الكافي في الرياضيات

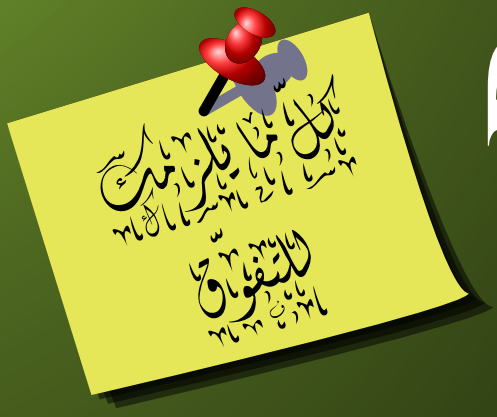
دروس مفصلة و مسائل محلولة

BACCALAURÉAT

الأعداد المركبة

I

و تطبيقاتها



تأليف : عبدالحق فرقوس

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

ترميزات

$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية
$\mathbb{Z}$	مجموعة الأعداد الصحيحة
$\mathbb{Q}$	مجموعة الأعداد الناطقة
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية
$\mathbb{R}^*$	مجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة
$\mathbb{R}^2$	مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية
$\mathbb{C}$	مجموعة الأعداد المركبة
$\mathbb{C}^*$	مجموعة الأعداد المركبة غير المعدومة
$[a, b]$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $a \leq x \leq b$ (مجال مغلق)
$]a, b[$	مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $a < x < b$ (مجال مفتوح)
$\bar{z}$	مرافق العدد المركب z
$\|z\|$	طويلة العدد المركب z
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع الذي بدايته النقطة A و نهايته النقطة B
(AB)	المستقيم المار بالنقطتين A و B
$[AB]$	قطعة المستقيم التي بدايتها النقطة A و نهايتها النقطة B
$\mathcal{U}_n$	مجموعة الجذور النونية للوحدة
$\mathscr{C}(P, r)$	الدائرة التي مركزها النقطة P و نصف قطرها r

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

المحتويات (باختصار)

الدرس 1

I مجموعة الأعداد المركبة 3

II الشكل المثلثي لعدد مركب 15

III تطبيقات الأعداد المركبة 41

IV تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب 51

تمارين محلولة 63

V اختبر استيعابك للدرس 65

VI تمارين تطبيقية 69

VII تمارين للتعمق 259

ملاحق 371

ا كثيرات الحدود 373

ب المعادلات من الدرجة الثالثة و الرابعة 387

ج الحروف اليونانية و اللاتنية 403

د ملخص الدرس 407

ه حساب المثلثات 415

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

المحتويات

الدرس 1

I مجموعة الأعداد المركبة 3
مقدمة . . . 3
1.I تحليل المسألة المطروحة . . . 3
2.I مرافق عدد مركب . . . 8
1.2.I تعريف . . . 8
2.2.I خواص . . . 8
3.I التمثيل الهندسي لعدد مركب . . . 11
1.3.I التمثيل النقطي . . . 11
2.3.I التمثيل الشعاعي . . . 12

II الشكل المثلثي لعدد مركب 15
1.II طويلة عدد مركب . . . 15
1.1.II تعريف . . . 15
2.1.II خواص . . . 16
2.II عمدة عدد مركب غير معدوم . . . 18
1.2.II تعريف . . . 18
2.2.II الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم . . . 19
3.2.II الإنتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس . . . 20
3.II الأعداد المركبة المكتوبة على الشكل المثلثي . . . 21
1.3.II حاصل ضرب عددين مركبين . . . 21
2.3.II حاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين . . . 23
4.II دستور موافر . . . 25
5.II الجذور النونية لعدد مركب . . . 26
6.II الجذور النونية للوحدة . . . 30
7.II المعادلة $Z^n = a$ . . . 34
8.II الدالة الأسية المركبة . . . 36

III تطبيقات الأعداد المركبة 41
1.III الجذور التربيعية لعدد مركب . . . 41
2.III تعيين الجذور التربيعية لعدد مركب . . . 41
1.2.III الطريقة الأولى : باستعمال الشكل المثلثي . . . 41
2.2.III الطريقة الثانية : باستعمال الشكل الجبري . . . 42

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

3.III المعادلات من الدرجة الثانية 43
1.3.III الحل ، في ℂ ، لمعادلة من الدرجة الثانية 43
2.3.III الحل ، في ℂ ، لمعادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية 45
4.III حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ 45
5.III العبارة الخطية لكل من $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ 47

IV تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب 51
1.IV الأعداد المركبة و الهندسة المستوية 51
1.1.IV المسافة 51
2.1.IV مركز المسافات المتناسبة 51
3.1.IV الزوايا 52
4.1.IV الجداء السلمي 53
2.IV تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب 53
1.2.IV الإنسحاب و التحاكي 54
2.2.IV الدوران 56
3.IV التشابه المستوي المباشر 57
1.3.IV تحويل نقطي آخر : الإنزلاق 61

تمارين محلولة 63

V اختبر استيعابك للدرس 65

VI تمارين تطبيقية 69
1.VI مجموعة الأعداد المركبة 69
2.VI الشكل المثلثي لعدد مركب 115
3.VI تطبيقات الأعداد المركبة 149
4.VI تمارين متنوعة 217

VII تمارين للتعمق 259

ملاحق 371

ا كثيرات الحدود 373
1.ا مجموعة كثيرات الحدود بمعاملات في $\mathbb{K}$ 373
2.ا القسمة في $\mathbb{K}[X]$ 375
1.2.ا علاقة القسمة 375
2.2.ا القسمة الإقليدية 375
3.ا القواسم و المضاعفات المشتركة 376
1.3.ا القاسم المشترك الأكبر 376
2.3.ا كثيرات الحدود الأولية فيما بينها 378
3.3.ا المضاعف المشترك الأصغر 379
4.ا كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل 379
5.ا الدوال كثيرات الحدود و الجذور 380
1.5.ا الدوال كثيرات الحدود 380
2.5.ا جذور كثيرات الحدود 380

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

ا.3.5 إشتقاق كثيرات الحدود 381
ا.4.5 العلاقات بين المعاملات و الجذور 382
ا.5.5 النظرية الأساسية في الجبر 385

ب المعادلات من الدرجة الثالثة و الرابعة 387
ب.1 المعادلات التكعيبية 387
ب.1.1 مقدمة تاريخية 387
ب.2.1 الطريقة الأولى : طريقة دال فيرو 387
ب.3.1 الطريقة الثانية : طريقة لاقرانج 393
ب.4.1 الطريقة الثالثة : طريقة فييت 394
ب.2 المعادلات من الدرجة الرابعة 396
ب.1.2 الطريقة الأولى : طريقة ديكارت 396
ب.2.2 الطريقة الثانية : طريقة فيراري 398
ب.3.2 الطريقة الثالثة : طريقة لاقرانج 399
ب.3 و المعادلات من الدرجة الخامسة ؟ 400

ج الحروف اليونانية و اللاتنية 403
ج.1 الأرقام 403
ج.2 الحروف اليونانية 404
ج.3 الحروف اللاتنية 405

د ملخص الدرس 407
د.1 الشكل الجبري للأعداد المركبة 407
د.2 التفسير الهندسي للأعداد المركبة 408
د.3 الشكل المثلثي (الأسي) للأعداد المركبة 410
د.4 تحويلات المستوي المركب 411

ه حساب المثلثات 415

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

الدرس

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

1 مجموعة الأعداد المركبة

مقدمة

في أوائل القرن السادس عشر ميلادي، تمكّن العالم الإيطالي **دال فيرو** (Dal Ferro) من إيجاد صيغة عامة لحلول المعادلات التكعيبية[1] (المعادلات من الدرجة الثالثة[2]) التي على الشكل $x^3 + ax = b$:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b - \sqrt{b^2 + 4a^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4a^3/27}}{2}}$$

و بعد سنين من هذا الإكتشاف (في أواخر القرن السادس عشر)، قام العالم **بومبيلي** (Bombelli) بتطبيق هذه الصيغة على المعادلة $x^3 - 15x = 4$ ليجد :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

و هذه الكتابة لا معنى لها لأنّنا لا نعلم ماذا يمثّل الرمز $\sqrt{-1}$ (جذور الأعداد السالبة غير معرّفة).
من جهة أخرى، لاحظ **بومبيلي** (باستخدام القواعد الإعتيادية للحساب[3]) أنّ :

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{و} \quad \left(2 - \sqrt{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

ليجد في الأخير $x = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{-1}\right)^3} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

و بالتعويض في المعادلة $x^3 - 15x = 4$ وجد أنّ $x = 4$ حلّ لها!
و بدراسة أعمق، استخلص أنّ مجموعة حلول هذه المعادلة هي $\left\{4, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}\right\}$.
فوجد نفسه أمام تساؤل «طبيعي و مشروع»:

كيف يمكن تبرير استعمال رموز "تخيّلية" للتعبير عن حلول كلّها حقيقية لهذه المعادلة البسيطة ؟

1.I تحليل المسألة المطروحة

إذا تخيّلنا أنّه يوجد عدد i مربّعه -1 و إذا تعاملنا معه في الحساب و كأنّه عدد حقيقي، فإنّه لكلّ عدد حقيقي سالب $\alpha < 0$، يكون :

[1] ظهرت الأعداد المركبة لأول مرة عند البحث عن حلول المعادلات من الدرجة الثالثة و ليس الثانية على خلاف ما يمكن توقعه.
[2] في الملحق ب صفحة 387 دراسة عامة للمعادلات من الدرجة الثالثة و الرابعة.
[3] نذكّر بالمتطابقة الشهيرة : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$\left(\imath\sqrt{-\alpha}\right)^2 = \imath^2\left(\sqrt{-\alpha}\right)^2 = -\left(-\alpha\right) = \alpha$$

و هكذا نكون قد حللنا مشكلة جذور الأعداد السالبة. و لكن إذا سمحنا لأنفسنا بتطبيق قواعد الحساب الإعتيادية على هذا العدد التخيّلي $\imath$، فإنّنا «نخترع»كمًّا مُعتبرًا من الأعداد، مثل $2\imath-$ أو $\sqrt{3}\imath - \frac{1}{2}$ أو أعداد جِدّ معقّدة مثل :

$$\lambda = \left(\frac{\left(\frac{1-2\imath}{2-5\imath}\right)^{-2} - \left(\frac{1-\imath}{3+2\imath}\right)}{\left(\frac{2-\imath 5}{2\imath^8}\right)^2 + \left(\frac{-\imath}{3+2\imath}\right)^3}\right)^4$$

للوهلة الأولى، تبدو الأمور في غاية التّعقيد، لكن إذا تمعنّا النظر عن كثب، نجدها خلاف ذلك ...

تعريف 1 : نسمّي **عددا مركّبا**[4] كلّ عدد من الشكل $a+\imath b$ بحيث a و b عددان حقيقيان و $\imath$ العدد **التخيلي** (أو الوحدة التخيلية)[5] الذي يحقق $\imath^2 = -1$.

