تجميعية سلاسل تمارين في مختلف المحاور

3
AS

تجدون في هذا الملف :

1. سلسلة تمارين في الأعداد المركبة
2. سلسلة تمارين في الإحتمالات
3. سلسلة تمارين في المتتاليات العددية
4. سلسلة تمارين في الهندسة الفضائية

الشعب :
- علوم تجريبية
- تقني رياضي
- رياضيات

من كتابة الأستاذ : ناعم محمد

math exercices-na2019X LaTeX

سلسلة تمارين في الأعداد المركبة

1

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :
$(z+5-i\sqrt{3})(z^2+2z+4)=0$.

2/ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، $A,B;C$ النّقط ذات اللواحق $z_A=-1-i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$
؛ S التشابه الماشر الذي يحوّل A إلى C و يحوّل O إلى B .

– جد الكتابة المركّبة للتشابه S ؛ ثمّ عيّن العناصر المميّزة له

3/ أ) عيّن z_D لاحقة النّقطة D مرجح الجملة $\{(A;2),(B;-1),(C;1)\}$.

ب) أكتب العدد المركّب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ABD .

ج) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث :
$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|$.

2

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :
$2z^2+6z+17=0$

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النّقط $A;B;C$ لواحقها $z_A=-4$ و $z_B=-\frac{3}{2}+i\frac{5}{2}$ ، $z_B=-\frac{3}{2}-i\frac{5}{2}$.

– أحسب الطويلة و عمدة العدد المركّب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ABC .

3/ أ) عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على التّرتيب حتى يكون الرّباعي $BCDE$ مربعا مركزه A.

ب) عيّن (Γ_1) مجموعة النّقط من المستوي حيث
$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\|=10\sqrt{2}$.

4/ عيّن (Γ_2) مجموعة النّقط من المستوي حيث
$\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$.

– تحقق أنّ B تنتمي إلى (Γ_2) ؛ ثمّ عيّن المجموعة (Γ_2).

3

نعتبر المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ التّاليّة :
$(E)\ldots 2\overline{z}^3+3\overline{z}^2-3\overline{z}+5=0$ ، حيث $\overline{z}$ يشير إلى مرافق z .

1/ أ) أثبت أنّ (E) تكافيء المعادلة :
$(2\overline{z}+5)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)=0$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2/ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ؛ نعتبر النّقط A،B،C،D التي لواحقها
$z_A=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ؛ $z_B=\overline{z_A}$ ؛ $z_C=-1$ ؛ $z_D=-\frac{5}{2}$.

أ) أكتب كلا من z_A و z_B على الشّكل الأسي .

ب) أنشيء النقط A ؛ B ؛ C ؛ D .

ج) أثبت أنّ : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د) استنتج طبيعة المثلّث ABC .

3/ عيّن طبيعة المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1=kz_B$ لما يتغيّر k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

4 المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، L العدد المركّب المعرّف كما يلي :

$L=\dfrac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$.

1) أ) أكتب L على الشّكل الجبري ثمّ على الشّكل الأسي

ب) بيّن أنّ : $L^{12}+1=0$ ثمّ أحسب $(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2})^{12}+(5+3i)^{12}$

ج) n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أنّ : $L^{4n}+L^{4p}=0$

2) أ) النقطتان A و B لاحقتاها على الترتيب $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$ ، عيّن اللاحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\dfrac{3\pi}{4}$

ب) عيّن لاحقة النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABA'

5 نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(E)\ldots\ z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثمّ أكتب حلولها على الشّكل المثلّثي .

2/ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النّقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=2i$ ؛ $z_B=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=\sqrt{3}-i$ ، نضع : $L=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

أ) أكتب L على الشّكل الأسي

ب) أثبت أنّ : $z_A-z_B=L(z_C-z_B)$ ، ثمّ استنتج أنّ A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميّزة

ج) استنتج نوع المثلّث ABC ثمّ أحسب مساحته

6 نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z)$ حيث : $p(z)=z^3-2z^2+2z-1$

1) تحقق أنّ 1 جذر لكثير الحدود $p(z)$ ، ثمّ حل المعادلة $p(z)=0$

2) نعتبر المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النّقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_C=1$

أ) أكتب كلا من z_A و z_B على الشّكل المثلّثي و الأسي

ب) أثبت أنّ النقط A ، B ، C هي نقط من الدائرة المثلّثية .

ج) تحقق أنّ $z_A^2=z_A-1$ ثمّ استنتج أنّ العدد المركّب z_0 حيث $z_0=z_A^2-z_B^2$ تخيّلي بحت

د) عيّن z_G لاحقة النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC

ه) L العدد المركّب المعرّف بـ : $L=\dfrac{z_A^2}{z_B^2}$ ، بيّن أنّ $|L|=1$ و أنّ $arg(L)=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k$ ، حيث $(k\in\mathbb{Z})$

أكتب L على الشّكل الأسي

و) ليكن R الدّوران ذو المركز C و الذي يحقق : $R(B)=A$ ، عيّن قيس زاوية هذا الدّوران

7 نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة العدد المعرّف كما يلي : $\alpha=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$

- أحسب α^2
- أكتب على الشّكل المثلّثي و الأسي α^2
- استنتج طويلة و عمدة العدد α
- أحسب القيمة المضبوطة لـ : $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ ، $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

المستوي المركّب مزوّد بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النّقطة M من المستوي صورة العدد z حيث : $z=x+iy$

- عيّن مجموعة النّقط M من المستوي التي تحقق :

$\left|\dfrac{z}{z-1}\right|=|\alpha|$

8

1) حل في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(I)\ldots\ z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ، α وسيط حقيقي

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلّي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

3) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ النّقط A ، B ، C التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ ، $z_C=4+i\sqrt{3}$

أ) أنشيء النّقط A ، B و C .

ب) أكتب على الشّكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثمّ استنتج أنّ C صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

ج) عيّن لاحقة النّقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$

د) أحسب z_D لاحقة النّقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع

9

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$(1)\ldots\ 3z^3-2z^2+4z+16=0$

1. بيّن أنّ : العدد $-\frac{4}{3}$ حلٌ للمعادلة (1)

2. بيّن أنه إذا كان z حلًا للمعادلة (1) فإنّ $\bar{z}$ هو أيضًا حل للمعادلة (1)

3. ليكن α عدد مركّب غير معدوم ، نعتبر النّقط A ، M ، N ، P التي لواحقها على التّرتيب -2 ، α ، $\frac{3\alpha^2}{2}$ ، $\frac{8}{\alpha}$. أثبت أنّه إذا كان الرّباعي $MNAP$ متوازي أضلاع فإنّ : α حل للمعادلة (1)

4. نضع: $\alpha=1+i\sqrt{3}$

أ) أكتب كلًا من z_M ، z_N ، z_P على الشّكل الأسي

ب) أنشيء النّقط A، M ، N ، P و بيّن أنّ الرّباعي $MNAP$ متوازي أضلاع ، و استنتج عندئذٍ حلول المعادلة (1)

10

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

I) حالة خاصة

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التّرتيب $z_A=3+i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$

1) أثبت أنّ O هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC

2) عيّن النّقط A ، B ، C ، و H ذات اللاحقة $z_H=z_A+z_B+z_C$ في المعلم السّابق ،ثمّ تأكّد بيانيا أنّ H هي نقطة تقاطع الإرتفاعات في المثلّث ABC

II) الحالة العامة

ABC مثلّث حيث O مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC ، a ، b ، c لواحق النّقط A ، B ، C على التّرتيب

1. أثبت التكافؤ التّالي : (O مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC) تكافيء ($a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}$)

2. نضع: $w=\bar{b}c-\bar{c}b$

أ) باستعمال خاصية العدد التّخيّلي الصّرف ، أثبت أنّ w تخيّلي بحت

ب) تأكّد من المساواة التالية : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})=w$ ، ثمّ أثبت أنّ : $\frac{b+c}{b-c}=\frac{w}{|b-c|^2}$

ج) أثبت أنّ العدد المركّب : $\frac{b+c}{b-c}$ تخيّلي صرف

3. لتكن H النّقطة ذات اللاحقة $a+b+c$

أ) عيّن بدلالة a ، b و c لاحقتا الشّعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{CB}$

ب) أثبت أنّ : $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AH})=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ، حيث k عدد صحيح نسبي (يمكن أن نثبت بنفس

الطريقة أنّ : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BH})=\frac{\pi}{2}+\pi k$)

ج) ماذا تمثّل النّقطة H بالنسبة للمثلّث ABC

11

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التّالية : $\overline{z}-3iz-3+6i=0$ ، حيث $\overline{z}$ مرافق العدد المركّب z

2) نعتبر النّقطة A ذات اللاحقة $z_A=4-2i$

عيّن الشّكل الجبري لـ z_B لاحقة النّقطة B بحيث المثلّث OAB متقايس الأضلاع مباشر

3) لتكن النّقطة D ذات اللاحقة $z_D=2i$

◇ عيّن المجموعة Γ ، مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z تختلف عن $2i$ بحيث :

$$\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

◇ عيّن المجموعة Γ' ، مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z=2i+2e^{2i\theta}, \theta\in\mathbb{R}$

4) من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z\neq -2$ ، نرفق النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{z-1}{\overline{z}+2}$

◇ عيّن مجموعة النّقط Mذات اللاحقة z تختلف عن -2 حيث : $|z'|=1$

12

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النّقطتين M ، M' ذات اللاحقتين على الترتيب z ، z' ، نضع : $z=x+iy$ ، $z'=x'+iy'$ ، حيث x,x',y,y' أعداد حقيقيّة ، نذكّر بأنّ : $\overline{z}$ يرمز إلى مرافق z و $|z|$ يرمز إلى طويلة العدد المركّب z

