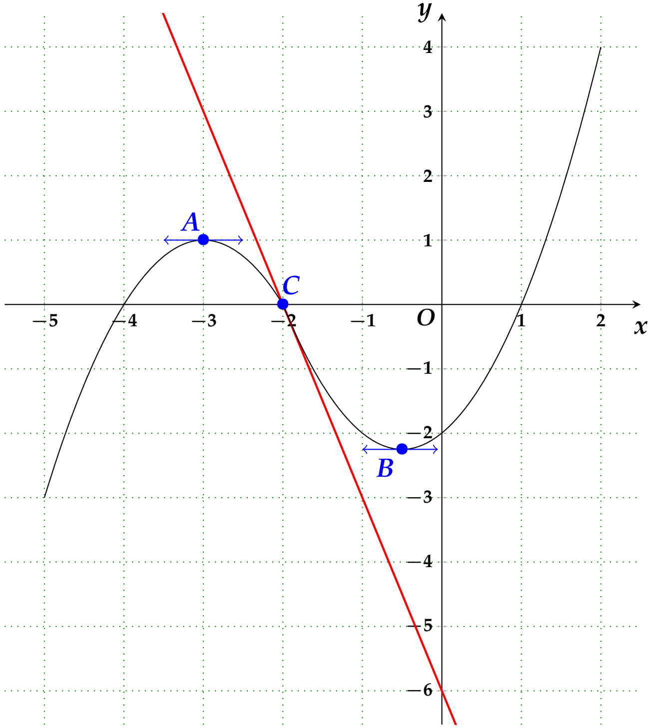
المنحنى (C_f) التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها.

1) عيّن مجموعة تعريف الدالة f .

2) بقراءة بيانية عيّن العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\frac{1}{2}$ ، -3 و -2 علمًا أن ترتيب النقطة B هو $-\frac{9}{4}$.

3) استنتج معادلات المماسات للمنحنى (C_f) عند A ، B و C .

4) هل توجد مماسات أخرى للمنحنى (C_f) موازية لمماسه عند النقطة C ؟



04

الشكل الموالي هو التمثيل البياني (C_f) لدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. المنحنى (C_f) يحقق الشروط التالية :

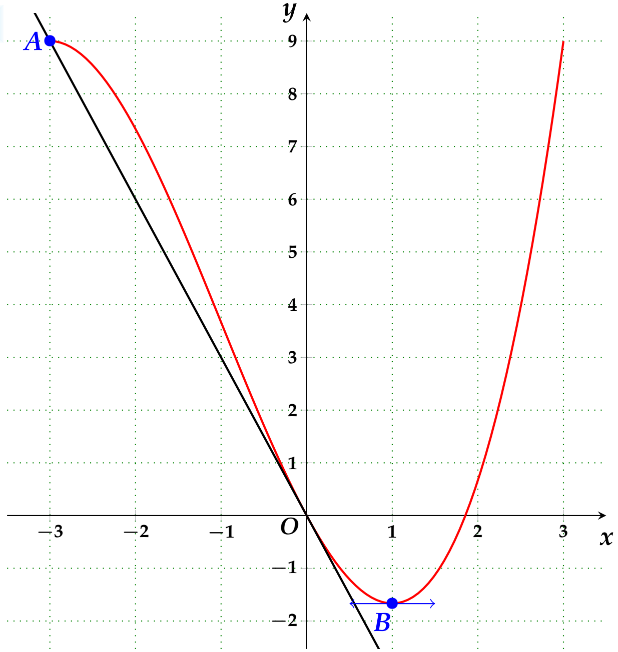
يمر بمبدأ المعلم O، ويشمل النقطة $A(-3;9)$، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسًا أفقيًا ويقبل المستقيم (OA) كمماس له.

1) ماهو معامل توجيه المستقيم (OA) ؟

2) نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ بـ: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية.

ا) بيّن باستعمال الشروط السابقة أنّ : $a=\frac{1}{3}, b=1, c=-3, d=0$.

ب) حلّل $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .



05

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$.

وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أُدرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0.

2) أُدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 وفسّر النتيجة بيانيًا وأُكتب معادلتي نصفي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة ذات الفاصلة 0 وماذا تسمى هذه النقطة.

3) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها وفسّر النتائج بيانيا .

4) أُدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

5) ارسم (Δ_1) ، (Δ_2) و المنحنى (C_f) .

06

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x-2}$. وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون للمنحنى (C_f) مستقيم معادلته : $y=x-3$ و f تقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها 3.

2) أُدرس تغيرات الدالة f .

3) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما -3 ، يطلب إعطاء احداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2) .

4) أُرسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحنى (C_f).

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقاط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y=-3x+m$.

07

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+2\sqrt{|x|}$ وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أُدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 وفسّر النتيجة بيانيا وماذا تسمى النقطة ذات الفاصلة 0 .

2) أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

3) بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ثم أُحسب $f'(x)$ ثم أُدرس اتجاه تغير الدالة f.

4) شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) عيّن احداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

6) أُرسم المنحنى (C_f) في المجال $[-9;4]$.

08

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\sqrt{(x+2)^2}+\frac{1}{x+1}$.

وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

1) أُدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=-2$ ثم فسّر النتيجة بيانيًا.

2) أُدرس تغيرات الدالة f.

3) أُحسب : $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-2)]$ وفسّر النتائج بيانيًا.

4) عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم أحسب فاصلة نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

5) أُرسم بدقة المنحنى (C_f) وبصفة خاصة نصفي المماسين عند النقطة الزاوية.

09

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-x+\alpha & x<2\\ \frac{x^2}{x+1} & x\geq 2\end{cases}$ حيث α عدد حقيقي.

وليكن f المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1) اوجد العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f مستمرة عند القيمة 2 . نفرض في كل مما يلي : $\alpha=\frac{2}{3}$.

2) أُدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$ وبصفة خاصة عند القيمة 2 ثم فسّر النتيجة بيانياً. ثم أُدرس تغيرات الدالة f.

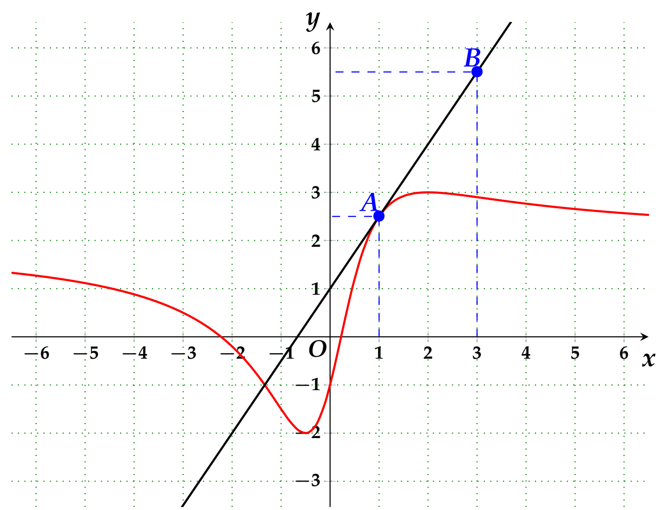
3) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته. . أرسم (C_f) .

10

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=a+\frac{bx}{x^2+1}+\frac{c}{x^2+1}$$

- عيّن الأعداد الحقيقية a,b,c علماً أن المماس عند النقطة $A\left(1;\frac{5}{2}\right)$ يشمل النقطة $B\left(3;\frac{11}{2}\right)$ والمماس عند النقطة ذات الفاصلة 2 يوازي حامل محور الفواصل.



11

المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1) ا) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g وحدد $g(0)$ و إشارة $g(\frac{1}{2})$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha)=0$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2) f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

ا) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x)^3}$

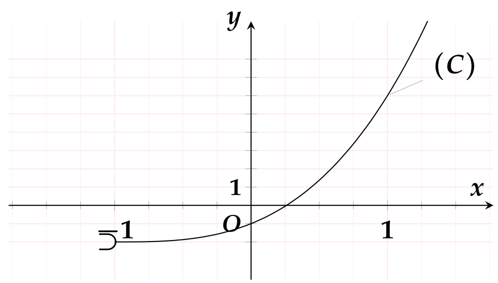
ب) عين دون حساب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا .

ج) أُحسب: $\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ وفسر النتيجتين بيانيا .

د) شكل جدول تغيرات الدالة f

3) نأخذ $\alpha\simeq 0.26$ ، عين مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}.

4) أُرسم المنحنى (Γ)



12

لتكن f دالة عددية قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها .لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$ حيث a ، b، c أعداد حقيقية .

1) أحسب $f'(x)$.

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :

أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c.

ب) عين $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ و $\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ج) قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك .

3) نأخذ فيما يلي : $a=1$ ، $b=1$ ، $c=\frac{1}{4}$ وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد و متجانس .

ا) بين أنه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y=x+1$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (c) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) أثبت أن النقطة $\omega(1,2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

د) عين نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل .

4) λ عدد حقيقي ، عين بيانيا، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$.