نرمز بـ $\mathbb{C}$ إلى مجموعة الأعداد المركّبة : $\mathbb{C} = \left\{a+\imath b \;;\quad a,b\in\mathbb{R}\right\}$

أمثلة 1 : الأعداد 0، -1، $\frac{1}{2}$، $\sqrt{2}$، π، $e+\imath\sqrt[5]{7}$، $1+\imath$ و $2\imath-$ أعداد مركبة (أي تنتمي إلى المجموعة $\mathbb{C}$).

لحدّ الآن، لا يوجد تعقيد لكن كيف يُمكن إجراء العمليات الأساسية على هذه الأعداد : الجمع، الطرح، الضرب و القسمة؟

بالنسبة للجمع و الطرح، الجواب بسيط : مجموع أو فرق عددين مركبين هو عدد مركب[6] :

$$\boxed{(a+\imath b)+(a'+\imath b') = (a+a')+\imath(b+b')} \quad (1)$$

$$\boxed{(a+\imath b)-(a'+\imath b') = (a-a')+\imath(b-b')} \quad (2)$$

و كذلك الأمر بالنسبة للضرب إذا أخذنا بعين الإعتبار الخاصية $\imath^2 = -1$:

$$(a+\imath b)(a'+\imath b') = aa'+a\imath b'+\imath ba'+\imath^2 bb' = aa'+\imath(ab'+ba')-bb'$$

أي :

$$\boxed{(a+\imath b)(a'+\imath b') = (aa'-bb')+\imath(ab'+a'b)} \quad (3)$$

و ماذا عن القسمة : $\frac{a'+\imath b'}{a+\imath b}$ ؟ لكتابة الكسر السابق على شكل عدد مركّب ، يكفي أن نجعل مقامه عددًا حقيقيًا. لكن كيف ذلك؟

نلاحظ أنّ $(a+\imath b)(a-\imath b) = a^2+b^2$ و هو عدد حقيقي، إذًا :

$$\frac{a'+\imath b'}{a+\imath b} = \frac{(a'+\imath b')(a-\imath b)}{(a+\imath b)(a-\imath b)} = \frac{(aa'+bb')+\imath(ab'-a'b)}{a^2+b^2}$$

أي

$$\boxed{\frac{a'+\imath b'}{a+\imath b} = \left(\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\right)+\imath\left(\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\right)} \quad (4)$$

و هو من الشكل $\alpha+\imath\beta$ مع $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

أمثلة 2 : • $(3-\imath)+(5+2\imath) = (3+5)+\imath(-1+2) = 8+1\times\imath = 8+\imath$.

[6] فرضنا مسبقًا أنّه بإمكاننا التعامل مع $\imath$ كأيّ عدد حقيقي.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- $(3-\imath)^2 = 3^2 - 2\times 3\imath + \imath^2 = 9 - 6\imath - 1 = 8 - 6\imath$.
- $\dfrac{3-\imath}{1+\imath} = \dfrac{(3-\imath)(1-\imath)}{(1+\imath)(1-\imath)} = \dfrac{3-3\imath-\imath+\imath^2}{1^2-\imath^2} = \dfrac{2-4\imath}{2} = 1-2\imath$.

خلاصة القول: باختراع عدد $\imath$ بحيث $\imath^2 = -1$ و باستعماله في الحساب كأيّ عدد حقيقي، نكون قد أنشأنا مجموعة الأعداد من الشكل $a+\imath b$ مع $a,b\in\mathbb{R}$، و العمليات الأساسية (الجمع، الطرح، الضرب و القسمة) عليها تُنتج أعدادًا من نفس الشكل.
هكذا تمّ إنشاء مجموعة الأعداد المركّبة ...

في المجموعة نلاحظ أنّ $0\times\imath = 0$، و بأخذ $b=0$ و $a\in\mathbb{R}$ كيفي فإنّ كلّ عدد حقيقي a هو من الشكل $a+0\imath$ أي أنّ $\boxed{\mathbb{R}\subset\mathbb{C}}$.
لكن قاعدة الإشارات (جداء عددين من نفس الإشارة هو عدد موجب و جداء عددين مختلفين في الإشارة هو عدد سالب) تفقد صحتها في مجموعة الأعداد المركبة : فقاعدة الإشارات تستلزم أنّ مربّع أي عدد يجب أن يكون موجباً لكن في المجموعة $\mathbb{C}$ كلّ من 1 و -1 هو مربّع ($1^2=1$ و $\imath^2=-1$) و بالتالي لا يمكن أن يكونا موجبين معاً (إذا كان $0\geq 1$ فإنّ $0\leq -1$ أي $0\leq\imath^2$ و هذا تناقض ؛ و إذا كان $0\geq -1$ فإنّ $0\leq 1$ أي $0\leq 1^2$ و هذا تناقض أيضاً).

⛔ في مجموعة الأعداد المركبة، الرموز $\geq$ ، $>$ ، $\leq$ ، $<$ ليس لها معنىٰ!

و بالتالي كتابة من الشكل $z\geq 3-\imath$ في ورقة إمتحان تُعدّ جريمة لا تُغتفر !

ملاحظة 1 : ◁ قد تُسوِّل لنا نفوسنا كتابة جذور أعداد سالبة و هذا لا يُنصح به لأنّه يؤدي بنا إلى تناقضات، مثلاً :

$$1=\sqrt{1}=\sqrt{-1\,(-1)}=\imath\sqrt{-1}=\imath^2=-1$$

▷

للتخلّص من هذه الإلتباسات، سنحاول إعطاء تعريف أدقّ للأعداد المركبة : نلاحظ أنّ المساواة $a+\imath b = a'+\imath b'$ لا تتحقّق إلاّ إذا كان $a=a'$ و $b=b'$ لأنّه إذا كان $a+\imath b = a'+\imath b'$ فإنّ $(a-a')^2 = \imath\,(b'-b)$ منه $a-a' = \imath\,(b'-b)$ و هذا لا يتحقّق في مجموعة الأعداد الحقيقية إلاّ إذا كان $a=a'$ و $b=b'$.
و بما أنّ العدد المركّب $a+\imath b$ يقابله و بصفة وحيدة الزوج المرتّب (a,b)، يمكن إعتبار أنّ أي عدد مركّب $a+\imath b$ هو في الحقيقة زوج مرتّب (a,b) من الأعداد الحقيقية، و أنّ الوحدة التخيلية $\imath$ يمثّل الزوج $(0,1)$ و أنّ أيّ عدد حقيقي a ما هو إلاّ الزوج $(a,0)$.
من هذا المُنطلَق، يمكن تعريف مجموعة الأعداد المركبة بكونها المجموعة $\mathbb{R}^2$ للأزواج الحقيقية المرتبة (a,b) و التي نعرِّف فيها عمليتي الجمع و الضرب كما يلي :

$$(a,b)+(a',b') = (a+a',b+b')$$

$$(a,b)\times(a',b') = (aa'-bb',ab'+a'b)$$

يمكن التحقّق و بكل سهولة أنّ هاتين العمليتين تتمتعان بالخواص الإعتيادية للجمع و الضرب : فهما تبديليتان، تجميعيتان و الضرب توزيعي على الجمع، و الزوج $(0,0)$ هو الوحيد الذي ليس له مقلوب (نظير بالنسبة للضرب).
لإيجاد حاصل قسمة زوجين، يكفي حلّ المعادلة $(a,b)\times(x,y) = (a',b')$ و بكلّ بساطة نجد :

$$\frac{(a',b')}{(a,b)} = \left(\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2},\frac{ab'-a'b}{a^2+b^2}\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بالإضافة إلى ذلك، مهما يكن العددان الحقيقيان a و b لدينا :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0)$$

و بما أنّ الزوجين $(a, 0)$ و $(b, 0)$ يمثلان العددين الحقيقيين a و b، و أنّ الزوج $(0, 1)$ هو العدد التخيلي ι، فالمساواة السابقة تُثبت أنّ كلّ عدد مركّب (a, b) يُكتب على الشكل $a + \iota b$.

تعريف 2 : الكتابة $z = a + \iota b$ تُسمّى **الشكل الجبري** للعدد المركب z.
a هو **الجزء الحقيقي** للعدد z و نكتب $a = \mathrm{Re}(z)$.
و b هو **جزؤه التخيّلي**[7] و نكتب $b = \mathrm{Im}(z)$.
إذا كان الجزء التخيّلي للعدد z معدوماً، نقول أنّ z **حقيقي**.
إذا كان الجزء الحقيقي للعدد z معدوماً، نقول أنّ z **تخيّلي صِرف**.

ملاحظة 2 : ◁ عندما نتحدّث عن «العدد المركب» $z = a + \iota b$ فإنّنا نفرض ضِمنياً أنّ هذه الكتابة هي الشكل الجبري للعدد z أي أنّ a و b عددان حقيقيان. في غياب هذه الفرضية، أي إذا لم يكن أحد العددين a و b (أو كلاهما) حقيقيًا، فإنّ الكثير من النتائج المتعلقة بالأعداد المركبة تُصبح خاطئة، مثلاً العلاقة : $\mathrm{Re}(x + \iota y) = x$ خاطئة لأجل $x = 1$ و $y = \iota$. ▷

من السّهل إثبات أنّ :

$$\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) \quad \text{و} \quad \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$$

و بصفة عامة :

مبرهنة 1 : ليكن $n \geq 2$ عدداً طبيعيا و لتكن z_1 ، z_2 ، ⋯ ، z_n أعدادًا مركبة. لدينا :

1. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \cdots + \mathrm{Re}(z_n)$
2. $\mathrm{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) + \cdots + \mathrm{Im}(z_n)$

البرهان.

1. بالتراجع على العدد الطبيعي $n \geq 2$:

- $n = 2$: ليكن $z_1 = a_1 + \iota b_1$ و $z_2 = a_2 + \iota b_2$ عددين مركبين.
لدينا $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \iota(b_1 + b_2)$ منه $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = b_1 + b_2$
أي $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$.
- نفرض الخاصية صحيحة لكلّ عدد طبيعي أصغر من أو يساوي n و لنثبت أنّها صحيحة لأجل $n + 1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}) &= \mathrm{Re}\big((z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + z_{n+1}\big) \\ &= \mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + \mathrm{Re}(z_{n+1})\end{aligned}$$

حسب فرضية التراجع، الخاصية صحيحة حتى الرتبة n منه

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \cdots + \mathrm{Re}(z_n)$$

أي

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}) &= \big(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \cdots + \mathrm{Re}(z_n)\big) + \mathrm{Re}(z_{n+1}) \\ &= \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \cdots + \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{Re}(z_{n+1})\end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع، فالخاصية صحيحة لكل عدد طبيعي $n \geq 2$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2. بالتراجع على العدد الطبيعي n:

- $\underline{n=2}$: ليكن $z_1 = a_1 + \imath b_1$ و $z_2 = a_2 + \imath b_2$ عددين مركبين.
لدينا $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + \imath (b_1 + b_2)$ منه $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = b_1 + b_2$
أي $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)$.
- نفرض الخاصية صحيحة لكلّ عدد طبيعي أصغر من أو يساوي n و لنثبت أنّها صحيحة لأجل $n+1$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}) &= \operatorname{Im}\big((z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + z_{n+1}\big)\\ &= \operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + \operatorname{Im}(z_{n+1})\end{aligned}$$

حسب فرضية التراجع، الخاصية صحيحة حتى الرتبة n منه

$$\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) + \cdots + \operatorname{Im}(z_n)$$

أي

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}) &= \big(\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) + \cdots + \operatorname{Im}(z_n)\big) + \operatorname{Im}(z_{n+1})\\ &= \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) + \cdots + \operatorname{Im}(z_n) + \operatorname{Im}(z_{n+1})\end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع، فالخاصية صحيحة لكل عدد طبيعي $n \geq 2$.