1) أثبت أنّ الشّعاعان $\overrightarrow{OM}$ ، $\overrightarrow{OM'}$ متعامدان إذا و فقط إذا كان $Re(z'\overline{z})=0$

2) أثبت أنّ النّقط O ، M ، و M' في إستقامية إذا و فقط إذا كان $Im(z'\overline{z})=0$

3) N النّقطة ذات اللاحقة z^2-1 ، ماهي مجموعة النّقط M بحيث يكون الشّعاعان $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{ON}$ متعامدان ؟

4) نفرض أنّ z غير معدوم ، P النّقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{z^2}-1$

نريد تعيين مجموعة النّقط M ذات اللاحقة z بحيث تكون النّقط O ، N و P في إستقامية

أ) أثبت أنّ : $\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)=-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$

ب) باستعمال التكافؤ الموجود في بداية التّمرين ، عيّن المجموعة المراد البحث عنها

13

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النّقط A ، B ، و I التي لواحقها على التّرتيب $z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_I=1-2i$

1. أنشىء النّقط A ، B ، I في المعلم السّابق

2. أكتب على الشّكل الجبري العدد المركّب Z حيث : $Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$

ما طبيعة المثلّث IAB ؟

3. أحسب z_C لاحقة النّقطة C صورة النّقطة I بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2

4. لتكن النّقطة D مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$ ، أحسب z_D لاحقة النّقطة D

بيّن أنّ الرّباعي $ABCD$ مربّع

5. عيّن و أنشىء المجموعة (Γ_1) ، مجموعة النّقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

6. نعتبر المجموعة (Γ_2) ، مجموعة النّقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

أ) أثبت أنّ B تنتمي إلى (Γ_2)

ب) عيّن و أنشىء المجموعة (Γ_2)

14

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما ، نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، النّقط A ، B ، C ، و E التي لاحقاتها على الترتيب $z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ ، $z_B = -a\sqrt{2}$ و $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$

1. أ) أكتب على الشّكل الأسي العدد المركّب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلّث OAB .

ب) حدّد طبيعة الرّباعي $OABC$ ، ثمّ استنتج مساحته .

2. التّشابه المباشر S ذو المركز O و النّسبة $\frac{b}{a}$ ، و الزّاوية $\frac{3\pi}{4}$ ، يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ) أكتب العبارة المركّبة للتّشابه S ، ثمّ تحقّق أنّ : $S(A) = E$.

ب) بيّن أنّ مساحة الرّباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدّرة بوحدة المساحات) ، حيث $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

3. أ) أحسب بدلالة a و b العبارة :

$$|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E| \cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$$

ب) استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b .

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O ، لاحقتها z_n . نضع: $M_0 = A$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$

نعتبر المتتاليتين (u_n) ، و (v_n) المعرفّتين ، من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

1. أكتب العدد المركّب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشّكل الأسي بدلالة a و b .

2. نفرض أنّ : $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;+\pi[$.

بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية ، و المتتالية (v_n) حسابيّة يطلب تعيين أساس و حساب الحد الأوّل لكل منهما

3. أحسب بدلالة a ، b و n المجموع T_n حيث : $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \ldots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$ ، ثمّ $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

4. عيّن قيم الأعداد الطبيعيّة n التي تكون من أجلها النّقط O ، A ، و M_n في إستقامية

15

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A ، B نقطتان لاحقتيهما على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2i$

1. أ) أكتب z_A و z_B على الشّكل الأسّي

ب) عيّن النقطتين A ، B في المعلم السّابق

ج) ما طبيعة المثلث OAB

2. R الدّوران الذي مركزه O و يحوّل A إلى B ، من أجل كل نقطة M ذات اللاحقة z ، M' صورتها بالدّوران R لاحقتها z'

أ) أحسب $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ ، ثمّ فسّر هذه النّتيجة هندسيا

ب) عيّن الكتابة المركّبة للدّوران R

3. لتكن Γ الدّائرة التي مركزها A و تمر من O ، Γ' الدّائرة التي مركزها B و تمر من O ، ولتكن C النقطة الثانية لتقاطع الدّائرتين Γ و Γ' ، نضع z_C لاحقة النقطة C

أ) أثبت أنّ Γ' صورة Γ بالدّوران R

ب) أحسب z_I لاحقة النّقطة I منتصف القطعة $[AB]$

ج) ما طبيعة الرّباعي $OACB$

د) أثبت أنّ I منتصف القطعة المستقيمة $[OC]$ ، ثمّ استنتج أنّ : $z_C = 1 + (2+\sqrt{3})i$

4. لتكن D النّقطة ذات اللاحقة $z_D = 2i\sqrt{3}$

أ) أثبت أنّ D تنتمي إلى الدّائرة Γ ، ثمّ عيّن النّقطة D في المعلم السّابق

ب) عيّن النقطة D' صورة النّقطة D بالدّوران R

في المعلم السّابق ، نضع z'_D لاحقة النّقطة D'
أثبت أنّ : $z'_D = -\sqrt{3}+3i$
ج) أثبت أنّ الشعاعان $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DD'}$ مرتبطان خطّيا ، ماذا تستنتج ؟

16

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الطّول $0;5cm$)
نرمز للعدد المركّب $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ بالرّمز j أي أنّ : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$، نعتبر النّقط A ، B ، و C التي لواحقها على التّرتيب $z_A = 8$ ، $z_B = 6j$ ، $z_C = 8j^2$ ، و لتكن A' صورة النّقطة B بالدوران R_1 الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ، B' صورة النّقطة C بالدوران R_2 الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ ، C' صورة النّقطة A بالدوران R_3 الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$
1. عيّن النّقط A ، B ، و C في المعلم السّابق
2. نضع $z_{A'}$ ، $z_{B'}$ ، و $z_{C'}$ لواحق النّقط A' ، B' ، C' على التّرتيب
أحسب $z_{A'}$ ، ثمّ تأكّد أنّ $z_{A'}$ عدد حقيقي
أثبت أنّ : $z_{B'} = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ، ثمّ بيّن أنّ O نقطة من المستقيم (BB')
نقبل أنّ $z_{C'} = 7+7i\sqrt{3}$ ، أثبت أنّ المستقيمات (AA') ، (BB') ، و (CC') متقاطعة في النّقطة O
3. سنبرهن من خلال الأسئلة المتبقّية أنّ الطول $MA+MB+MC$ له أصغر قيمة من أجل $M \equiv O$
أ) أحسب المسافة $OA+OB+OC$
ب) أثبت أنّ : $j^3 = 1$ و $1+j+j^2 = 0$
ج) M نقطة كيفية من المستوي المركّب لاحقتها z ، نذكّر أنّ : $z_A = 8$ ، $z_B = 6j$ ، $z_C = 8j^2$
إنطلاقا من الأسئلة السابقة أثبت المساواة التالية $|(z_A-z)+(z_B-z)j^2+(z_C-z)j| = |z_A+z_Bj^2+z_Cj| = 22$
د) نقبل أنّه مهما كانت الأعداد المركّبة z ، z' ، و z'' فإنّ : $|z+z'+z''| \leq |z|+|z'|+|z''|$
أثبت أنّ $MA+MB+MC$ له أصغر قيمة من أجل $M \equiv O$

17

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، (وحدة الطول $4cm$).
لتكن النّقطتان A ، B التي لاحقتهما على التّرتيب $z_A = 1$ ، $z_B = i$ ، نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z \neq 1$ ، النّقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$ ، تسمى M' صورة النّقطة M
1. أحسب $z_{C'}$ لاحقة النّقطة C' صورة النّقطة C ذات اللاحقة $z_C = -i$
2. عيّن النّقط A ، B ، و C في المعلم السّابق
3. نضع : $z = x+iy$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$
أثبت أنّ : $z' = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}i$
عيّن المجموعة $(\mathscr{E})$ مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عدد حقيقي
عيّن المجموعة $(\mathscr{F})$ مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث يكون $Re(z')$ عدد سالب غير معدوم
3. أ) أكتب العدد المركّب $1-i$ على الشّكل المثلّثي
ب) لتكن M النّقطة ذات اللاحقة z تختلف عن A و B ، أثبت أنّ : $\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in \mathbb{R}^*$ إذا و فقط إذا وُجد عدد صحيح نسبي k حيث : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}+\pi k$ ، ثمّ عيّن مجموعة النّقط $M(z)$ من المستوي حيث $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}+\pi k$
4. عيّن مجموعة النّقط $M(z)$ من المستوي حيث : $(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

18

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النّقط A ، B ، C ، H ، I لاحقاتها على التّرتيب $z_A=i$ ، $z_B=-2+i$ ، $z_C=-3$ ، $z_H=-3+4i$ ، $z_I=-1-i$

1/ أ) مثّل النّقط A ، B ، C ، H ، I

ب) عيّن النّسبة و زاوية التشابه S الذي مركزه B و يحوّل A إلى C .

2/ عيّن z_G لاحقة النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC .

3/ أ) أكتب على الشّكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$

ب) استنتج أنّ المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان .

ج) بين أنّ H هي نقطة تلاقي إرتفاعات المثلّث ABC .

4/ بيّن أنّ النّقط G ، H ، I في إستقاميّة .

5/ (Γ) مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$ ، مع $\theta\in\mathbb{R}$.

أ) بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

ب) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ، مع تحديد عناصرها المميّزة .

ج) أنشيء المجموعة (Γ) .

د) تحقق أنّ النّقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ) .

