حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

- $f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\ }$
  - نستعمل طريقة التحليل :
    وضع الحد الأكبر درجة كعامل مشترك .
    $$\sqrt{ax^2+bx+c} = |x|\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}$$
    $$\sqrt{\alpha x+\beta} = |x|\sqrt{\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x^2}}$$
- $f(x)$ تتضمن كثيرات حدود فقط
  - تطبيق القاعدة التالية :
    عند اللانهاية: كثير الحدود له نفس نهاية الحد الأكبر درجة.
    $$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

حالة عدم التعيين $+\infty - \infty$

- $f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\ }$
  - $f(x) = \sqrt{ax+b} + \alpha x + \beta$ → نضع x كعامل مشترك
  - $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$
    - $a = \alpha$ → نضع x كعامل مشترك
    - $a \neq \alpha$ → نستعمل طريقة المرافق
  - $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha x + \beta$
    - $\sqrt{a} = |\alpha|$ → نستعمل طريقة المرافق
    - $\sqrt{a} \neq |\alpha|$ → نضع x كعامل مشترك

حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$

- $f(x)$ تتضمن كثيرات حدود
  - نستعمل طريقة الإختزال :
    ❶ نحلّل البسط والمقام.
    ❷ ثم نختزل على $(x-a)$
    $$f(x) = \frac{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}{\cancel{(x-a)}(\cdots\cdots)}$$
- $f(x)$ تتضمن جذرًا $\sqrt{\ }$
  - نستعمل طريقة المرافق :
    ❶ نضرب : $f(x) \times \frac{\text{المرافق}}{\text{المرافق}}$
    ❷ ثم نختزل على : $(x-a)$
- المقام من الشكل $(\alpha x+\beta)$
  - نستعمل طريقة العدد المشتق :
    ❶ إظهار العبارة : $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$
    $$\frac{\ldots\ldots\ldots}{\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
    ❷ $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$
- $f(x)$ تتضمن $\sin x$ و $\cos x$
  - نظهر إحدى النهايات الشهيرة التالية :
    $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$
    $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

مثال 01

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2-3}}{x+2}$ تكافئ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2-3/x}}{x(1+2/x)}$ تكافئ :

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{2}}{x}=-\sqrt{2}$

مثال 02

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+2x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}=|a|)$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}+(2x-2)\right)\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{\left(\sqrt{4x^2-3}-(2x-2)\right)}$ تكافئ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{-2x\left(\sqrt{1}+1\right)}$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{-4x}=-2$

مثال 03

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}+x-2$ من الشكل $(\sqrt{\alpha}\neq|a|)$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}+x-2$ تكافئ

$$\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+x-2$$

$\lim_{x\to-\infty}-3x=+\infty$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}-x\left[\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}+1-\frac{2}{x}\right]$ تكافئ

مثال 04

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}$ $(+\infty-\infty\,,\ a=\alpha)$ ومنه

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{4x^2-2}\right)\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=0$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{4x^2-3}+\sqrt{4x^2-2}\right)}$ تكافئ

مثال 05

$f(x)=\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ $(+\infty-\infty\,,\ a\neq\alpha)$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-3}-\sqrt{9x^2-2}$ تكافئ

$\lim_{x\to-\infty}-x\sqrt{4-3/x^2}-x\sqrt{9-2/x^2}$ تكافئ $\lim_{x\to-\infty}-x[2-3]$

ومنه $\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$

مثال 06

$f(x)=\sqrt{2x-3}-3x+2$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-3}-3x+2$

تكافئ $\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}-3x+2$ تكافئ $\lim_{x\to+\infty}x[\sqrt{2}-3]$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

مثال 07

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\to1}f(x)$ ، $(0/0)$

تكافئ $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ $\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$ تكافئ $\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

ومنه $\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{4}$

مثال 08

$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ ومنه $\lim_{x\to1}f(x)$ تكافئ $\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}$