ملاحظة 3 : ◁ يمكن إثبات هذه النتيجة بطريقة أخرى تعتمد على النتيجة السابقة : إذا كان $z = x + \imath y$ فإنّ $\imath z = \imath(x + \imath y) = -y + \imath x$ منه $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(\imath z)$ و $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Re}(\imath z)$ منه :

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) &= -\operatorname{Re}(\imath(z_1 + z_2 + \cdots + z_n))\\ &= -\operatorname{Re}(\imath z_1 + \imath z_2 + \cdots + \imath z_n)\\ &= -\operatorname{Re}(\imath z_1) - \operatorname{Re}(\imath z_2) - \cdots - \operatorname{Re}(\imath z_n) \qquad \text{(حسب النتيجة السابقة)}\\ &= \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2) + \cdots + \operatorname{Im}(z_n)\end{aligned}$$

و هو المطلوب ▷

■

ملاحظة 4 : ◁ إذا كان z_1 و z_2 عددين مركبين فإنه في الحالة العامة $\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2) \neq \operatorname{Re}(z_1) \cdot \operatorname{Re}(z_2)$ و $\operatorname{Im}(z_1 \cdot z_2) \neq \operatorname{Im}(z_1) \cdot \operatorname{Im}(z_2)$ و يمكن التحقق من ذلك بأخذ $z_1 = \imath$ و $z_2 = \imath$. لكن، إذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ **عدداً حقيقيًا** و $z \in \mathbb{C}$ عدداً مركبا فإنّ $\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z)$ و $\operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z)$ و هو حالة خاصة من تعريف عملية الضرب في $\mathbb{C}$. ▷

مبرهنة 2 : يتساوى عددان مركبان إذا و فقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان و تساوى جزءاهما التخيّليان، بمعنى :
إذا كان $z_1 = a_1 + \imath b_1$ و $z_2 = a_2 + \imath b_2$ عددين مركبين، فإنّ :

$$z_1 = z_2 \iff a_1 = a_2 \text{ و } b_1 = b_2$$

البرهان. ليكن $z_1 = a_1 + \imath b_1$ و $z_2 = a_2 + \imath b_2$ عددين مركبين بحيث $z_1 = z_2$. نفرض أنّ $b_1 \neq b_2$. لدينا :

$$z_1 = z_2 \iff a_1 + \imath b_1 = a_2 + \imath b_2 \iff a_1 - a_2 = \imath(b_2 - b_1)$$

و بما أنّ $b_2 - b_1 \neq 0$ فإنّ $\imath = \dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$ أي $\imath \in \mathbb{R}$ و هذا تناقض!
هذا يعني أنّ $b_1 = b_2$ بالضرورة. منه $a_1 = a_2$.
(يمكن أيضاً ملاحظة أنّ : $a_1 - a_2 = \imath(b_2 - b_1) \Longrightarrow (a_1 - a_2)^2 = -(b_2 - b_1)^2$
و هذا لا يتحقق في مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا كان $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$).

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

2.I مرافق عدد مركب

1.2.I تعريف

في الفقرة السابقة، و لإيجاد $\frac{1}{a+\imath b}$ (مقلوب العدد المركب $a+\imath b$) ، رأينا الدور الذي لعبه العدد المركب $a-\imath b$ و هو عدد يتمتع بكثير من الخواص الهامة جبرية كانت أو هندسية.

تعريف 3 : نسمي **مرافق** العدد المركب z حيث $z=a+\imath b$ العدد المركب $\overline{z}$ حيث $\overline{z}=a-\imath b$ و نقرأ «z barre».

إستنادًا إلى التعريف السابق، لدينا النتائج التالية :

- $\overline{\overline{z}}=z$ و نقول أن العددين z و $\overline{z}$ **مترافقان**.
- $z+\overline{z}=2a$ أي $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$.
- $z-\overline{z}=2\imath b$ أي $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\imath}$.
- $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$.
- z حقيقي $\iff \overline{z}=z$.
- z تخيلي صرف $\iff z+\overline{z}=0$.

2.2.I خواص

z و z' عددان مركبان حيث $z=a+\imath b$ و $z'=a'+\imath b'$. لدينا :

مبرهنة 3 : 1. $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ و $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$.

2. $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

3. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$ (مع $z\neq 0$).

4. $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (مع $z'\neq 0$).

5. $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ لكل عدد صحيح $n\in\mathbb{Z}$.

البرهان. 1. لدينا :

$$\begin{aligned}\overline{z+z'}&=\overline{(a+\imath b)+(a'+\imath b')}=\overline{(a+a')+\imath(b+b')}\\&=(a+a')-\imath(b+b')=(a-\imath b)+(a'-\imath b')\\&=\overline{z}+\overline{z'}\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و

$$\begin{aligned}\overline{z-z'} &= \overline{(a+\imath b)-(a'+\imath b')} = \overline{(a-a')+\imath(b-b')}\\ &= (a-a')-\imath(b-b') = (a-\imath b)-(a'-\imath b')\\ &= \overline{z}-\overline{z'}\end{aligned}$$

• 2. لدينا من جهة :

$$\begin{aligned}\overline{z\cdot z'} &= \overline{(a+\imath b)(a'+\imath b')}\\ &= \overline{(aa'-bb')+\imath(ab'+a'b)}\\ &= (aa'-bb')-\imath(ab'+a'b)\end{aligned}$$

و من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\overline{z}\cdot\overline{z'} &= (a-\imath b)(a'-\imath b')\\ &= (aa'-bb')-\imath(ab'+a'b)\end{aligned}$$

• 3. لدينا : $\overline{z\times\frac{1}{z}}=\overline{1}$ أي $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}\times\overline{z}=1$ و منه $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

• 4. لدينا : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{\left(z\times\frac{1}{z'}\right)}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

• 5. في البداية نثبت صحتها لأجل $n\in\mathbb{N}$ بالتراجع :

- الخاصية صحيحة لأجل $n=0$ و $n=1$ (نضع إصطلاحًا $0^0=1$ و نذكّر أنّ : $u^0=1$ إذا كان $u\neq 0$).
- $\overline{(z^2)}=\overline{z\times z}=\overline{z}\times\overline{z}=(\overline{z})^2$ فالخاصية صحيحة لأجل $n=2$.
- نفرض الخاصية صحيحة لكل الأعداد الطبيعية الأصغر من n. لدينا (باستخدام خاصية مرافق جداء):

$$\overline{(z^n)}=\overline{z^{n-1}\times z}=\overline{(z^{n-1})}\times\overline{z}$$

لكن حسب فرضية التراجع $\overline{(z^{n-1})}=(\overline{z})^{n-1}$، منه

$$\overline{(z^n)}=\overline{(z^{n-1})}\times\overline{z}=(\overline{z})^{n-1}\times\overline{z}=(\overline{z})^n$$

و الآن، نثبت صحتها لأجل الأعداد الصحيحة السالبة :

ليكن $n\in\mathbb{Z}_-^*$. نضع $m=-n$. لدينا $m>0$ و :

$$\overline{(z^n)}=\overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)}=\overline{\left(\frac{1}{z^m}\right)}=\frac{1}{\overline{(z^m)}}=\frac{1}{(\overline{z})^m}=(\overline{z})^{-m}=(\overline{z})^n$$

■

أمثلة 3 :

• $\overline{(3-2\imath)}=3+2\imath$.

• $\overline{(3\imath)}=-3\imath$.

• $\overline{\left(\frac{1}{1+\imath}\right)}=\frac{1}{\overline{1+\imath}}=\frac{1}{1-\imath}=\frac{1+\imath}{1^2-\imath^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath$.

• $\overline{\left(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2-3\imath}\right)}=\frac{\overline{\left(1+\imath\sqrt{3}\right)}}{\overline{(2-3\imath)}}=\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2+3\imath}=\frac{\left(1-\imath\sqrt{3}\right)(2-3\imath)}{(2+3\imath)(2-3\imath)}=\cdots=\frac{2-3\sqrt{3}}{13}-\imath\frac{3+2\sqrt{3}}{13}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ما يمكن ملاحظته فيما يخص التعريف السابق للمرافق، هو أنّ العدد المركب يجب أن يكون على الشكل $z = a + \imath b$. في حالة العدد المركب λ الذي أخذناه كمثال لعبارة معقدة في الصفحة 4، يمكن أن نظنّ أنّ أمامنا إمكانيتين فقط لإيجاد مرافقه: إمّا أن نكتفي بكتابة

$$\overline{\lambda} = \overline{\left(\frac{\left(\frac{1-2\imath}{2-5\imath}\right)^{-2} - \left(\frac{1-\imath}{3+2\imath}\right)}{\left(\frac{2-\imath 5}{2\imath^8}\right)^2 + \left(\frac{-\imath}{3+2\imath}\right)^3}\right)^4}$$

أو أن نبحث عن جزئه الحقيقي و جزئه التخيلي، حيث نجد باستخدام نظام جبر الحاسوب[8] wxMaxima[9] :

```
(%i1)  ((((1-2*%i)/(2-5*%i))^(-2)-((1-%i)/(3+2*%i)))
       /(((2-%i*5)/(2*%i^8))^2+((-%i)/(3+2*%i))^3))^4;

                    ((2-5 i)^2/(1-2 i)^2 - (1-i)/(2 i+3))^4
(%o1)               ---------------------------------------
                     (i/(2 i+3)^3 + (2-5 i)^2/4)^4

(%i2)  rectform(%);

                  8489872778193931189527490560 i   25746126350756298490430481920
(%o2)             ------------------------------ - ------------------------------
                  7185835807781959059187890625     7185835807781959059187890625
```

شكل 1.I: حساب λ باستعمال wxMaxima.

$$\lambda = -\frac{25746126350756298490430481920}{7185835807781959059187890625} + \frac{8489872778193931189527490560}{7185835807781959059187890625}\imath$$

منه

$$\overline{\lambda} = -\frac{25746126350756298490430481920}{7185835807781959059187890625} - \frac{8489872778193931189527490560}{7185835807781959059187890625}\imath$$

لكن هناك إمكانية أخرى ...