ه) سؤال إضافي : (Γ') مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1+i=-\sqrt{5}e^{i\theta}$ ، مع $\theta\in]-\pi;0[$

عيّن طبيعة (Γ') و حدّد عناصرها المميّزة.

19

المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C ، التي لواحقها $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ ، $z_C=-i$.

1/ أكتب العدد المركّب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشّكل الأسّي ثمّ استنتج طبيعة المثلّث ABC .

2/ عيّن العبارة المركّبة للتشابه S الذي مركزه C و يحوّل B إلى A .

3/ نعتبر النّقطة D نظيرة B بالنّسبة إلى C و النّقطة E صورة D بالتشابه S .

أ) عيّن z_D لاحقة D ثمّ تحقق أنّ : $z_E=1-2i$.

ب) حدّد طبيعة الرّباعي $ADEB$.

4/ (Γ) مجموعة النّقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B)، حيث : $k\in\mathbb{Z}$ حيث $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

◂ تحقق أنّ النّقطة C تنتمي إلى (Γ) ؛ ثمّ حدّد طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

20

ينسب المستوي المركّب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

حالة خاصة

A ، B ، C ثلاث نقط لواحقها على التّرتيب $z_A=3+i$ ، $z_B=-1+3i$ ، $z_C=-\sqrt{5}-i\sqrt{5}$

1) أثبت أنّ O هي مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC

2) عيّن النّقط A ، B ، C ، و H ذات اللاحقة $z_H=z_A+z_B+z_C$ في المعلم السّابق ،ثمّ تأكد بيانيا أنّ H هي نقطة تقاطع الإرتفاعات في المثلّث ABC

الحالة العامة

ABC مثلّث حيث O مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC ، a ، b ، c لواحق النّقط A ، B ، C على التّرتيب

1. أثبت التكافؤ التّالي : (O مركز الدّائرة المحيطة بالمثلّث ABC) تكافيء ($a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}$)

2. نضع: $w=\overline{b}c-\overline{c}b$

أ) باستعمال خاصية العدد التّخيّلي الصّرف ، أثبت

أنّ w تخيّلي بحت

ب) تأكّد من المساواة التالية : $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})=w$ ، ثمّ أثبت أنّ : $\frac{b+c}{b-c}=\frac{w}{|b-c|^2}$

ج) أثبت أنّ العدد المركّب : $\frac{b+c}{b-c}$ تخيّلي صرف

3. لتكن H النّقطة ذات اللاحقة $a+b+c$

أ) عيّن بدلالة a ، b و c لاحقتا الشّعاعين $\overrightarrow{AH}$ و $\overrightarrow{CB}$

ب) أثبت أنّ : $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{AH})=\frac{\pi}{2}+\pi k$ ، حيث k عدد صحيح نسبي (يمكن أن نثبت بنفس الطريقة أنّ : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BH})=\frac{\pi}{2}+\pi k$)

ج) ماذا تمثّل النّقطة H بالنسبة للمثلّث ABC

21

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z^2+\sqrt{3}z+1)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=0$.

2/ المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ A,B,C نقط من المستوي لاحقاتها $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$؛ $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ) أكتب $z_A;z_B;z_C$ على الشّكل الأسي .

ب) بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحوّل C إلى A ؛ يطلب تعيين عناصره المميّزة .

3/ أ) عيّن لاحقة النّقطة D حتى يكون الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثمّ حدّد بدقة طبيعته .

ب) عيّن (E) مجموعة النّقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z-z_A|=|\overline{z}-z_B|$.

ج) عيّن (Γ) مجموعة النّقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما يتغيّر θ على $\mathbb{R}$.

22

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ من أجل كلّ نقطة M من المستوي لاحقتها z حيث $z\neq 1$ ؛ نرفق النّقطة M' لاحقتها العدد المركّب z' حيث : $z'=\frac{z-2}{z-1}$.

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعالة ذات المجهول z : $z'=z$.

2/ النّقطتين A و B لاحقتاهما على التّرتيب $z_1=1-i$ ؛ $z_2=\overline{z_1}$.

أ) أكتب $\frac{z_2}{z_1}$ على الشّكل الأسي .

ب) بيّن أن النّقطة B هي صورة A بالدّوران الذي مركزه O ، يطلب تعيين زاويّة له .

3/ نضع : $z\neq z'$ ؛ نعتبر النّقطتين C و D لاحقتاهما 2 و 1 على التّرتيب .

– عيّن (Γ) مجموعة النّقط M حيث M' تنتمي إلى محور التّراتيب ؛ ثمّ أنشىء (Γ) .

4/ h التّحاكي الذي مركزه O و نسبته 2 .

أ) عيّن طبيعة التّحويل $S=h\circ R$ و عناصره المميّزة .

ب) أكتب الكتابة المركّبة لـ S .

ج) عيّن ثمّ أنشىء المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتّحويل S.

23

1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (I) التّاليّة : $(I)\ldots z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$. حيث α وسيط حقيقي .

2/ من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ؛ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 ؛ بيّن أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3/ نعتبر في المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$؛ النّقط $A;B;C$ التي لاحقاتها $z_A=1+i\sqrt{3}$ ؛ $z_B=1-i\sqrt{3}$ ؛ $z_C=4+i\sqrt{3}$.

أ) أنشىء النّقط $A;B;C$.

ب) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشّكل الجبري ؛ ثمّ استنتج أنّ : C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ؛ يطلب تعيين نسبته و زاويته .

ج) عيّن لاحقة النّقطة G مرجح الجملة

$\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ؛ ثمّ أنشىء G .

د) أحسب z_D لاحقة النّقطة D بحيث يكون الرّباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

24

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين M_1 و M_2 ذات اللاحقتين على الترتيب : $z_1 = 1+ie^{i\theta}$ و $z_2 = -1+ie^{i\theta}$ حيث $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1/ أكتب العددان z_1 و z_2 عى الشكل الأسي ، ثم برهن أن $\frac{z_2}{z_1} = i\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

2/ أوجد قيمة θ حتى يكون المثلث OM_1M_2 قائم و متساوي الساقين في النقطة O .

3/ عيّن وأنشئ مجموعة النقط M_1 لما يمسح θ المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

4/ أ) برهن أن M_2 هي صورة M_1 بتحويل نقطي يطلب تحديد نوعه و عناصره المميزة .

ب) استنتج مجموعة النقط M_2 عندما يمسح θ المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

25

θ عدد حقيقي حيث : $\theta \in \left]0;\frac{3\pi}{4}\right[$ ؛

نعتبر المعادلة (E) في $\mathbb{C}$ التّاليّة : $z^2+2iz-1+ie^{2i\theta}=0$.

1/ بدون حل المعادلة (E) ؛ بيّن أنّ: $\arg(z_1)+\arg(z_2) = \theta+\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ ؛ حيث $z_1;z_2$ هما حلي المعادلة (E) .

2/ عيّن قيمة θ التي يكون من أجلها $1-i$ حل لـ (E) ؛ ثمّ أكتب حلّيها على الشّكل المثلّثي .

3/ حدّد بدلالة θ حلي المعادلة (E).

26

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط M_1 و M_2 ، A التي لواحقها على الترتيب $z_1 = 1+ie^{i\theta}$ و $z_2 = 1+ie^{-i\theta}$ ، $z_A = 1$ حيث $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1/ أ) أكتب z_1 ، و z_2 على الشّكل الأسي .

ب) عيّن وأنشئ مجموعة النقط M_1 لما يمسح θ المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

2/ لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[M_1M_2]$ ؛ عيّن وأنشئ مجموعة النقط I لما يمسح θ المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

3/ أ) أكتب العدد المركّب $\frac{z_2-1}{z_1-1}$ على الشّكل الأسي ؛ ثمّ استنتج أنّ M_2 صورة M_1 بتحويل نقطي يطلب تحديده مع تعيين عناصره المميّزة.

ب) عيّن قيمة θ بحيث يكون المثلّث AM_1M_2 قائم و متساوي السّاقين.

4/ أ) بيّن أنّ المستقيم (M_1M_2) له منحى ثابت مهما تغيّر θ في المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

ب) بيّن أنّ النّقطتين M_1 و M_2 متناظران بالنّسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلة له : $y=x$.

2 سلسلة تمارين في الإحتمالات

1 يحتوي كيس على 4كرات صفراء و 8 كرات خضراء لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب بطريقة عشوائيّة كرتان من الكيس على التوالي دون إرجاع .

1/ أرسم شجرة الإحتمالات التي تنمذج الوضعيّة السّابقة

2/ أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

A : الحصول على كرة صفراء ثمّ كرة خضراء .

B : الحصول على كرة خضراء ثمّ كرة صفراء .

C : الحصول على كرتين من لونين مختلفين .

2 تتكوّن مجموعة أشخاص من ثمانيّة رجال و أربع نساء من بينهم رجل واحد إسمه ابراهيم و امرأة واحدة إسمها فاطمة ، نريد تكوين لجنة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام

1/ أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

A : تكوين لجنة تضم ثلاث رجال .

B : تكوين لجنة تضم رجل ؛ امرأتين .

C : تكوين لجنة تضم ابراهيم .

D : تكوين لجنة تضم ابراهيم أو فاطمة .

2/ ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ اختيار بعدد الرّجال في اللجنة المكوّنة .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X . و عيّن قانون إحتماله .

ب) أحسب الأمل الرّياضي ا التباين للمتغيّر العشوائي X.

3 لتحديد سؤالي اختبار شفوي خاص بمسابقة توظيف ؛ يسحب المترشّح عشوائيا على التّوالي دون إرجاع بطاقتين من صندوق يحوي 10 بطاقات : 8 منها خاصة بمادة الرّياضيات و 2 خاصة بمادة اللغة الفرنسيّة .