تكافئ $\lim_{x\to1}(x+1)$ ومنه $\lim_{x\to1}f(x)=2$

مثال 09

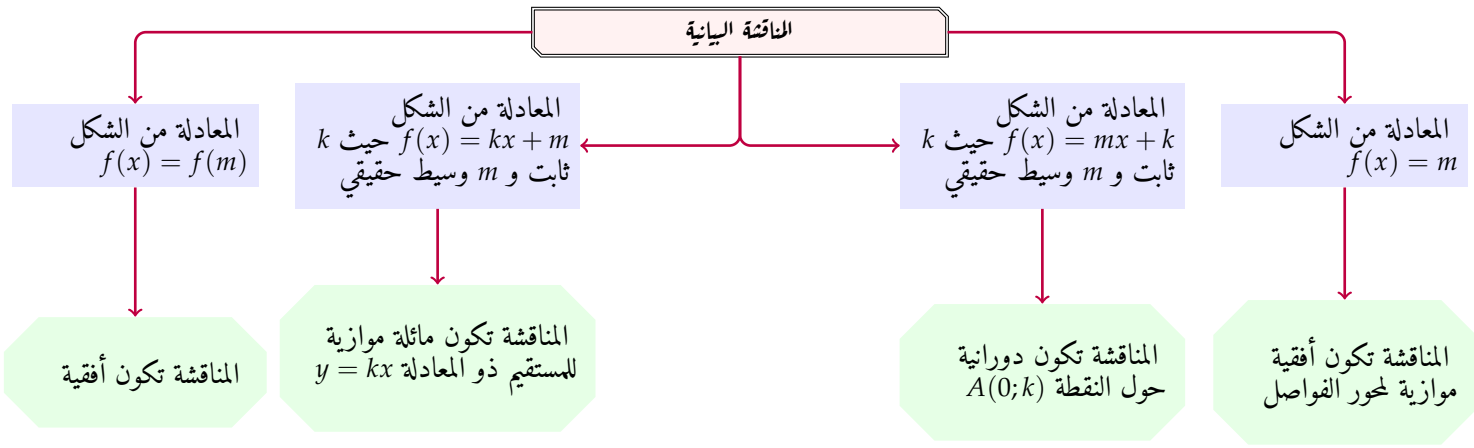
$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

لحساب $\lim_{x\to1}f(x)$ يجب أن تكون $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ تكافئ

$\lim_{x\to x_0}f(x)=g'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

ومنه بوضع $g(x)=\sqrt{x+3}$ نجد $g(1)=2$ ومنه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ومنه $\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{4}$ ومنه $g'(1)=\frac{1}{4}$



الدالة الزوجية :

إذا كانت $f(x)=f(-x)$ نقول أن الدالة f زوجية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب .

الدالة الفردية :

إذا كانت $f(-x)=-f(x)$ نقول أن الدالة f فردية وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمركز المعلم.

الدالة الدورية :

إذا كانت $f(x+p)=f(x)$ نقول أن الدالة f دورية وتمثيلها البياني يعيد نفسه عند كل مجال طوله p .

مركز التناظر :

إذا كانت $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل مركز تناظر هو النقطة $A(\alpha;\beta)$.

محور التناظر :

إذا كانت $f(2\alpha-x)=f(x)$ نقول أن التمثيل البياني للدالة f يقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x=\alpha$.

التقاطع مع محور الفواصل :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ونجد فواصل هذه النقط مع العلم أن ترتيباتها معدومة.

التقاطع مع محور التراتيب :

لتعيين نقط تقاطع (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ونجد ترتيبات هذه النقط مع العلم أن فواصلها معدومة.

استنتاج تمثيل بياني من آخر :

❶ إذا كانت $h(x)=|f(x)|$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل.
و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (C_f) تحت محور الفواصل.

❷ إذا كانت $h(x)=f(|x|)$ فإن (C_h) منطبق على (C_f) لما يكون $x>0$.
و (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما يكون $x<0$.

❸ إذا كانت $h(x)=-f(x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

❹ إذا كانت $h(x)=f(-x)$ فإن (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

❺ إذا كانت $h(x)=f(x+a)+b$ فإن (C_h) هو صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{a}{b}$.

❻ إذا كانت $h(x)=-f(-x)$ فإن (C_h) هو نظير (C_f) بالنسبة لمركز المعلم.