نظرية 1 : لإيجاد مرافق عدد مركب مكتوب على صيغة تسلسل عمليات الجمع، الطرح، الضرب و القسمة، يكفي الإحتفاظ بنفس الصيغة مع تعويض العدد $\imath$ بالعدد $-\imath$ في كل مرّة.

البرهان. بما أننا نُجري العمليات في تسلسل، يكفي أن نثبت أننا نحصل على مرافق مجموع، فرق، حاصل ضرب و حاصل قسمة عددين مركبين بالتعويض عن $\imath$ بالعدد $-\imath$.
لكن بالتمعّن في إثبات المبرهنة 3، نجد أنّ هذا ما نقوم به بالتحديد! ■

أصبح الآن بإمكاننا إعطاء عبارة أخرى لمرافق العدد λ :

$$\overline{\lambda} = \left(\frac{\left(\frac{1+2\imath}{2+5\imath}\right)^{-2} - \left(\frac{1+\imath}{3-2\imath}\right)}{\left(\frac{2+\imath 5}{2(-\imath)^8}\right)^2 + \left(\frac{\imath}{3-2\imath}\right)^3}\right)^4$$

[8] CAS أو Computer Algebra System (بالإنجليزية) ؛ Logiciel de Calcul Formel (بالفرنسية).
[9] http://andrejv.github.com/wxmaxima/

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

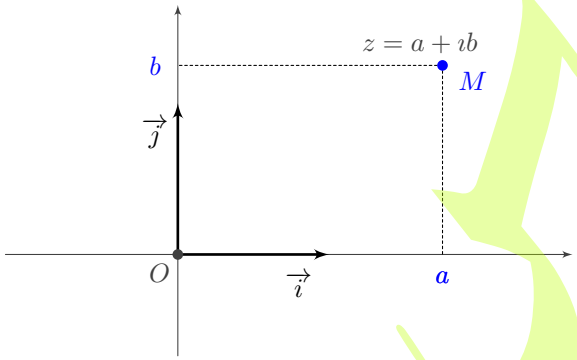
I

3.I التمثيل الهندسي لعدد مركب

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.3.I التمثيل النقطي

عند دراسة مجموعة الأعداد الحقيقية، قمنا بتمثيلها بمستقيم مدرّج بحيث كلّ نقطة من هذا المستقيم تقابل عددًا حقيقيًا.
و بما أنّ كلّ عدد مركب ما هو إلاّ زوج من الأعداد الحقيقية، و أنّ كلّ زوج من الأعداد الحقيقية يمثّل إحداثيَيْ نقطة في المستوي فبإمكاننا أن نرفق بكل عدد مركب z حيث $z=a+\imath b$ النقطة M ذات الإحداثيين (a,b).
نقول أننا مثلنا العدد المركب z بالنقطة M.
بتعبير أدقّ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$، النقطة M ذات الإحداثيين (a,b) تمثّل العدد المركب $z=a+\imath b$ (شكل I.2).



شكل I.2: المستوي المركب.

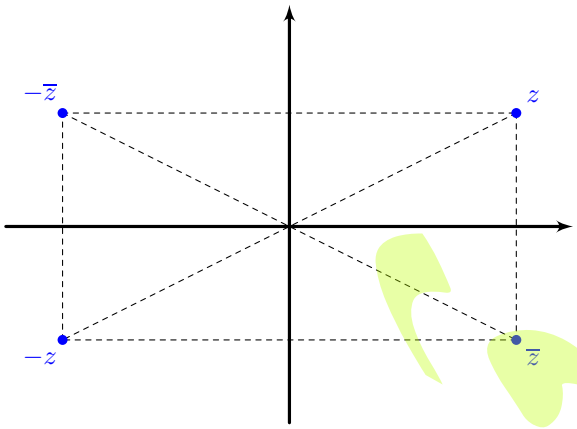
تعريف 4 : تسمى النقطة M **صورة** العدد المركب z و نكتب $M(z)$ ؛ و يسمى العدد المركب z **لاحقة** النقطة M.
صورة كل عدد حقيقي هي نقطة ذات الإحداثيين $(x,0)$ فهي نقطة من حامل محور الفواصل. يسمى هذا المحور **محور الأعداد الحقيقية**.
صورة كل عدد تخيلي صرف هي نقطة ذات الإحداثيين $(0,y)$ فهي نقطة من حامل محور التراتيب. يسمى هذا المحور **محور الأعداد التخيلية**.

و بالتالي، إذا كان العدد z لاحقة النقطة M فإنّ فاصلة M هي $\mathrm{Re}(z)$ و ترتيبة M هي $\mathrm{Im}(z)$.

أمثلة 4 :
- صورة العدد الحقيقي 1 هي النقطة $A(1,0)$.
- الوحدة التخيلية $\imath$ هي لاحقة النقطة $B(0,1)$.

ملاحظة 5 : غالبا ما نقول (تجاوزًا) «النقطة $z=a+\imath b$» بدلاً من «النقطة ذات اللاحقة $z=a+\imath b$» أي أننا نُطابق ما بين مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ و المستوي و نُطلق على هذا الأخير إسم **المستوي المركب** (شكل I.2).
بهذا التمثيل، تكون النقطة $\overline{z}$ نظيرة النقطة z بالنسبة لمحور الأعداد الحقيقية، و النقطة $-z$ نظيرة النقطة z بالنسبة للمبدأ O (شكل I.3).

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل I.3: التناظرات بالنسبة للمحاور و المبدأ.

I.3.2 التمثيل الشعاعي

بالمثل، يمكن أن نرفق بكل عدد مركب $z = a + \imath b$ الشعاع $\vec{V}$ الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
نقول أننا مثلنا العدد المركب z بالشعاع $\vec{V}$.

تعريف 5 : يسمى الشعاع $\vec{V}$ **صورة العدد المركب** z و يسمى العدد المركب z **لاحقة الشعاع** $\vec{V}$.

إذا كان z و z' عددين مركبين حيث $z = a + \imath b$ و $z' = a' + \imath b'$ ، و كان $\vec{V}$ و $\overrightarrow{V'}$ صورتيهما على الترتيب فإنّ :

$$z + z' = (a + a') + \imath (b + b')$$

و

$$z - z' = (a - a') + \imath (b - b')$$

أي أنّ صورة العدد المركب $z + z'$ هي الشعاع الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$ أي الشعاع $\vec{V} + \overrightarrow{V'}$
و صورة العدد المركب $z - z'$ هي الشعاع الذي مركبتاه $\begin{pmatrix} a - a' \\ b - b' \end{pmatrix}$ أي الشعاع $\vec{V} - \overrightarrow{V'}$.

مبرهنة 4 : إذا كان الشعاعان $\vec{V}$ و $\overrightarrow{V'}$ صورتي العددين المركبين z و z'، يكون الشعاع $\vec{V} + \overrightarrow{V'}$ صورة العدد المركب $z + z'$ و الشعاع $\vec{V} - \overrightarrow{V'}$ صورة العدد المركب $z - z'$.

مبرهنة 5 : ليكن $\vec{V}(v)$ و $\overrightarrow{W}(w)$ شعاعين غير معدومين.
يكون الشعاعان $\vec{V}$ و $\overrightarrow{W}$ مرتبطين خطيًا (متوازيين) إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im}(\overline{v} \cdot w) = 0$.

البرهان. الشعاعان $\vec{V}$ و $\overrightarrow{W}$ متوازيان إذا كان $\overrightarrow{W} = \lambda \vec{V}$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$ أي إذا كان $w = \lambda v$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$ ، و بما أنّ $v \neq 0$ فهذا يعني أنّ $\frac{w}{v} \in \mathbb{R}$ أي $\operatorname{Im}\left(\frac{w}{v}\right) = 0$ أي $v\overline{v} \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{w}{v}\right) = 0$ (ملاحظة 4 صفحة 7) أي $\operatorname{Im}\left(v\overline{v} \cdot \frac{w}{v}\right) = 0$ أي $\operatorname{Im}(\overline{v}w) = 0$. ■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

مثال 5 : المستقيم المار بالنقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$، مع $M_1 \neq M_2$ (أي $z_1 \neq z_2$)، هو مجموعة النقط M بحيث $\overrightarrow{M_1M} = t\overrightarrow{M_1M_2}$ مع t عدد حقيقي ؛ أي هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $z = tz_1 + (1-t)z_2$ مع $t \in \mathbb{R}$.

و كحالة خاصة، مجموعة نقط قطعة المستقيم الرابطة بين M_1 و M_2 هي التي تُحقق $0 \leq t \leq 1$ أي هي النقط M ذات اللاحقة z بحيث $z = tz_1 + (1-t)z_2$ مع $t \in [0,1]$.

كتطبيقات أولية، ندرج فيما يلي العلاقة بين بعض العمليات على الأعداد المركبة و بعض التحويلات البسيطة للمستوي.

أمثلة 6 :

• 1. ليكن $\vec{V}$ الشعاع الذي مركباته $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. **الإنسحاب** الذي شعاعه $\vec{V}$ يُحوّل النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(x+a, y+b)$ و بالتالي :

$$\text{لاحقة } \left(M'\right) = \text{لاحقة } \left(\vec{V}\right) + \text{لاحقة } \left(M'\right)$$

• 2. ليكن λ عددًا حقيقيًا. **التحاكي** الذي نسبته λ و مركزه O يُحوّل النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(\lambda x, \lambda y)$ منه :

$$\text{لاحقة } \left(M'\right) = \lambda \times \text{لاحقة } (M)$$

• 3. كحالة خاصة، **التناظر المركزي** بالنسبة إلى النقطة O ؛ و الذي هو في الحقيقة عبارة عن التحاكي الذي نسبته -1 ؛ يُحوّل النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(-x,-y)$ و بالتالي :

$$\text{لاحقة } \left(M'\right) = -\text{لاحقة } (M)$$

• 4. **التحاكي** الذي نسبته λ و مركزه A يُحوّل النقطة M إلى النقطة M' بحيث : $\overrightarrow{AM'} = \lambda\overrightarrow{AM}$ و بالتالي :

$$\text{لاحقة } \left(M'\right) - \text{لاحقة } (A) = \lambda \times \left(\text{لاحقة } (M) - \text{لاحقة } (A)\right)$$

• 5. **الدوران** الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يُحوّل الشعاع $\vec{i}$ إلى الشعاع $\vec{j}$ و يُحوّل الشعاع $\vec{j}$ إلى الشعاع $-\vec{i}$ ؛ و بالتالي يُحوّل النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(x',y')$ بحيث $x'\vec{i} + y'\vec{j} = x\vec{j} + y\left(-\vec{i}\right)$ أي $(x',y') = (-y,x)$ منه $x' + \imath y' = \imath(x + \imath y)$ و بالتالي :

$$\text{لاحقة } \left(M'\right) = \imath \times \text{لاحقة } (M)$$

• 6. **التناظر بالنسبة إلى محور الفواصل** يُحوّل النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(x,-y)$. إذا كان z لاحقة M و z' لاحقة M' فإنّ $z' = \overline{z}$.

التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب يُحوّل النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(-x,y)$ أي $z' = -\overline{z}$ (أنظر الشكل I.3).

• 7. لنبحث عن معادلة المستقيم (D) الذي يمرّ بالنقطة $M_0(x_0,y_0)$ و يوازي الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. لتكن ν لاحقة $\vec{V}$، z_0 لاحقة M_0 و z لاحقة M .

$M \in (D)$ إذا و فقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{M_0M}$ و $\vec{V}$ متوازيين أي إذا و فقط إذا وُجد $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{V}$.

حسب المبرهنة 5 صفحة 12 هذا يكافئ $\text{Im}\left(\overline{\nu}(z-z_0)\right) = 0$ أي (بعد النشر) : $b(x-x_0) - a(y-y_0) = 0$.

• 8. لنبحث عن معادلة المستقيم $\left(D'\right)$ الذي يمرّ بالنقطة $M_0(x_0,y_0)$ و يعامد الشعاع $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

الدوران الذي زاويته $\frac{\pi}{2}$ يضرب لاحقة الشعاع $\vec{V}$ بالعدد $\imath$ ، و باستخدام نفس ترميزات المثال السابق، نجد أنّ $M \in \left(D'\right)$ إذا و فقط إذا كان $\text{Im}\left(\overline{\imath\nu}(z-z_0)\right) = 0$ أي إذا و فقط إذا كان أي $\text{Re}\left(\overline{\nu}(z-z_0)\right) = 0$. بعد النشر، نجد المعادلة : $a(x-x_0) + (y-y_0) = 0$.

نلفت الإنتباه إلى النتيجة التالية : نعتبر الشعاعين $\vec{V}(z)$ و $\vec{V'}(z')$. لدينا :

$$\boxed{\vec{V} \perp \vec{V'} \iff \text{Re}\left(\overline{z}z'\right) = 0}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

في الباب **IV** صفحة 51 دراسة أشمل و أعمق لكل المفاهيم الهندسية المألوفة و التعبير عنها بالأعداد المركبة.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

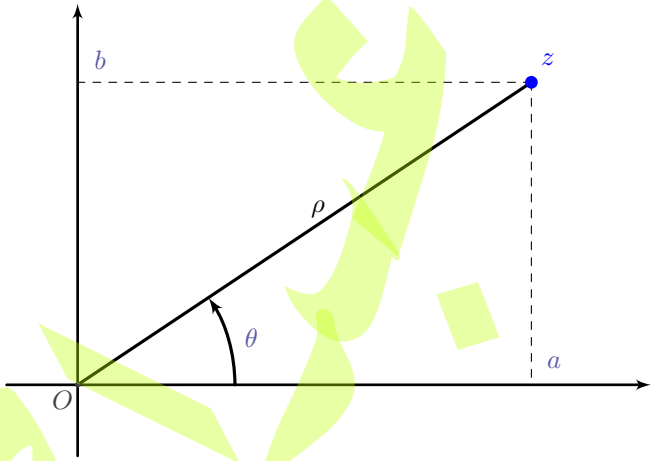
2 الشكل المثلثي لعدد مركب

فيما يلي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1.II طويلة عدد مركب

1.1.II تعريف

لتعليم النقط في المستوي المركب، نستعمل الإحداثيات الديكارتية أي الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي. لكن هناك طريقة أخرى للقيام بذلك و هذا باستخدام عددين ρ و θ، و الذين يمثلان **الإحداثيات القطبية** (شكل **1.II**).



شكل 1.II: الإحداثيات القطبية.

العدد ρ يمثل المسافة بين مبدأ المعلم 0 و النقطة z و هو **عدد حقيقي موجب**.

حسب نظرية فيثاغورث : $\rho^2 = a^2 + b^2$ أي $\rho = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$.

العدد θ هو الزاوية **الموجهة** بين محور الأعداد الحقيقية و المستقيم الرابط بين النقطتين 0 و z.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

تعريف 6 : z عدد مركب حيث $z = a + \imath b$.
نسمي **طويلة** العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{a^2 + b^2}$. نرمز إلى طويلة z بالرمز $|z|$.

إذا كانت النقطة M صورة العدد z فإنّ $\rho = OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.
و بالتالي، يمكن أن نكتب :

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + \imath\frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2}$$

مثال 7 : $|1 + \imath| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
من التعريف، نستنتج مباشرة الخواص التالية :

- $|\overline{z}| = |z|$ و $|-z| = |z|$
- إذا كان z حقيقيا فإنّ طويلته تساوي قيمته المطلقة.

2.1.II خواص

ليكن z و z' عددين مركبين حيث $z = a + \imath b$ و $z' = a' + \imath b'$. لدينا :

مبرهنة 6 :
- $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (مع $z \neq 0$).
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (مع $z' \neq 0$).
- $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.
- $\mathrm{Re}(\overline{z}z') \leq |z| \cdot |z'|$.
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ و نسمي هذه المتباينة (المتراجحة) **المتباينة المثلثية** أو **متباينة المثلث**.

البرهان.
- $|z| = 0 \iff \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0 \iff z = 0$.
- $z\overline{z} = (a + \imath b) \cdot (a - \imath b) = a^2 - (\imath b)^2 = a^2 + b^2$ أي $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.
- $|z \cdot z'| = \sqrt{(z \cdot z') \cdot \overline{(z \cdot z')}} = \sqrt{(z \cdot z') \cdot (\overline{z} \cdot \overline{z'})} = \sqrt{(z\overline{z}) \cdot (z'\,\overline{z'})} = \sqrt{z\overline{z}} \cdot \sqrt{z'\,\overline{z'}} = |z| \cdot |z'|$.
- $z \times \frac{1}{z} = 1 \implies \left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1 \implies |z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1 \implies \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

5• $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$.

6• ما يجب إثباته هو : $a \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

- إذا كان $a \leq 0$ فإنّ $a \leq 0 \leq \sqrt{a^2+b^2}$ و المتراجحة محققة ؛
- أمّا إذا كان $a > 0$ فتربيع طرفي المتراجحة نجد أنه علينا أن نثبت أنّ $a^2 \leq a^2+b^2$ أي $b^2 \geq 0$ و هذا محقق دومًا.

7• إذا كان $z = 0$ فالمتراجحة محققة. نفرض إذن أنّ $z \neq 0$. بقسمة طرفي المتراجحة على العدد الحقيقي الموجب تمامًا $z\bar{z}$ ينتج $\frac{1}{z\bar{z}}\operatorname{Re}(\bar{z}z') \leq \frac{|z|\cdot|z'|}{z\bar{z}}$.

لكن $\frac{1}{z\bar{z}}$ عدد حقيقي و بالتالي $\frac{1}{z\bar{z}}\operatorname{Re}(\bar{z}z') = \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}z'}{z\bar{z}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z'}{z}\right)$ (ملاحظة 4 صفحة 7) أي يجب أن نبرهن أنّ $\operatorname{Re}\left(\frac{z'}{z}\right) \leq \left|\frac{z'}{z}\right|$ أي $\operatorname{Re}(w) \leq |w|$ بوضع $w = \frac{z'}{z}$ و هو ما أثبتناه سابقاً.

8• ما يجب إثباته هو :

$$\sqrt{(a+a')^2+(b+b')^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a'^2+b'^2} \qquad (1)$$

و بما أنّ دالة الجذر التربيعي $\sqrt{\cdots}$ متزايدة، فالمتراجحة $x \leq y$ تكافئ $x^2 \leq y^2$ لكل عددين حقيقيين موجبين x و y.

بتربيع طرفي المتراجحة (1) و بعد التبسيط ، نجد أنه علينا إثبات أنّ المتراجحة :

$$aa'+bb' \leq \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right)}$$

صحيحة مهما تكن الأعداد الحقيقية a ، b ، a' و b'.

- إذا كان $aa'+bb' < 0$ فإنّ $aa'+bb' < 0 \leq \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right)}$ أي المتراجحة محققة !
- أمّا إذا كان $aa'+bb' \geq 0$، فبتربيع طرفي المتراجحة و التبسيط، تكون هذه الأخيرة مكافئة للمتراجحة $2aa'bb' \leq a^2b'^2+b^2a'^2$ أي $0 \leq (ab'-ba')^2$ و هذا صحيح دومًا.

■

ملاحظة 6 : ◁ من المعروف أنّ الخط المستقيم هو أقصر مسافة بين نقطتين، و المتباينة المثلثية تنص على أنّه في المثلث الذي رؤوسه 0، z و $z+z'$ ، الطريق المستقيم من 0 إلى $z+z'$ أقصر من الذي يمر بالنقطة z (شكل 2.II) و هذا ما يُبرِّر تسميتها بالمتباينة المثلثية.

▷

ملاحظة 7 : ◁ لدينا : $z \cdot z' = (aa'-bb')+\imath(ab'+ba')$ و بما أنّ $|z|\cdot|z'| = |zz'|$ فإنّ

$$\sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a'^2+b'^2} = \sqrt{(aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}$$

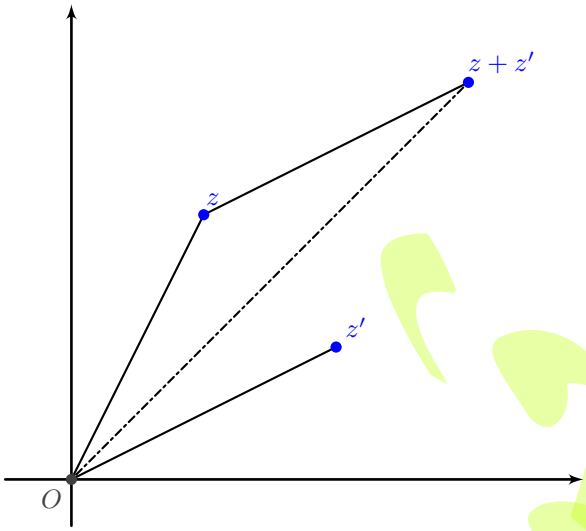
و بتربيع الطرفين

$$\boxed{\left(a^2+b^2\right)\left(a'^2+b'^2\right) = (aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2}$$

و هي متطابقة لها أهمية كبيرة في الرياضيات (مثلاً، إذا كانت الأعداد a ، b ، a' و b' طبيعية، فإنّ هذه المساواة تنص على أنّ جداء عددين يُكتبان على شكل مجموع مُربّعين تامَّين هو عدد يُكتب على شكل مجموع مُربّعين تامَّين).

أنظر التمرين 137 صفحة 206

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل 2.II: المتباينة المثلثية.