1/ لتكن الحادثة A : سحب بطاقتين تتعلّق باللغة الفرنسيّة ؛ و الحادثة B : سحب بطاقتين تتعلّق بمادتين مختلفتين (لا يمكن التّمييز بين البطاقات)

بيّن أنّ : $P(A)=\frac{1}{45}$ و $P(B)=\frac{16}{45}$.

2/ ليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحبة بعدد البطاقات المتعلّقة بمادة اللغة الفرنسيّة .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

ب) عيّن قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X.

ج) أحسب الأمل الرّياضي و التّباين للمتغيّر العشوائي X.

4 يحتوي كيس على 9 كريات لا نفرّق بينها عند اللمس ؛ ثلاث منها حمراء و أربع خضراء ؛ و كرتان بيضاوان ؛ نسحب عشوائيا كرتين على التّوالي دون إرجاع .

1/ عيّن عدد الحالات الممكنة للسّحب .

2/ نعتبر الحدثتين A و B حيث (A : سحب كرة بيضاء في المرّة الأولى ؛ B : سحب كرتين من نفس اللون .)

أ) بيّن أنّ : $P(A)=\frac{2}{9}$.

ب)أحسب إحتمال B ثمّ استنتج $P(\overline{B})$.

3/ علما أنّ الكرة المسحوبة الأولى بيضاء ؛ أحسب إحتمال سحب كرتين من لونين مختلفين .

4/ ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة ؛ أنقل جدول قانون إحتمال X ؛ ثمّ إملأه معللا جوابك

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	.....	....	....

5

يحتوي صندوق U_1 على 7 كريات منها أربع حمراء و ثلاث خضراء (لا نفرّق بينها عند اللمس) ؛ و صندوق U_2 يحتوي على 5 كريات منها ثلاث حمراء و إثنان خضروان (لا نفرّق بينها عند اللمس) .

① نعتبر التجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس U_1 ؛ و نعتبر الحادثة A : الحصول على كريّة حمراء واحدة و كرتين خضراوين و الحادثة B : الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون .

◂ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{12}{35}$ و $P(B)=\frac{1}{7}$.

② نعتبر التّجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس U_1 ؛ ثمّ نسحب كريّة من الكيس U_2 ؛ و لتكن الحادثة C : الحصول على ثلاث كريات حمراء .

◂ بيّن أنّ : $P(C)=\frac{6}{35}$

6

يحتوي صندوق على 10 كريات ؛ 4 منها حمراء و الباقي خضراء (الكريّات لا نفرّق بينها عند اللمس) ؛ نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الصندوق .

1) نعتبر الحادثة A : الكريتان المسحوبتان حمراوان .

◂ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{2}{15}$.

2) ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكلّ سحب عدد الكريّات الحمراء المتبقيّة في الصندوق بعد سحب الكرتين

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

ب) بيّن أنّ : $P(X=3)=\frac{8}{15}$ ؛ ثمّ حدّد قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرّياضي لـ X .

7

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء تحمل الأرقام $0,1,2$ وكرتان سوداوان تحملان الرّقمين $1,2$ (لا يمكن التّمييز بين الكرات)؛ نسحب من الصندوق كرتان على التّوالي دون إرجاع .

1/ نعتبر الحادثتين A و B حيث A : الكرتان المسحوبتان تحملان الرّقم 1 ؛ B: سحب كرة بيضاء في المرّة الأولى .

◂ أ) بيّن أنّ : $P(A)=\frac{1}{10}$.

◂ ب) أحسب إحتمال الحادثة B و بيّن أنّ : $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$.

◂ ج) هل الحادثتان A و B مستقلّتان ؟ ؛ علل جوابك .

2/ X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكلّ سحب جداء الرّقمين اللذين تحملهما الكرتين المسحوبتين .

أ) أنقل الجدول أدناه و أكمله ؛ معللا جوابك .

ب) أحسب الأمل الرّياضي $E(X)$ للمتغيّر العشوائي X .

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	.....	....	....	....

8

A و B حادثتان من مجموعة إمكانيات تجربة عشوائيّة ؛ $\overline{A}$ ؛ $\overline{B}$ الحادثتان العكسيتان لـ A و B ؛ نعتبر شجرة الإحتمال المبيّنة أدناه .

1/ أ) ماذا يمثّل كلّ من x و y .

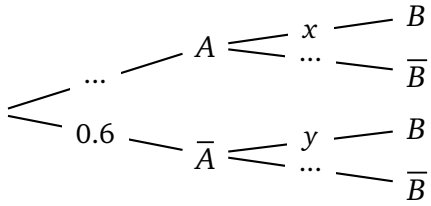
ب) أكمل شجرة الإحتمال .

2/ عبّر عن $P(B)$ بدلالة x و y .

3/ ماهي العلاقة بين x و y حتى تكون A و B مستقلّتان.

4/ عبّر عن $P_B(A)$ بدلالة x و y.

5/ نفرض أنّ $y = 0.8$ ؛ هل توجد قيمة لـ x حتى تكون $P_B(A) = P_A(B)$ ؟.



9

صندوق يحتوي على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء وكلّ الكرات متماثلة و لا نفرّق بينها عند اللمس ؛ نسحب عشوائيا كرة من الكيس و نسجّل لونها ثمّ نعيدها إلى الكيس و نسحب منه كرة واحدة و نسجّل لونها .

1/ أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

أ) الحصول على كرتين بيضاوين .

ب) الحصول على كرتين من نفس الّون .

2/ نعرّف لعبة حظ كما يلي : تمنح لكلّ كرة بيضاء العلامة α و لكلّ كرة سوداء العلامة $-\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ ؛ X المتغيّر العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النّقاط المحصل عليها .

أ) عيّن قيم X ؛ ثمّ عيّن قانون إحتمال X و عيّن الأمل الرياضي لـ X

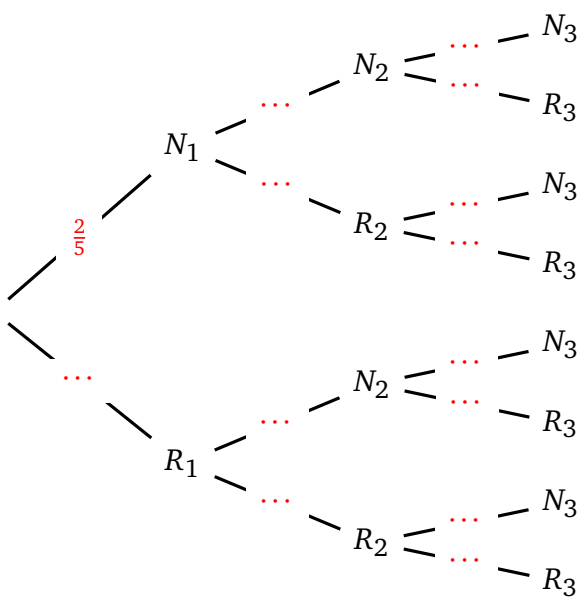
ب) عيّن قيمة α حتى تكون اللعبة مربحة .

3/ نضيف للكيس $n-3$ كريّة و نعيد عمليّة السحب أعلاه ؛ ما هو عدد الكرات السّوداء التي تمّ إضافتها إلى الصندوق ؛ علما أن إحتمال A هو $\frac{1}{4}$.

10

ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 ، الصندوق U_1 يحتوي 2 كرات سوداء و 3 حمراء ؛ الصندوق U_2 يحتوي على كرة سوداء و 4 حمراء ؛ و الصندوق U_3 يحتوي على 3 كرات سوداء و 4 حمراء ؛ نقوم التّجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا كرة من U_1 و كرة من U_2 و نضعهما في الصندوق U_3 ؛ ثمّ نسحب كرة من الصندوق U_3 ؛ نرمز بـ N_i للحادثة سحب كرة سوداء من الصندوق U_i حيث i يأخذ القيم $1,2,3$ ، نفس الشيء R_i للحادثة سحب كرة سوداء من الصندوق U_i حيث i يأخذ القيم $1,2,3$.(الكرات لا نفرّق بينها عند اللمس).

1/ أعد رسم شجرة الإحتمالات التّاليّة و أكملها .



2/ أ) أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

$N_1 \cap N_2 \cap N_3$ و $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

ب) استنتج إحتمال $N_1 \cap N_3$.

ج) أحسب بطريقة مماثلة إحتمال $R_1 \cap N_3$.

3/ استنتج من السؤال السّابق إحتمال الحادثة N_3 .

4/ هل الحادثتان N_3 و N_1 مستقلّتان.

5/ نفرض أنّ الكرة المسحوبة من الصندوق U_3 سوداء ؛ ما هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U_1 حمراء .

11

وحدة إنتاجيّة يسيّرها 10 عمال ، منهم 4 نساء و 6 رجال ، أرادوا اختيار لجنة تسيير مؤلّفة من

3 أعضاء من بين العمّال العشرة ، ما هو الإحتمال لكي تشمل :

1/ 3 نساء 2/ على الأكثر امرأتين.

3/ على الأقل إمرأتين 4/ على الأقل إمرأة .

12

في ورشة 2% من القطع المصنوعة فاسدة ، قرر صاحب الورشة أن يجري عملية مراقبة كما يلي :

◂ إذا كانت القطعة المصنوعة في حالة جيّدة فإنّ إحتمال قبولها هو 0.96.

◂ إذا كانت القطعة المصنوعة فاسدة فإنّ إحتمال رفضها هو 0.98.

نختار قطعة و بقبل أنّ الإختيارات متساويّة الإحتمال ، نرمز بـ C إلى الحادثة : القطعة المصنوعة في حالة جيّدة و مرفوضة ، ماهو إحتمال الحادثة C .