إزالة حالات عدم التعيين في الدالة الأسية

حالة $(0)(\infty)$

لإزالتها ننشر (فك الأقواس) ونستفيد من المبرهنة :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ & : n \text{ زوجي} \\ 0^- & : n \text{ فردي} \end{cases}$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية : $\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x$

حالة عدم التعيين من الشكل $(-\infty)(0)$

$$f(x) = (x-1)e^x$$
$$= xe^x - e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

حيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

حالة $\frac{0}{0}$

نغير شكل الدالة f ونستفيد من المبرهنة :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية : $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{3x}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{3x}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{x}$$

نبعد بين x و 3 ثم نضرب البسط والمقام بالعدد (2)

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

حيث أن : $\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

حالة $\frac{\infty}{\infty}$

نفرق الكسر إذا كان المقام حد واحد

نخرج عامل مشترك مناسب من البسط والمقام إذا كان المقام أكثر من حد

ونستفيد من المبرهنات :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

مثال توضيحي 1: حساب النهاية : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$$f(x) = \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

حيث أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

مثال توضيحي 2: حساب النهاية : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x-1}$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$ ، نخرج x كعامل مشترك من البسط ، و e^x من المقام ، ومنه :

$$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{x}{e^x}\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\left[\frac{1-0}{1-0}\right] = 0$$

حيث أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

حالة $+\infty - \infty$

إخراج عامل مشترك مناسب عادة:

$x \to +\infty$ عندما e^x

ويمكن e^{2x} أو e^{3x} أو ...

$x \to -\infty$ عندما e^{-x}

ويمكن e^{-2x} أو ...

ونستفيد من المبرهنات :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ ,}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 : n > 0$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} + x$

حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$f(x) = e^{-x} + x$$
$$= e^{-x}\left[1 + \frac{x}{e^{-x}}\right]$$
$$(x \to -\infty \text{ لأن } e^{-x} \text{ أخرجنا})$$
$$= e^{-x}\left[1 + xe^x\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty[1+0] = +\infty$$

حيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

مثال 1

حساب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)e^x$

حالة عدم التعيين من الشكل $(+\infty)(0)$

$$f(x)=(x^2+1)e^x$$
$$=x^2e^x+e^x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ حيث أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0+0=0$

مثال 2

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{e^{x+2}-e}{x^2-1}$, حالة عدم التعيين من الشكل : $(0/0)$

$$f(x)=\frac{e^{x+2}-e}{x^2-1}$$

❶ يجب إظهار الواحد لذلك نخرج e كعامل مشترك $f(x)=\dfrac{e(e^{x+1}-1)}{x^2-1}$

❷ يجب إظهار $(x+1)$ في المقام أي :

$$f(x)=\frac{e(e^{x+1}-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{e}{x-1}\left[\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\right]$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\frac{e}{-2}(1)=\frac{e}{-2}$$

حيث أن $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{e^\theta-1}{\theta}=1$, $(\theta=x+1,\theta\to0\Leftrightarrow x\to-1)$

مثال 3

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1}$, حالة عدم التعيين من الشكل $(0/0)$.

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1}=\frac{\dfrac{e^{2x}-1}{x}}{\dfrac{e^{5x}-1}{x}}$$
$$=\frac{2\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)}{5\left(\dfrac{e^{5x}-1}{5x}\right)}$$

$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{e^\theta-1}{\theta}=1$ حيث أن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\dfrac{2(1)}{5(1)}=\dfrac{2}{5}$

مثال 4

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{4x}}{5x}$, حالة عدم التعيين من الشكل $(0/0)$.

$$f(x)=\frac{e^x-e^{4x}}{5x}=\frac{e^x(1-e^{3x})}{5x}$$
$$=\frac{-e^x(e^{3x}-1)}{5x}=\frac{-3e^x}{5}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)$$

$\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{e^\theta-1}{\theta}=1$ حيث أن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\dfrac{3}{5}(1)=-\dfrac{3}{5}$

مثال 5

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-e^x+1$, حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$f(x)=e^{2x}-e^x+1$$
$$=e^x(e^x-1)+1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(+\infty)+1=+\infty$$

مثال 6

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{5x}-e^{3x}+x^3$, حالة عدم التعيين من الشكل $+\infty-\infty$.

$$f(x)=e^{5x}-e^{3x}+x^3$$
$$=e^{3x}(e^{2x}-1)+x^3$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty(+\infty-1)+\infty=+\infty$$

مثال 7

حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, حالة عدم التعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$
$$=\frac{e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^{-x}}-1\right]}{e^{-x}\left[\frac{e^x}{e^{-x}}+1\right]}$$
$$=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$