يمكن تعميم المتباينة المثلثية :

مبرهنة 7 : مهما تكن الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، ⋯ ، z_n فإنّ :
$$|z_1+z_2+\cdots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

البرهان. بالتراجع على العدد الطبيعي $n \geq 2$ و نترك ذلك للقارئ الكريم. ■

بتطبيق المتباينة المثلثية على العددين z_2 و z_1-z_2 ينتج $|z_2+(z_1-z_2)| \leq |z_2|+|z_1-z_2|$ أي $|z_1| \leq |z_2|+|z_1-z_2|$ منه $|z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$. بالمثل مع العددين z_1 و z_2-z_1 لنجد $|z_2|-|z_1| \leq |z_2-z_1|$. لكن $|z_2-z_1|=|z_1-z_2|$ إذن $|z_2|-|z_1| \leq |z_1-z_2|$.

في الأخير، لدينا $|z_1|-|z_2| \leq |z_1-z_2|$ و $(|z_1|-|z_2|) \leq |z_1-z_2|$ – و هذا يعني أنّ $\boxed{\big||z_1|-|z_2|\big| \leq |z_1-z_2|}$ و هي **المتباينة المثلثية الثانية** .

2.II عمدة عدد مركب غير معدوم

1.2.II تعريف

تعريف 7 : ليكن z عددًا مركبًا غير معدوم و M صورته.
نسمي **عُمدةً** للعدد المركب z كلّ قيس للزاوية $\theta = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ و نكتب $\theta = \arg(z)$.

من الشكل 1.II نستنتج أنّ عمدة العدد المركب z هو كل عدد يُحقق
$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

في آن واحد ؛ و هذا يعني أنه إذا كان θ عمدةً للعدد z فإنّ كل عدد من الشكل $\theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ هو أيضا عمدة له و أنّ الأعداد $\theta + 2k\pi$ هي الوحيدة التي تتمتع بهذه الخاصية، و لتأكيد ذلك نكتب

$$\arg(z) = \theta \ (\text{mod } 2\pi)$$

و نقرأ : «عمدة z تساوي θ بتردد 2π».

مثال 8 : ليكن θ عمدة للعدد المركب $\imath$. لدينا :

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2}} = 1 \qquad \text{و} \qquad \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{0^2+1^2}} = 0$$

أي

$$\arg(\imath) = \frac{\pi}{2} \ (\text{mod } 2\pi)$$

و هذه الكتابة الأخيرة تعني أنّ كل عنصر من المجموعة (غير المنتهية)

$$\left\{\ldots, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\right\}$$

هو عمدة للوحدة التخيلية $\imath$.

ملاحظة 8 : ◁

- العدد θ هو زاوية الدوران الذي يُحوِّل محور الأعداد الحقيقية إلى المستقيم (OM) المُوَجّه من O إلى M.
- صورة العدد المركب 0 هي المبدأ O و بما أنّ الزاوية $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OO}\right)$ غير معرفة فإنّ العدد المركب المعدوم لا عمدة له.
- بما أنّ صورتي العددين z و $\bar{z}$ متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل فإنّ :

$$\boxed{\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

▷

بعض الحالات الخاصة المهمة : الأعداد المركبة التي 0 ($(\text{mod } 2\pi)$) عمدة لها هي الأعداد الحقيقية الموجبة تمامًا.
الأعداد المركبة التي π ($(\text{mod } 2\pi)$) عمدة لها هي الأعداد الحقيقية السالبة تمامًا.
الأعداد المركبة التي $\frac{\pi}{2}$ ($(\text{mod } 2\pi)$) عمدة لها هي عناصر المجموعة $\imath\mathbb{R}_+^*$.
الأعداد المركبة التي $-\frac{\pi}{2}$ ($(\text{mod } 2\pi)$) عمدة لها هي عناصر المجموعة $\imath\mathbb{R}_-^*$.

2.2.II الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم

ليكن z عددًا مركبًا غير معدوم شكله الجبري $z = a + \imath b$.لتكن M صورة z و θ عمدة له.
لدينا (أنظر الشكل II.1) :

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{\rho} \qquad \text{و} \qquad \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\rho}$$

مع $\rho = |z|$ ؛ أي

$$b = \rho\sin\theta \qquad \text{و} \qquad a = \rho\cos\theta$$

تُعيِّن هتان المساوتان العددين a و b بدلالة ρ و θ بصفة وحيدة أي

يكون عدد مركب z مُعيَّنًا إذا أُعطيت طويلته ρ و عمدة له θ.

من العبارتين السابقتين للعددين a و b ، نستنتج الكتابة التالية للعدد z : $z = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

تعريف 8 : تسمى الكتابة
$$z = \rho\,(\cos\theta + \imath \sin\theta)$$
الشكل المثلثي للعدد المركب (غير المعدوم) z و نكتب $z = [\rho, \theta]$.

مثال 9 : ليكن z العدد المركب $z = 1 + \imath$. لدينا $|z| = \sqrt{2}$ و إذا كان θ عمدة له فإنّ
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
منه $\theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ أي أنّ الشكل المثلثي للعدد $1 + \imath$ هو
$$1 + \imath = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath \sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

ملاحظة 9 :
- ⛔ إذا كُتب العدد المركب z على الشكل $\rho\,(\cos\theta + \imath\sin\theta)$ فهذا لا يعني بالضرورة أنه في شكله المثلثي ، فالعدد الحقيقي ρ يجب أن يكون موجبا (أنظر المبرهنة 8).
- إذا كان z و z' عددين مركبين حيث $z = [\rho, \theta]$ و $z' = \left[\rho', \theta'\right]$ فإنّ
$$z = z' \iff \rho = \rho' \text{ و } \theta' = \theta + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

مبرهنة 8 : ليكن العدد المركب $z = r\,(\cos t + \imath \sin t)$ مع r و t عددان حقيقيان، و $r \neq 0$. لدينا :
- إذا كان $r > 0$ فإنّ $|z| = r$ و $\arg(z) = t \pmod{2\pi}$.
- إذا كان $r < 0$ فإنّ $|z| = -r$ و $\arg(z) = t + \pi \pmod{2\pi}$.

البرهان. لدينا $|z|^2 = (r\cos t)^2 + (r\sin t)^2 = r^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r^2$ منه $|z| = |r|$ (القيمة المطلقة للعدد الحقيقي r).
إذا كان θ عمدة للعدد المركب z فإنّ $z = |r|\,(\cos\theta + \imath\sin\theta) = r\,(\cos t + \imath \sin t)$:
- إذا كان $r > 0$ فإنّ $\cos\theta = \cos t$ و $\sin\theta = \sin t$ أي $\theta = t \pmod{2\pi}$.
- إذا كان $r < 0$ فإنّ $z = -r\,(-\cos t - \imath\sin t)$ مع $-r > 0$ منه $\cos\theta = -\cos t$ و $\sin\theta = -\sin t$ أي $\theta = t + \pi \pmod{2\pi}$.

■

3.2.II الإنتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي و العكس

عند النظر إلى الصيغة المثلثية لعدد مركب نجد أنّها معقدة مقارنةً بالصيغة الجبرية لأنها تحتوي على الجذر التربيعي (في الطويلة) و الدوال المثلثية (في العمدة)، لكن في الحقيقة الأمر الوحيد المعقّد نوعًا ما هو الإنتقال من إحدى الصيغتين إلى الأخرى و كلاً منهما لها فوائدها : فالصيغة الجبرية أكثر ملاءمة للجمع و الطرح (أنظر الصيغتين (1) و (2) صفحة 4)، أمّا الصيغة المثلثية فهي ملائمة للضرب و القسمة كما سيأتي (فقرة 3.II).

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا أُعطي عدد مركب z على شكله المثلثي فإنّ المساوتين
$\boxed{b = \rho \sin\theta}$ و $\boxed{a = \rho \cos\theta}$
تُعيِّنان a و b و بالتالي الشكل الجبري للعدد z.

- إذا أُعطي عدد مركب z على شكله الجبري فإنّ المساواة $\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$ تُعيِّن العدد ρ ،
و المساوتين $\boxed{\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ و $\boxed{\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ تُعيِّنان العدد θ ،
و بالتالي يتم تعيين الشكل المثلثي للعدد z .

مثال 10 : ليكن j العدد المركب $j = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$.
لدينا

$$|j| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

و إذا كان θ عمدةً له فإنّ $\cos\theta = \dfrac{\frac{-1}{2}}{1} = \dfrac{-1}{2}$ و $\sin\theta = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\theta = \dfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$.
و منه الشكل المثلثي للعدد j :

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + \imath \sin\frac{2\pi}{3} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$$

3.II الأعداد المركبة المكتوبة على الشكل المثلثي

1.3.II حاصل ضرب عددين مركبين

إذا كان أحد العددين المركبين z_1 و z_2 معدومًا فإنّ : $z_1 z_2 = 0$.
فيما يلي نفرض أنّ العددين z_1 و z_2 غير معدومين.

مبرهنة 9 : ليكن z_1 و z_2 عددين مركبين غير معدومين حيث $z_1 = [\rho_1, \theta_1]$ و $z_2 = [\rho_2, \theta_2]$. لدينا :
$$z_1 \cdot z_2 = [z_1 z_2, \theta_1 + \theta_2]$$
و بتعبير آخر
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi} \quad \text{و} \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

البرهان. نضع $z_1 z_2 = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$.
لدينا $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + \imath\sin\theta_1)$ و $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + \imath\sin\theta_2)$ منه

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \left[\rho_1(\cos\theta_1 + \imath\sin\theta_1)\right] \cdot \left[\rho_2(\cos\theta_2 + \imath\sin\theta_2)\right] \\ &= \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \imath(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + \imath\sin(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned}$$

و بما أن $\rho_1 > 0, \rho_2 > 0$ فإنّ $\rho_1\rho_2 > 0$ و بتطبيق المبرهنة 8 ينتج $\rho = \rho_1\rho_2$ و $\theta = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$. ■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مثال 11 : رأينا في المثال 9 أنّ $1+\imath=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ و في المثال 10 أنّ $\mathrm{j}=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$ ، منه

$$(1+\imath)\times \mathrm{j}=\left[\sqrt{2}\times 1,\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right]=\left[\sqrt{2},\frac{11\pi}{12}\right]$$

لكن من جهة

$$(1+\imath)\times \mathrm{j}=(1+\imath)\left(-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\imath$$

و من جهة أخرى (للتأكد)

$$|(1+\imath)\times \mathrm{j}|=\sqrt{\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$$

منه

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \quad \text{و} \quad \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

ملاحظة 10 : ◁ بما أنّ $\frac{\pi}{12}=\pi-\frac{11\pi}{12}$ فإنّ [1] :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \quad \text{و} \quad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

▷

ملاحظة 11 : لنُعطِ القيمة $\frac{\pi}{12}$ للعدد α في المتطابقة $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos\alpha}{2}$:

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

و بما أنّ $\cos\frac{\pi}{12}>0$ (لأنّ $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$) فإنّ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