13

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 بهما كريّات لانفرق بينها عند اللمس ؛ الصندوق U_1 يحتوي n كريّة بيضاء و 3 سوداء n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 ، الصندوق U_2 يحتوي كرتين بيضاوين وكريّة سوداء ، نسحب عشوائيا كريّة من الصندوق U_1 و نضعها في الصندوق U_2 ؛ ثمّ نسحب كريّة من الصندوق U_2 .

نعتبر الحادثة B_i : سحب كريّة بيضاء من الصندوق U_i .

1/ نعتبر الحادثة A سحب كريّة من نفس اللون بالنّسبة للصندوقين U_1 و U_2 .

أ) بيّن أنّ إحتمال A هو $P(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

ب) عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} P(A)$.

2/ نعتبر الحادثة B : بعد التّجربة ، الصندوق U_1 يحتوي على كريّة بيضاء واحدة

◂ بيّن أنّ $P(B)=\frac{6}{4(n+3)}$.

14

اختارت مجلّة عشرة كتب مختلفة مثنى مثنى و مكوّنة من 4 كتب في الرّواية و 4 كتب في العلوم و 2 في التّاريخ ، قرّرت إعداد لائحة تتضمّن ترتيبا لعناوين ثلاث كتب من بين العشرة عن طريق القرعة لسحب ثلاث عناوين واحد تلو الآخر دون إرجاع .

1/ بيّن أنّ عدد اللوائح هو 720 .

2/ أحسب إحتمال الحادثين التّاليتين :

A : الحصول على لائحة يكون أوّلها عنوان كتاب تاريخ .

B: الحصول على لائحة لا تتضمّن أي عنوان كتب تاريخ .

3/ X المتغيّر العشوائي الذي يربط كل لائحة بعدد عناوين كتب التّاريخ .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X .

ب) عيّن قانون إحتمال X و أحسب أمله الرّياضي .

15

عادة ما ينسى الأستاذ مفاتيح القسم.

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ ، نسمي E_n الحادثة : (الأستاذ ينسى مفاتيحه في القسم في اليوم n)؛ ليكن P_n احتمال E_n . نسمي الاحتمال $P_1=a$ بأنه ينسى مفاتيحه في اليوم الأول $n=1$.

نفرض أن الشروط التالية محققة :

◄ إذا نسي مفاتيحه في اليوم n ،فإنّ احتمال أن ينساهم في اليوم الموالي $n+1$ هو : $\frac{1}{10}$.

◄ إذا لم ينس مفاتيحه في اليوم n ، ،فإنّ احتمال أن ينساهم في اليوم الموالي $n+1$ هو : $\frac{4}{10}$.

1/ شكّل شجرة الإحتمال التي تنمذج هذه الوضعية.

2/ احسب الإحتمالين الشرطيين : $P_{E_n}(E_{n+1})$ و $P_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$ ثم بدلالة P_n احسب الإحتمالين : $P\left(E_{n+1}\cap E_n\right)$ و $P\left(E_{n+1}\cap \overline{E_n}\right)$.

3/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_{n+1}=-\frac{3}{10}P_n+\frac{4}{10}$.

4/ نفرض أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$: $U_n=13P_n-4$.

أ) بيّن أن (U_n) متتالية هندسية ، وعيّن الحد الأول لها بدلالة a .

ب) اكتب U_n بدلالة n و a ، ثم استنتج عبارة P_n بدلالة n و a .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$ ؛ كيف تفسّر هذه النّتيجة ؟.

16

كيس يحتوي على 3 كريات بيضاء و 4 كريات سوداء لا نفرّق بينها عند اللّمس .

نجري سلسلة من السحبات : في كلّ سحبة نسحب عشوائيّا كريّة من الكيس ؛ إذا كانت سوداء نتوقّف عن السّحب و إذا كانت بيضاء لا نعيدها إلى الكيّس و نسحب كريّة أخرى (نسجّل لونها) و هكذا .

1/ أ) أحسب إحتمال الحوادث التّاليّة :

◃ A: الكريّة المسحوبة في المرّة الأولى سوداء .

B: الكريّة المسحوبة في المرّة الثّانيّة سوداء .

2/ استنتج إحتمال أن لا نجري السّحبة الثالثة .

3/ ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها .

أ) عيّن القيم الممكنة لـ X.

ب) عيّن قانون إحتمال المتغيّر العشوائي X ؛ ثمّ أحسب أمله الرّياضي .

17

صندوق U_1 يحتوي على 7 كريّات منها 4 حمراء و 3 خضراء و صندوق آخر U_2 يحتوي 5 كريّات منها 3 حمراء و 2 خضراء (الكريّات لا نفرق بينها عند اللمس) .

1/ نعتبر التّجربة العشوائيّة التّاليّة : نسحب عشوائيا 3 كريّات من الصندوق U_1 و نعتبر الحادثتين A و B حيث ؛ A : الحصول على كريّة حمراء واحدة و إثنان خضراوان ؛ B: الحصول على ثلاث كريّات من نفس اللون .

◃ بيّن أنّ : $P(A)=\frac{12}{35}$ و $P(B)=\frac{1}{7}$.

2/ نعتبر التّجربة التّاليّة : نسحب عشوائيا كريتين من الصندوق U_1 ؛ ثمّ نسحب عشوائيا كريّة من الصندوق U_2 و لتكن الحادثة C : الحصول على ثلاث كريّات حمراء .

◃ بيّن أنّ : $P(C)=\frac{6}{35}$.

3 سلسلة تمارين في المتتاليات العددية

1

(U_n) متتاليّة عدديّة معرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{5 + \frac{1}{2}U_n^2} \end{cases}$$.

1/ برهن بالتّراجع أنّ : $U_n > \sqrt{10}$.

2/ بيّن أنّ المتتاليّة (U_n) متناقصة تماما ؛ ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3/ (V_n) متتاليّة معرّفة كما يلي : $V_n = \beta - U_n^2$ ؛ حيث β عدد حقيقي .

عيّن قيمة β حتى تكون (V_n) هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$.

4/ نضع : $\beta = 10$

أ) أكتب U_n بدلالة n ؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = U_0^2 + U_1^2 + \ldots\ldots + U_n^2$.

2

f دالّة عدديّة معرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \ln(x-1)$.

1/ حدّد حسب قيم x إشارة $f(x) - x$.

2/ أ) عيّن إتجاه تغيّر الدّالة f.

ب) بيّن أنّه إذا كان : $x \in [2, e+1]$ فإنّ : $f(x) \in [2, e+1]$.

3/ (U_n) متتاليّة عدديّة معرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = e+1 \\ U_{n+1} = U_n - \ln(U_n - 1) \end{cases}$$.

أ) برهن بالتّراجع أن : $U_n \in [2, e+1]$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتاليّة (U_n) .

ج) برّر تقارب المتتاليّة (U_n) ، و حدّد نهايتها .

3

I) لتكن (U_n) متتاليّة عدديّة معرّفة كما يلي : $U_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{U_n - 1}$

1/ برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $1 < U_n < 2$ ..

2/ تحقق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا :

$U_{n+1} - U_n = \sqrt[3]{U_n - 1}\left(1 - \sqrt[3]{U_n - 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{U_n - 1}\right)$.

3/ بيّن أنّ : (U_n) متزايدة .

4/ استنتج أنّ (U_n) متقاربة.

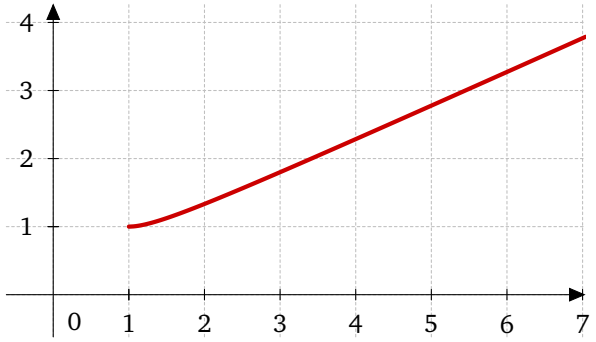
II) نضع : $V_n = \ln(U_n - 1)$.

1/ بيّن أنّ : $V_0 = -\frac{1}{3}$ ؛ ثمّ بيّن أنّ (V_n) هندسيّة ؛ يطلب تعيين أساسها .

2/ أكتب V_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج (U_n) بدلالة n و حدّد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4

f الدّالّة المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (كما في الشّكل أدناه)



1/ بيّن أنّ f متزايدة تماما على المجال

$[1;+\infty[$.

2/ لتكن المتتاليّة العدديّة (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $U_{n+1} = f(U_n)$.

أ) أنقل المنحنى المقابل ؛ ثمّ مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتاليّة (U_n) على حامل محور الفواصل (دون حسابها)موضحا خطوط الإنشاء .

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (U_n) و تقاربها.

ج) برهن بالتّراجع أنّ : $1 \leq U_n \leq 6$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

د) أدرس إتجاه تغيّر (U_n) .

هـ) برّر تقارب المتتاليّة (U_n) .

3/ نعتبر المتتاليتين (V_n) و (W_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$ و $W_n = \ln V_n$.

أ) برهن أنّ (W_n) متتاليّة هندسيّة أساسها 2 ، يُطلَبُ تعيين حدّها الأوّل .

ب) أكتب V_n بدلالة n ثمّ W_n بدلالة n.

ج) بيّن أنّ $U_n = \dfrac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2^n}}$ ؛ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4/ أحسب بدلالة n المجموع التّالي : $S_n = \dfrac{1}{W_0} + \dfrac{1}{W_1} + \ldots + \dfrac{1}{W_n}$.

5

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرّفتان على مجموعة الأعداد الطبيعيّة كما يلي :

$u_0 = \dfrac{1}{4}$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}$ ؛ $v_n = \dfrac{u_n + 1}{1 - u_n}$.

1/ أ) برهن بالتّراجع أنّ : $0 < u_n < 1$.

ب) بيّن أنّ المتتاليّة (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

2/ أ) بيّن أنّ (v_n) هندسيّة أساسها $\dfrac{5}{2}$ ؛ ثمّ عبّر عن v_n بدلالة n.

ب) أثبت أنّ : $u_n = 1 - \dfrac{3}{v_n + 3}$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

6

I) f الدّالّة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \sqrt{2x+8}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدّالّة f و شكّل جدول تغيّراتها .

2/ عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

3/ أرسم (C_f) و (Δ) .

II) (u_n) المتتاليّة المعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1/ مثّل في المعلم السّابق على محور الفواصل $u_0; u_1; u_2$ (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء .

2/ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر المتتاليّة (u_n) و تقاربها .

3/ أ) برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 4$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر المتتاليّة (u_n) .

ج) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$ ؛ ثمّ استنتج من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ $4 - u_n \leq \dfrac{1}{2^n}(4 - u_0)$

د) عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

7

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) f الدّالّة المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني .

1/ عيّن إتجاه تغيّر الدّالّة f على المجال

$[0;+\infty[$.

2/ أدرس الوضعيّة النّسبيّة بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

مثّل كلا من (Δ) و (C_f) على المجال $[0;6]$.

II) (u_n) و (v_n) المعرّفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} v_0=5 \\ v_{n+1}=f(v_n) \end{cases}.$$

1/ أ) أنشىء على حامل محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2;u_3$ و $v_0;v_1;v_2;v_3$ دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء .

ب) خمّن إتجاه تغيّر كلا من (u_n) ؛ (v_n) و تقاربهما .

2/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $2 \preceq u_n \prec \alpha$ و $\alpha \prec v_n \preceq 5$ حيث : $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

ب) استنتج إتجاه تغيّر كلا من (u_n) و (v_n) .

3/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$v_{n+1}-u_{n+1} \preceq \frac{1}{3}(v_n-u_n)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$:

$0 \prec v_n-u_n \preceq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$ ؛ ثمّ عيّن نهاية كل من (u_n) و (v_n) .

8

(V_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} V_0=2 \\ V_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}V_n^2+1} \end{cases}$.

1/ أحسب V_1 و V_2 .

2/ نضع : $U_n=V_n^2-2$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

أ) بيّن أنّ (U_n) متتاليّة هندسيّة يُطْلَبُ تعيين أساسها q و حدّها الأوّل .

ب) أكتب U_n بدلالة n ، ثمّ استنتج V_n بدلالة n .

3/ أ) بيّن أنّ : $\sqrt{1+x} \leqslant 1+\dfrac{x}{2}$ لكلّ عدد حقيقي x موجب تماما .

ب) استنتج أنّ : $\sqrt{2} \leqslant V_n \leqslant \sqrt{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

لكلّ عدد طبيعي n ؛ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

4/ ليكن المجموع S_n حيث:

$S_n=V_0^2+V_1^2+V_2^2+\ldots\ldots+V_n^2$.

◂ أحسب S_n بدلالة n .

9

نعتبر الدّالّة f المعرّفة على المجال $[1,+\infty[$ بـ : $f(x)=1+\sqrt{x-1}$؛ $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ؛ (Δ) المستقيم الذي معادلة له : $y=x$ (أنظر الشّكل أدناه) ،

(U_n) المتتاليّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_0=\dfrac{5}{4}$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ من أجل كلّ عدد طبيعي n.

1/ باستخدام $(\mathscr{C}_f)$ و (Δ) عيّن على محور الفواصل الحدود $U_0;U_1;U_2;U_3$ دون حسابها مبيّنا خطوط الإنشاء ؛ ثمّ ضع تخمينا حول إتجاه تغيّر (U_n) و تقاربها.

2/ برهن بالتّراجع أنّ : $1<U_n<2$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ ثمّ أدرس إتجاه تغيّر (U_n) .

3/ (V_n) متتاليّة عدديّة على $\mathbb{N}$ بـ $V_n=\ln(U_n-1)$.

أ) بيّن أنّ (V_n) هندسيّة يُطْلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب V_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج U_n بدلالة n. و

عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

ج) S_n ، S'_n المجموعين حيث :

$S_n = V_0^2 + V_1^2 + \ldots + V_n^2$ ؛

$S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

◂ أحسب S_n و S'_n بدلالة n .

10

(u_n) المتتالية العدديّة المعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$$

1/ برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $u_n \geq 1$.

2/ أدرس إتجاه تغيّر (u_n) ؛ ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3/ (v_n) متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتاليّة هندسيّة يُطلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أحسب v_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n و عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{u_n}$.

5/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا :

$0 \leq u_{n+1} - 1 \leq \dfrac{1}{3}(u_n - 1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n :

$0 \leq u_n - 1 \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ؛ ثمّ عيّن نهاية (u_n) من جديد .

11

(u_n) المتتالية العدديّة المعرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}$$

1/ برهن بالتّراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $\dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 3$.

2/ أدرس إتجاه تغيّر (u_n) ؛ ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

3/ (v_n) متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n = \dfrac{2}{2u_n - 3}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) متتاليّة حسابيّة يُطلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أحسب v_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_n بدلالة n و عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots\ldots + u_nv_n$.

12

(v_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{v_n - 2} \end{cases}$$

1/ أحسب v_1 ؛ v_2 .

2/ أثبت بالتّراجع أنّ : $v_n > 3$ من أجل كلّ عدد طبيعي n ؛ ماذا تستنتج ؟.

3/ (u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$u_n = \dfrac{3}{3 - v_n}$.

أ) بيّن أنّ (u_n) حسابيّة يُطلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب u_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج v_n بدلالة n ؛ ثمّ عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$.

13

نعتبر الدّالّة f المعرّفة على المجال $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x}$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أدرس إتجاه تغيّر الدّالّة f ؛ ثمّ أرسم (C_f) .

2/ (u_n) متتاليّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ) مثّل الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3$ على حامل محور الفواصل دون حسابها مبيّنا خطوط الإنشاء .

ب) بيّن بالتراجع أنّ : $u_n > 1$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

ج) بيّن أنّ (u_n) متناقصة تمامًا .ماذا تستنتج ؟.

3/ أ) أثبت أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-1 \leq \frac{1}{2}(u_n-1)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n لدينا : $u_n-1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ ثمّ استنتج نهاية المتتاليّة (u_n) .

4/ (v_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n-1}{2u_n-1}$.

أ) بيّن أنّ (v_n) هندسيّة يُطْلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل ؛ ثمّ أكتب v_n بدلالة n

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+\ldots+\frac{v_n-1}{u_n}$.

14

I) نعتبر الدّالّة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$.

1/ بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

2/ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

II) لتكن المتتاليّة (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $U_n=\frac{1}{n}\left(1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}\right)$.

1/ بيّن أنّ : $1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots\ldots+e^{\frac{n-1}{n}}=\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$.

2/ استنتج أنّ : $U_n=(e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3/ باستخدام الجزء الأوّل عيّن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

15

(u_n) متتاليّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases}$

1/ أ) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، أنشىء (C) التّمثيل البياني للدّالة f حيث $f: x \longmapsto \sqrt{x+2}$

و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$

ب) أنشىء على محور الفواصل الحدود u_0,u_1,u_2,u_3 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء

ج) ماهو تخمينك حول إتجاه تغيّر و تقارب المتتاليّة (u_n) ؟

2/ أ) بيّن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$

ب) بيّن أنّ (u_n) متناقصة . ماذا تستنتج ؟

ج) بيّن أنّ النّهاية l للمتتاليّة (u_n) تحقق : $l \geq 2$ و $l=\sqrt{l+2}$

د) استنتج قيمة l.

16

نعتبر المتتاليّة (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=\frac{3U_n}{2U_n+1} \end{cases}$

1 بيّن بالتّراجع أنّ : $U_n \geq 1$ من أجل كلّ عدد طبيعي n .

2 أدرس إتجاه تغيّر المتتاليّة (U_n) ثمّ استنتج أنها متقاربة .

3 نعتبر المتتاليّة (V_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n=1-\frac{1}{U_n}$.

أ) بيّن أنّ (V_n) هندسيّة يُطْلَبُ تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

ب) أكتب V_n بدلالة n ثمّ استنتج U_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4 أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\frac{1}{U_2}+\ldots\ldots+\frac{1}{U_n}$

4 سلسلة تمارين في الهندسة الفضائية

1 الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النّقط $A(1;-1;-2)$ ؛ $B(1;-2;-3)$ ، $C(2;0;0)$

1/ أ) بيّن أنّ النّقط A,B,C تعيّن مستويا .

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC).

ج) تحقق أنّ : $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2/ نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرّفين بمعادلتيهما كما يلي :

$(P): x-y-2z+5=0$ ، $(Q): 3x+2y-z+10=0$

.

برهن أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) ذي التّمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=t-3 \\ y=-t \\ z=t+1 \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$.

3/ عيّن تقاطع المستويات (P) ، (Q) و (ABC) .

4/ لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء ، نسمي $d(M,(P))$ المسافة بين M و المستوي (P) و $d(M,(Q))$ المسافة بين M و المستوي (Q) ، عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث : $\sqrt{6}d(M,(P))=\sqrt{14}d(M,(Q))$.