هل هذا تناقض؟ الجواب : لا . . . لأنّ

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{2+6+2\sqrt{12}}}{4}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

و بنفس الطريقة نثبت أنّ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

يمكن تعميم نتيجة المبرهنة 9 إلى $n\geq 2$ عدداً من الأعداد المركبة :

مبرهنة 10 : لتكن z_1 ، z_2 ، ⋯ ، z_n أعدادًا مركبة غير معدومة بحيث $z_1=[\rho_1,\theta_1]$ ، $z_2=[\rho_2,\theta_2]$ ، ⋯ ، $z_n=[\rho_n,\theta_n]$. لدينا :

$$z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n=[z_1z_2\cdots z_n,\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n]$$

و بتعبير آخر

$$|z_1z_2\cdots z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cdots\cdot|z_n| \quad \text{و} \quad \arg(z_1z_2\cdots z_n)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+\cdots+\arg(z_n)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

[1] نُذكّر أنّ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ و $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

البرهان. بالتراجع على العدد الطبيعي n :

- $n = 2$: و هو نص المبرهنة 9 .
- إذا كانت النتيجة صحيحة لكل عدد طبيعي أصغر من n فإنّ :

$$\begin{aligned}|z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n| &= |(z_1 z_2 \cdots z_{n-1}) \cdot z_n| \\ &= |(z_1 z_2 \cdots z_{n-1})| \cdot |z_n| && \text{(حسب المبرهنة 9)} \\ &= (|z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_{n-1}|) \cdot |z_n| && \text{(بتطبيق فرضية التراجع)} \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \cdots \cdot |z_{n-1}| \cdot |z_n|\end{aligned}$$

بالمثل :

$$\begin{aligned}\arg(z_1 z_2 \cdots z_{n-1} z_n) &= \arg\left(\left(z_1 z_2 \cdots z_{n-1}\right) \cdot z_n\right) \\ &= \arg(z_1 z_2 \cdots z_{n-1}) + \arg(z_n) \pmod{2\pi} \\ &\qquad \text{(حسب المبرهنة 9)} \\ &= \left(\arg(z_1) + \arg(z_2) + \cdots \cdot \arg(z_{n-1}) \pmod{2\pi}\right) + \arg(z_n) \pmod{2\pi} \\ &\qquad \text{(بتطبيق فرضية التراجع)} \\ &= \arg(z_1) + \arg(z_2) + \cdots + \arg(z_{n-1}) + \arg(z_n) \pmod{2\pi}\end{aligned}$$

■

حالة خاصة : إذا كان $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = [\rho, \theta]$ فإنّ $z^n = [\rho^n, n\theta]$

أي

$$\boxed{\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}} \quad \text{و} \quad \boxed{|z^n| = |z|^n}$$

2.3.II حاصل قسمة عددين مركبين غير معدومين

إذا كان العدد المركب z_1 معدومًا و كان $z_2 \neq 0$ فإنّ : $\frac{z_1}{z_2} = 0$.

فيما يلي نفرض أنّ العددين z_1 و z_2 غير معدومين.

مبرهنة 11 : ليكن z_1 و z_2 عددين مركبين غير معدومين حيث $z_1 = [\rho_1, \theta_1]$ و $z_2 = [\rho_2, \theta_2]$. لدينا :

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$$

و بتعبير آخر

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

البرهان. نضع $\frac{z_1}{z_2} = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + \imath \sin\theta)$.

لدينا $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + \imath \sin\theta_1)$ و $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + \imath \sin\theta_2)$ منه

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1\left(\cos\theta_1 + \imath\sin\theta_1\right)}{\rho_2\left(\cos\theta_2 + \imath\sin\theta_2\right)}\\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\left(\cos\theta_1 + \imath\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 - \imath\sin\theta_2\right)}{\left(\cos\theta_2 + \imath\sin\theta_2\right)\left(\cos\theta_2 - \imath\sin\theta_2\right)}\\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\left(\cos\theta_1 + \imath\sin\theta_1\right)\left(\cos\left(-\theta_2\right) + \imath\sin\left(-\theta_2\right)\right)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \imath\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right) \qquad \text{(حسب المبرهنة 9)}\end{aligned}$$

و بما أنّ $\frac{\rho_1}{\rho_2} > 0$ فحسب المبرهنة 8 صفحة 20 :

$$\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad \text{و} \qquad \theta = \theta_1 - \theta_2 \pmod{2\pi}$$

■

حالة خاصة : إذا كان $z_1 = 1 = [1\ ,\ 0]$ و $z = [\rho\ ,\ \theta]$ فإنّ $z_2 = z$:

$$\boxed{\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}\ ,\ -\theta\right]}$$

و بتعبير آخر

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi} \qquad \text{و} \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

و باتّباع نفس طريقة إثبات المبرهنة 10 ، نُبرهن بسهولة (بالتراجع) أنّه إذا كان $z = [\rho\ ,\ \theta]$ فإنّ :

$$\boxed{\left(\frac{1}{z}\right)^n = \left[\frac{1}{\rho^n}\ ,\ -n\theta\right]}$$

مثال 12 : ليكن $z_1 = \imath$ و $z_2 = -\sqrt{3} - \imath$.

لدينا $z_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2}\right)$ و $z_2 = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right) = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + \imath\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$

منه

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{1}{2}$$

و

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{5\pi}{6}\right) \pmod{2\pi} = \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$$

أي

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + \imath\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \imath\frac{\sqrt{3}}{4}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

4.II دستور موافر

ليكن z عددًا مركبًا طويلته 1 و θ عمدة له : $z = [1\ ,\ \theta]$.
ليكن n عددًا طبيعيًا . حسب المبرهنة 10 (الحالة الخاصة) :

$$z^n = \left[1^n\ ,\ n\theta\right] = [1\ ,\ n\theta]$$

بمعنى

$$\left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)$$

و إذا كان n عددًا صحيحًا سالبًا تمامًا فإنّ $z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n}$ و بوضع $n' = -n$ يكون $n' > 0$ و

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{n'} = \left[\left(\frac{1}{1}\right)^{n'}\ ,\ -n'\theta\right] = [1\ ,\ n\theta]$$

(إستعملنا الحالة الخاصة للمبرهنة 11). منه

$$\left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)$$

إذن :

مبرهنة 12 :

$$\forall n \in \mathbb{Z} :\ \left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)$$

يمكن إعطاء إثبات آخر لهذه المبرهنة و ذلك باستعمال البرهان بالتراجع :

$$z^0 = 1 = \cos 0 + \imath\sin 0 = \cos(0\times\theta) + \imath\sin(0\times\theta)$$
$$z^1 = z = \cos\theta + \imath\sin\theta = \cos(1\times\theta) + \imath\sin(1\times\theta)$$
$$z^2 = \left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right)^2 = \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2\imath\cos\theta\sin\theta = \cos(2\theta) + \imath\sin(2\theta)$$

- فالخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ ، $n = 1$ و $n = 2$.
- نفرض أنّ الخاصية صحيحة لكل عدد طبيعي أصغر من أو يساوي n . لدينا :

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n \cdot z = (\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta))(\cos\theta + \imath\sin\theta) \\ &= (\cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta) + \imath(\cos(n\theta)\sin\theta + \sin(n\theta)\cos\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + \imath\sin((n+1)\theta) \end{aligned}$$

أي أنّ الخاصية صحيحة لكل عدد طبيعي n .

- لنبرهن أنّ هذه النتيجة تبقى صحيحة إذا كان n سالبًا :
نضع $n' = -n$ و من أجل كل عدد طبيعي $n' > 0$:

$$\begin{aligned} z^n = \left(\cos\theta + \imath\sin\theta\right)^n &= \left(\frac{1}{\cos\theta + \imath\sin\theta}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\cos\theta + \imath\sin\theta}\right)^{n'} \\ &= (\cos(-\theta) + \imath\sin(-\theta))^{n'} \\ &= \cos(-n'\theta) + \imath\sin(-n'\theta) \\ &= \cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta) \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

■

مثال 13 : من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{1}{2}$ منه :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right)^3 = \cos(3\theta) + \imath\sin(3\theta) = \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) + \imath\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2} = \imath$$

II.5 الجذور النونية لعدد مركب

ليكن w عددًا مركبًا و n عددًا طبيعيًا حيث $n > 1$.

تعريف 9 : نسمي **جِذرًا نُونِيًا** [2] للعدد w كل عدد مركب z يحقق $z^n = w$.

مثال 14 : في المثال 13 السابق وجدنا أنّ

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right)^3 = \imath$$

أي $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath$ جذر تكعيبي للوحدة التخيلية $w = \imath$.

- نعلم أنّ المعادلة $z^n = 0$ تقبل حلاً وحيدًا $z = 0$ ، إذن العدد 0 يقبل جذرًا نونيًا وحيدًا هو نفسه.
- ليكن w عددًا مركبًا غير معدوم طويلته r و α عمدة له.

لنبحث عن الأعداد المركبة z التي تحقق $z^n = w$. نضع $z = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$ حيث $\rho > 0$. لدينا :

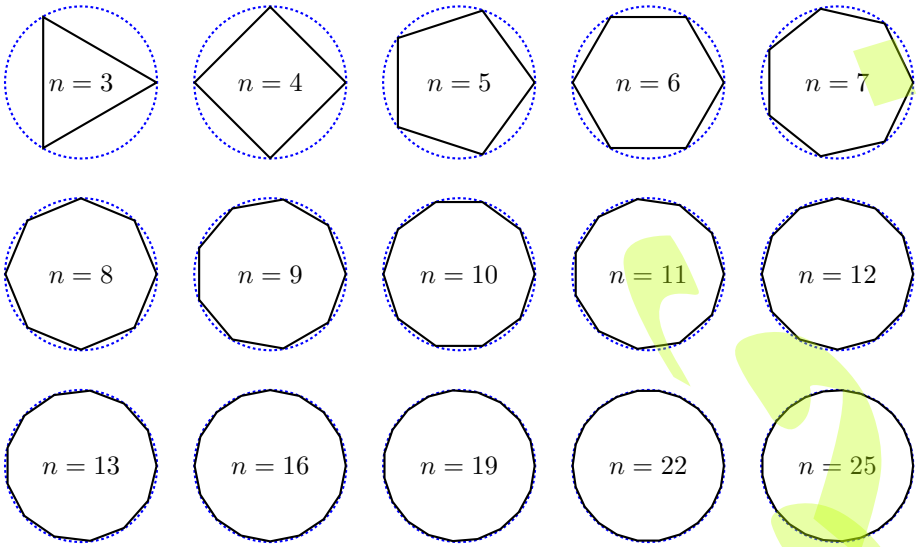
$$\begin{aligned}
z^n = w &\iff \rho^n(\cos\theta + \imath\sin\theta)^n = w \\
&\iff \rho^n(\cos(n\theta) + \imath\sin(n\theta)) = w = r(\cos\alpha + \imath\sin\alpha) \\
&\iff \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

نعلم أنه إذا كان k عددا صحيحا فإنه يُكتب على الشكل $k = nq + s$ حيث $0 \leq s < n$ و $q \in \mathbb{Z}$ (القسمة الإقليدية)، أي أنه يُكتب على أحدالأشكال التالية : $nq, nq+1, nq+2, \cdots, nq+(n-1)$.