2 الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النّقط $A(2;-1;1)$ ؛ $B(-1;2;1)$ ، $C(1;-1;2)$ ، $D(1;1;1)$

1/ أ) بيّن أنّ النّقط A,B,C تعيّن مستويا .

ب) بيّن أنّ $\vec{n}(1;1;1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

ج) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2/ لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

أ) أحسب إحداثيات G .

ب) لتكن (Γ) مجموعة النّقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$.

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GD]$.

ج) بيّن أنّ معادلة (Γ) هي : $6x-4y+2+3=0$.

3/ بيّن أنّ المستويين (ABC) و (Γ) متقاطعان وفق مستقيم يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3 الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النّقط $A(3;-2;-1)$ ؛ $B(5;-3;2)$ ، $C(2;3;2)$ ، $D(1;-5;-2)$

1/ بيّن أنّ النّقط A,B,C تعيّن مستويا نرمز له بالرّمز (P) .

2/ بيّن أنّ $\vec{n}(2;1;-1)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثمّ جد معادلة للمستوي (P).

3/ أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D و يعامد (P) .

ب) عيّن إحداثيات النّقطة E ، المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .

4/ H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) و λ العدد الحقيقي حيث : $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

أ) بيّن أنّ : $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتج العدد الحقيقي λ و إحداثيات H ، ثمّ المسافة بيّن أنّ D و المستقيم (AB) .

4 الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النّقط $A(2;-5;4)$ ؛ $B(3;-4;6)$ و المستقيم (Δ) المعرّف بالتّمثيل الوسيطي التّالي : $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$

1/ أ) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النّقطتين A و B .

ب) أدرس الوضع النّسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .

2/ (P) المستوي الذي يشمل (D) و يوازي (Δ) .

برهن أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثمّ عيّن معادلة ديكارتيّة للمستوي (P) .

3/ M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D) .

أ) عيّن إحداثيات النّقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D) .

ب) أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) و المستوي (P) .

5 الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كلّ حالة من الحالات التّاليّة :

1/ المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=t+2 \\ y=-2t;t\in\mathbb{R} \\ z=3t-1 \end{cases}$ ، يوازي المستوي الذي معادلته :

$$x+2y+z-3=0$$

2/ المستويات (P) ، (P') و (P'') التي معادلاتها على التّرتيب : $x-2y+3z=3$ ، $2x+3y-2z=6$ و $4x-y+4z=12$ ليس لها نقطة مشتركة

3/ المستقيمان اللذان تمثيلاهما الوسيطيين : $\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=t+1;t\in\mathbb{R} \\ z=2t-3 \end{cases}$ و، $\begin{cases} x=2t'+7 \\ y=2t'+2;t'\in\mathbb{R} \\ z=-t'-6 \end{cases}$ هما مستقيمان متقاطعان

4/ نعتبر النّقط $A(-1;0;2),B(1;4;0),C(3;-4;-2)$ ، معادلة المستوي (ABC) هي : $x+z=1$

5/ نعتبر النّقط $A(-1;1;3),B(2;1;0),C(4;-1;5)$ ، يمكن إعتبار C كمرجح للنّقطتين A و B.

6 في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقطتين $A(1;1;1),B(3;2;0)$ ، المستوي (P) المار بالنّقطة B و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له ، المستوي (Q) الذي معادلته $x-y+2z+4=0$ ، سطح الكرة (S) التي مركزها A و قطرها AB

1/ بيّن أنّ معادلة ديكارتيّة للمستوي (P) هي : $2x+y-z-8=0$

2/ أكتب معادلة ديكارتيّة لسطح الكرة (S)

3/ أ) أحسب المسافة بين النّقطة A و المستوي (Q)

استنتج أنّ المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S)

ب) هل المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) ؟

4/ لتكن النّقطة $C(0;2;-1)$ المسقط العمودي للنّقطة A على المستوي (Q)

أ) بيّن أنّ المستويان (P) و (Q) متقاطعان

ب) ليكن (D) مستقيم تقاطع المستويان (P) و (Q)

بيّن أنّ تمثيل وسيطي لـ (D) هو :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t; t \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

ج) تحقق أنّ A لا تنتمي إلى (D)

د) نسمي (R) المستوي المعرّف بالنّقطة A و المستقيم (D)

هل الجملة التّاليّة صحيحة أو خاطئة؟ علل جوابك .

(كلّ نقطة من (R) متساويّة البعد عن النّقطتين B و C).

7 في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط : $A(3;2;6), B(1;2;4), C(4;-2;5)$ ، و ليكن (P) المستوي الذي معادلته : $2x+y-2z+4=0$

1. تحقق أنّ النّقط A,B,C تعيّن مستويا و أنّ هذا المستوي هو (P)

2. أ) أثبت أنّ المثلّث ABC قائم

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من O و العمودي على (P)

ج) لتكن النّقطة K المسقط العمودي للنّقطة O على (P) ، أحسب المسافة OK

د) أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$

3. نعتبر الجملة المثقلة : $\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\}$

أ) تحقق أنّ الجملة السّابقة تقبل مرجحا ، نرمز له بالرّمز G

ب) نسمي I مركز ثقل المثلّث ABC ، أثبت أنّ G تنتمي إلى (OI)

ج) أحسب بعد النّقطة G عن المستوي (P)

4. لتكن (Γ) مجموعة النّقط M من الفضاء حيث : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

أ) حدّد المجموعة (Γ)

ب) ما طبيعة مجموعة النّقط المشتركة بين (Γ) وَ (P) .

8 الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

1/ سؤال من الدّرس : بيّن كيفيّة كتابة معادلة ديكارتيّة للمستوي الذي يشمل نقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ و $\vec{n}(a;b;c)$ شعاع ناظمي له

2/ نعتبر النّقط $A(1;2;-3), B(-3;1;4), C(2;6;-1)$

أ) بيّن أنّ النّقط A,B,C تعيّن مستويا (ABC)

ب) تحقق أنّ معادلة (ABC) هي : $2x-y+z+3=0$

ج) لتكن النّقطة I التي إحداثياتها $(-5;9;4)$ ، عيّن تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (D) الذي يشمل I و العمودي على المستوي (ABC)

د) عيّن إحداثيات النّقطة J نقطة تقاطع (D) و المستوي (ABC)

هـ) استنتج بعد النّقطة I عن المستوي (ABC).

9 في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقطتين $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right), B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$ ، نسمي I منتصف القطعة $[AB]$ ، وَ (S) سطح الكرة التي قطرها $[AB]$

1/ لتكن E مرجح الجملة المثقلة $\{(A;2),(B;1)\}$

أ) أحسب إحداثيات النّقطة E

ب) برهن أنّ المجموعة (Γ) للنّقط M من الفضاء حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ هي المستوي المحوري للقطعة $[OE]$

ج) بيّن أنّ معادلة (Γ) هي : $y=-1$

2/ أ) أحسب نصف قطر (S) و بعد I عن (Γ) ؛ ثمّ استنتج أنّ مجموعة تقاطع (S) و (Γ) هي مجموعة (C)غير خاليّة

ب) أثبت أنّ معادلة (C) في المستوي (Γ) هي : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$ ، ثمّ استنتج أنّ (C) دائرة يُطْلَبُ تعيين مركزها و نصف قطرها

3/ لتكن النّقطة $D\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};4\sqrt{3}-1\right)$

أ) عيّن تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (ID)

ب) أثبت أنّ المستقيم (ID) يقطع الدّائرة (C) في نقطة F يُطْلَبُ تعيين إحداثياتها.

10

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقطتين $A(3;0;6)$ ، $I(0;0;6)$ ، و ليكن المستقيم (d) المار بـ A وَ I ، نسمي (P) المستوي الذي معادلته : $2y+z-6=0$ ، (Q) المستوي الذي معادلته : $y-2z+12=0$

1/ أثبت أنّ (P) وَ (Q) متعامدان

2/ بيّن أنّ تقاطع (P) وَ (Q) هو المستقيم (d)

3/ أثبت أنّ كلّ من المستويين (P) وَ (Q) يقطعان المحور $(O;\vec{j})$ في نقطتين B وَ C على التّرتيب يُطْلَبُ تعيين إحداثياتهما

4/ بيّن أنّ معادلة ديكارتيّة للمستوي (T) المار بالنّقطة B وَ $\vec{AC}$ شعاع ناظمي له هي : $x+4y+2z-12=0$

5/ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) ، ثمّ أثبت أنّ المستقيم (OA) و المستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يُطْلَبُ تعيين إحداثياتها

6/ ماذا تمثّل النّقطة H في المثلّث ABC ؟ علّل .

11

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، ليكن (P_1) المستوي الذي معادلته : $-2x+y+z-6=0$ ، (P_2) المستوي الذي معادلته : $x-2y+4z-9=0$

1/ أثبت أنّ (P_1) وَ (P_2) متعامدان

2/ ليكن (D) مستقيم تقاطع (P_1) وَ (P_2) ، أثبت أنّ تمثيل وسيطي لـ (D) هو :

$$\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \\ z=t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$$

3/ لتكن $M(-7+2t;-8+3t;t)$ نقطة كيفيّة من (D) ، $A(-9;-4;-1)$

أ) تأكّد أنّ A لا تنتمي إلى (P_1) ؛ وَ (P_2)

ب) أكتب AM^2 بدلالة t

ج) لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t)=2t^2-2t+3$

- أدرس تغيّرات الدّالة f وَ شكّل جدول تغيّراتها
- عيّن إحداثيات M حتى تكون المسافة AM أصغريّة، نسمّي هذه النّقطة I

4/ ليكن (P) المستوي العمودي على (D) و المار بالنّقطة A

أ) أكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي (P)

ب) أثبت أنّ I هي المسقط العمودي للنّقطة A على المستقيم (D).

12

في الفضاء المزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(1;0;2),B(1;1;4),C(-1;1;1)$

1/أ) أثبت أنّ النّقط A,B,C ليست في إستقاميّة

ب) أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(3;4;-2)$ عمودي على كلّ من الشّعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ، ثمّ استنتج معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC)

2/ ليكن (P_1) و (P_2) مستويان معادلتيهما على التّرتيب $2x+y+2z+1=0$ و $x-2y+6z=0$

أ) أثبت أنّ (P_1) وَ (P_2) متقاطعان في مستقيم (D) يُطْلَبُ تمثيل وسيطي له

ب) أدرس الوضعيّة النّسبيّة بين المستقيم (D) وَ المستوي (ABC)

3/ ليكن t عدد حقيقي موجب ، نعتبر النّقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2),(C;t)\}$

أ) برّر وجود النّقطة G مهما كان العدد الحقيقي الموجب t

ب) لتكن I الجملة المثقلة $\{(A;1),(B;2)\}$ ، عيّن إحداثيات النّقطة I ،ثمّ أكتب الشّعاع $\vec{IG}$

بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{IC}$

ج) أثبت أنّ مجموعة النّقط G لمّا يمسح العدد t المجال $]0;+\infty[$ هي القطعة المستقيمة $[IC]$ ماعدا النّقطة C.

13

الفضاء مزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، ليكن s عدد حقيقي ، نعتبر النّقطتين $A(8;0;8), B(10;3;10)$ و المستقيم $(\mathscr{D})$ ذو التّمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-5+3s \\ y=1+2s \\ z=-2s \end{cases}$; $(s\in\mathbb{R})$

1) أ) عيّن تمثيلا وسيطيّا للمستقيم (Δ) المار بالنّقطتين A و B

ب) أدرس الوضع النّسبي بين (Δ) وَ $(\mathscr{D})$

2) أ) نعتبر المستوي $(\mathscr{P})$ الذي يوازي $(\mathscr{D})$ و يحوي (Δ) ، أثبت أنّ الشّعاع $\overrightarrow{n}(2;-2;1)$ ناظمي لـ $(\mathscr{P})$؛ ثمّ أكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي $(\mathscr{P})$

ب) أثبت أنّ المسافة بين كلّ نقطة M من $(\mathscr{D})$ و المستوي $(\mathscr{P})$ مستقلّة عن M

ج) أعط تمثيلا وسيطيّا لمستقيم تقاطع $(\mathscr{P})$ و المستوي (xOy)

3) لتكن سطح الكرة $(\mathscr{S})$ المماسّة لـ $(\mathscr{P})$في النّقطة $C(10;1;6)$ مركزها Ω موجود على مسافة $d=6$ من $(\mathscr{P})$ في نفس جهة O

أكتب معادلة ديكارتيّة لـ $(\mathscr{S})$.

14

في الفضاء المزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، لتكن $(\mathscr{S})$ مجموعة النّقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$

1. أثبت أنّ $(\mathscr{S})$ سطح كرة يُطْلَبُ تعيين مركزها و نصف قطرها

2. ليكن $(\mathscr{P})$ المستوي الذي معادلته : $x-2y+2z+2=0$

أ) أثبت أنّ $(\mathscr{S})$ وَ $(\mathscr{P})$ متقاطعان وفق دائرة (C)

ب) عيّن إحداثيات المركز Ω و نصف القطر r للدائرة (C)

3. لتكن $M(a;b;-1)$ نقطة من سطح الكرة $(\mathscr{S})$ ؛ حيث $a;b$ عددان حقيقيّان و $(\mathscr{Q})$ المستوي الذي معادلته : $(a-1)x+(b+2)y+z-a+2b+3=0$

أ) أثبت أنّ M تنتمي إلى $(\mathscr{Q})$

ب) أثبت أنّ $(\mathscr{S})$ وَ $(\mathscr{Q})$ متماسان في النّقطة M.

15

في الفضاء المزوّد بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النّقطة $B(1;-2;1)$ وَ $\overrightarrow{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له ، (P') مستوي معادلته : $x+2y-7=0$

1) أ) بيّن أنّ (P) وَ (P') متعامدان

ب) بيّن أنّ المستويان (P) وَ (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يشمل النّقطة $C(-1;4;-1)$ و شعاع توجيهه $\overrightarrow{u}(2;-1;1)$

ج) لتكن النّقطة $A(5;-2;-1)$ ، أحسب المسافة بين النّقطة A و المستوي (P) ؛ ثمّ المسافة بين النّقطة A و المستوي (P')

د) استنتج المسافة بين A و المستقيم (Δ)

2) أ) لتكن من أجل كلّ عدد حقيقي t ، النّقطة $M_t(1+2t;3-t;t)$ ، عيّن بدلالة t الطول AM_t (نرمز بـ $\phi(t)$ لهذا الطول)

ب) أدرس تغيّرات الدّالة ϕ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\phi(t)=AM_t$ ، ثمّ حدّد القيمة الصغرى لها

ج) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدّية الصغرى.

16

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(0;-1;1)$، $B(1;3;2)$ و $C(-1;3;4)$

1) أ) أحسب الجداء السّلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ استنتج القيمة المدوّرة إلى الوحدة بالدّرجات للزاويّة $\widehat{BAC}$

ب) بيّن أنّ النّقط A ، B و C تعيّن مستويا (ABC)

2) أ) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}(2;-1;2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ب) أكتب معادلة ديكارتيّة للمستوي (ABC)

3) لتكن $(\mathscr{S})$ سطح الكرة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$، نسمي Ω ، و r مركز

و نصف قطر $(\mathscr{S})$ ، أحسب r و عيّن إحداثيات Ω

4) أكتب معادلة ديكارتيّة لكل من المستويين (P_1) ، (P_2) مماسي سطح الكرة $(\mathscr{S})$ و الموازيين للمستوي (ABC).

17

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقط $A(0;1;1)$، $B(2;2;-1)$ و $C(-3;4;4)$ و المستوي $(\mathscr{P})$ المعرّف بالتّمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=1+3\alpha+\beta \\ y=1-2\alpha \\ z=4+\alpha+\beta \end{cases}$$

حيث α,β وسيطان حقيقيان .

1) أ) بيّن أنّ النقط $A;B;C$ تعيّن مستويا.

ب) تحقق أنّ : $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ؛ ثمّ أكتب معادلة ديكارتية له .

2/ أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$ ؛ ثمّ بيّن أنّ المستويين $(\mathscr{P})$ و (ABC) متعامدان .

ب) بيّن أنّ تقاطع (ABC) و $(\mathscr{P})$ هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=-7+4t \\ z=-7+5t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$$

ج) أحسب المسافة بين النّقطة D و المستوي (ABC) ، و المسافة بين D و المستوي $(\mathscr{P})$ ، ثمّ استنتج المسافة بين D و المستقيم (Δ) .

3/ (Q) المستوي الذي يشمل النّقطة D و العمودي على كل من المستويين $(\mathscr{P})$ و (ABC) .

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب) بيّن أنّ المستويات $(\mathscr{P})$ و (ABC) و (Q) تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثمّ عيّن إحداثيات H .

ج) أحسب بطريقة أخرى المسافة بين (D) و المستقيم (Δ).

18

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النّقطة $A(1;-1;2)$ و المستوي (P) ذا المعادلة : $x-y+z+2=0$ و المستقيم $(\mathscr{D})$ المعرّف بـ : $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y+z-4=0 \end{cases}$.

1/ عيّن تمثيلا وسيطيا لـ $(\mathscr{D})$.

2/ جد معادلة ديكارتيّة للمستوي (P') الذي يشمل النّقطة A و يوازي المستوي (P) .

3/ أثبت أنّ $(\mathscr{D})$ يقطع (P') في النّقطة (A') حيث $A'(6;3;1)$.

4/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و يوازي (P) و يقطع (D) .

19

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ؛ $B(0;2;0)$ ؛ $C(0;0;1)$.

1/ بيّن أنّ النّقط $A;B;C$ تعيّن مستويا ؛ ثمّ تحقق أنّ : $2x+3y+6z-6=0$ معادلة للمستوي ABC.

2/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) و الذي يشمل النّقطة O.

3/ جد إحداثيات H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

4/ بيّن أنّ : (BH) عمودي على (AC) ، ثمّ استنتج أنّ H نقطة تقاطع الأعمدة في المثلّث ABC.

20

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط $A(0;0;2)$ ؛ $B(0;4;0)$ ؛ $C(2;0;0)$.

1/ أ) بيّن أنّ النّقط $A;B;C$ تعيّن مستويا ؛ ثمّ تحقق أنّ : $2x+y+2z-4=0$ معادلة للمستوي ABC.

ب) أحسب المسافة بين النّقطة O و المستوي (ABC) .

2/ أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقطة A و العمودي على المستقيم (BC) .

ب) (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P) ؛ عيّن تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) ، ماذا يمثّل (Δ) في المثلّث ABC ؟.

3/ أ) ليكن (Δ') المتوسط المتعلّق بالضلع $[AC]$ ، بيّن أنّ تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) هو :

$$\begin{cases} x=t \\ y=4-4t \\ z=t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$$

ب) أثبت أنّ المثلّث ABC متساوي السّاقين .

4/ لتكن H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ') ، أثبت أنّ إحداثيات H هي : $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$. ، ماذا تمثّل النّقطة H في المثلّث ABC.

5/ أثبت أنّ H هي المسقط العمودي للنّقطة O على المستوي ABC