- من أجل $k = nq$ يكون $\theta = \frac{\alpha}{n} + 2q\pi$.
- من أجل $k = nq+1$ يكون $\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2q\pi$.
- ⋮
- من أجل $k = nq+(n-1)$ يكون $\theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} + 2q\pi$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 3.II

إذن العدد w يقبل n جذرا نونيا و هي الأعداد z_s حيث $s \in \{0, 1, \cdot, n-1\}$ و :

$$z_s = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2s\pi}{n}\right)+\imath\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2s\pi}{n}\right)\right]$$

كل عدد مركب غير معدوم يقبل n جذرا نونيا

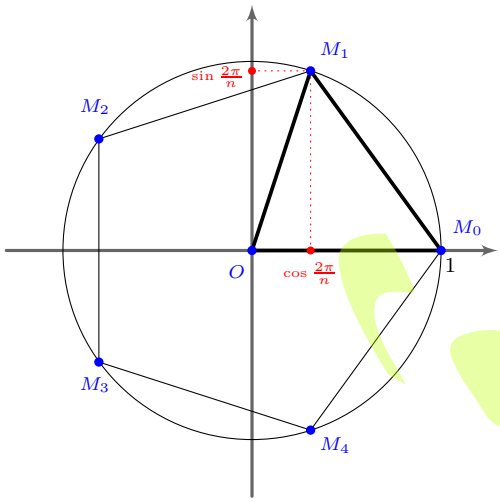
- بما أنّ الجذور النونية لها نفس الطويلة $\sqrt[n]{r}$ فهي تقع على دائرة [3] نصف قطرها $\sqrt[n]{r}$ و مركزها O ، و بما أنّ الفرق بين عمدتي جذرين متتابعين z_m و z_{m+1} يساوي $\frac{2\pi}{n}$ فإنّ هذه الجذور موزعة بصفة منتظمة على هذه الدائرة أي أنّ المسافة بين جذرين متتاليين يساوي عددًا ثابتا :

إذا مثلنا هذه الجذور في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ فإنّ صورها تُشكّل مضلّعًا منتظمًا مرسومًا على دائرة مركزها المبدأ O و نصف قطرها $\sqrt[n]{r}$.

تطبيق 1 : ليكن $n \geq 3$ عدداً طبيعيًا. نضع $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n}\right]$ و نعتبر النقط M_k التي لواحقها الأعداد z_k لأجل $0 \leq k \leq n-1$. نعلم أنّ النقط M_0 ، M_1 ، ، M_{n-1} هي رؤوس مضلّع منتظم مرسوم داخل الدائرة المثلثية. أوجد محيط هذا المضلع المنتظم و مساحة الحيّز المستوي الذي يحدده ثمّ أوجد نهاية كلاًّ من هذا المحيط و هذه المساحة عندما $n \to +\infty$.

[3] لأنّ $|z_s - 0| = \sqrt[n]{r}$ و سنرى في الباب الرابع أنّ هذا يعني أنّ النقط التي لواحقها z_s تقع على الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\sqrt[n]{r}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل II.4

الحلّ. لدينا : $z_k = z_1^k$ و بالتالي طول ضلع هذا المضلع هو :

$$M_kM_{k+1} = |z_{k+1} - z_k| = |z_1^{k+1} - z_1^k| = |z_1^k(z_1 - 1)| = |z_1^k| \cdot |z_1 - 1| = \underbrace{|z_1|^k}_{=1} \cdot |z_1 - 1|$$

$$= \left|\cos\frac{2\pi}{n} + \imath\sin\frac{2\pi}{n} - 1\right| = \sqrt{\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{n}} = \left|2\sin\frac{\pi}{n}\right|$$

لكن $0 < \frac{\pi}{n} < \pi$ إذن $\sin\frac{\pi}{n} \geq 0$ و بالتالي $M_kM_{k+1} = 2\sin\frac{\pi}{n}$ و بما أنّ كلّ الأضلاع متقايسة (المضلع منتظم !) فإنّ طول كلّ منها هو M_kM_{k+1} ، و بما أنّ عدد الأضلاع هو n فإنّ محيط هذا المضلع هو $2n\sin\frac{\pi}{n}$. و لدينا النهاية التالية :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n\sin\frac{\pi}{n} = 2\pi \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi \times 1 = 2\pi$$

و هو محيط الدائرة المثلثية و هي نتيجة يمكن توقعها كما يبين ذلك الشكل II.3 .

من جهة أخرى، كل المثلثات OM_kM_{k+1} متقايسة (لأنّ لها ثلاثة أضلاع متقايسة) و بالتالي لديها نفس المساحة.

نحسب مساحة المثلث OM_0M_1 بأخذ القاعدة OM_0 (التي طولها 1) و الإرتفاع المتعلق بالرأس M_1 (الذي طوله هو $\sin\frac{2\pi}{n}$ أي ترتيبة M_1) فتكون مساحة هذا المثلث تساوي $\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ (شكل II.4) و بالتالي فإنّ مساحة الحيّز المستوي الواقع داخل هذا المضلع تساوي $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. و لدينا النهاية التالية :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} = \pi \times \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi \times 1 = \pi$$

و هي مساحة قرص الوحدة ؛ نتيجة مُتَوَقّعة أيضا (شكل II.3) . ■

مثال 15 : الجذور التكعيبية للعدد $\imath$ هي الأعداد المركبة

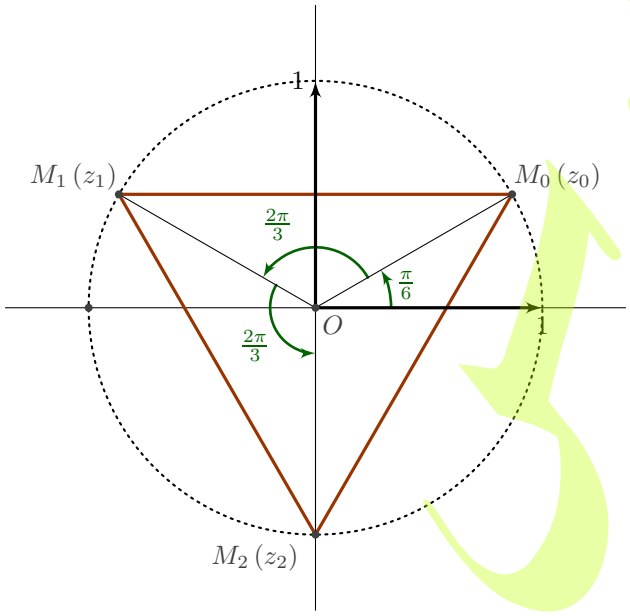
$$z_s = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2s\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2s\pi}{3}\right)\right]$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

حيث $0 \leq s < 3$ أي هي الأعداد الثلاثة :

$$z_0 = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + \imath \sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath$$
$$z_1 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + \imath \sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath$$
$$z_2 = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + \imath \sin\frac{3\pi}{2} = -\imath$$

صور هذه الجذور هي رؤوس مثلث متقايس الأضلاع مرسوم داخل الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 (شكل **II**.5).



شكل II.5: الجذور التكعيبية للوحدة التخيلية $\imath$.

تطبيق 2 : ما هو عدد الأزواج المُرتّبة (a, b) من الأعداد الحقيقية التي تحقق $(a + \imath b)^{2012} = a - \imath b$ ؟

الحلّ. ليكن $z = a + \imath b$. لدينا $\bar{z} = a - \imath b$ و $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. المساواة المعطاة تُصبح $z^{2012} = \bar{z}$ ، و بما أنّ

$$|z|^{2012} = |z^{2012}| = |\bar{z}| = |z| \ ,$$

فإنّ

$$|z|\left(|z|^{2011} - 1\right) = 0$$

منه نستنتج أنّ $|z| = 0$ أو $|z| = 1$ أي $z = 0$ أو $|z|^{2011} = 1$ ($|z|$ عدد حقيقي، و العدد الحقيقي الوحيد الذي يُحقّق $x^{2011} = 1$ هو $x = 1$).

- $z = 0$ أي $(a, b) = (0, 0)$.
- في الحالة $|z| = 1$ لدينا :

$$z^{2012} = \bar{z} \iff z \times z^{2012} = z \times \bar{z} \iff z^{2013} = |z|^2 = 1$$

و بما أنّ المعادلة $z^{2013} = 1$ تقبل 2013 حلاً (في $\mathbb{C}$) فإنّه يوجد 2013 زوج مرتّب (a, b) بحيث $a^2 + b^2 = 1$ و $(a + \imath b)^{2012} = a - \imath b$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

في الأخير، عدد الأزواج المرتبة (a,b) من الأعداد الحقيقية و التي تحقّق $(a+\imath b)^{2012} = a-\imath b$ هو $2013+1=2014$

■

6.II الجذور النونية للوحدة

إذا كان $w=1$ فإنّنا نحصل على الجذور النونية للعدد 1.

تعريف 10 : حلول المعادلة $z^n=1$ تسمى **الجذور النونية للوحدة**[4] (أو العدد 1).

مما سبق نستخلص أنّ العدد 1 يقبل n جذرًا نونيًا تُعطى بالعبارة

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \imath\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$$

بمعنى

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \cos 0 + \imath\sin 0 = 1;\\
\omega_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + \imath\sin\frac{2\pi}{n} = \omega;\\
\omega_2 &= \cos\frac{4\pi}{n} + \imath\sin\frac{4\pi}{n} = \omega^2;\\
&\vdots\\
\omega_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \imath\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = \omega^{n-1};
\end{aligned}$$

و نكتب $U_n = \{1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}\}$.

نلاحظ أنّ عناصر U_n هي قوى للعدد ω ($1=\omega^0$) : نقول أنّ العدد ω **مُوَلِّد** (أو يُولّد) المجموعة U_n .

و حسب ما سبق، فإنّ صور الجذور النونية للوحدة تُشكّل مضلّعًا منتظمًا تقع رؤوسه على الدائرة التي مركزها المبدأ O و نصف قطرها 1 .

فيما يلي دراسة لبعض الحالات الخاصة :

- من أجل $n=2$ ، للمعادلة $z^2=1$ جذران : -1 و 1 ، و هما الجذران التربيعيان للوحدة.
- من أجل $n=3$ ، الجذور التكعيبية للوحدة (أي حلول المعادلة $z^3=1$) تُعطى بالعبارة

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + \imath\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad k\in\{0,1,2\}$$

أي

$$\omega_0 = 1\,,\ \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \imath\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2} = j\,,\ \omega_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + \imath\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$$

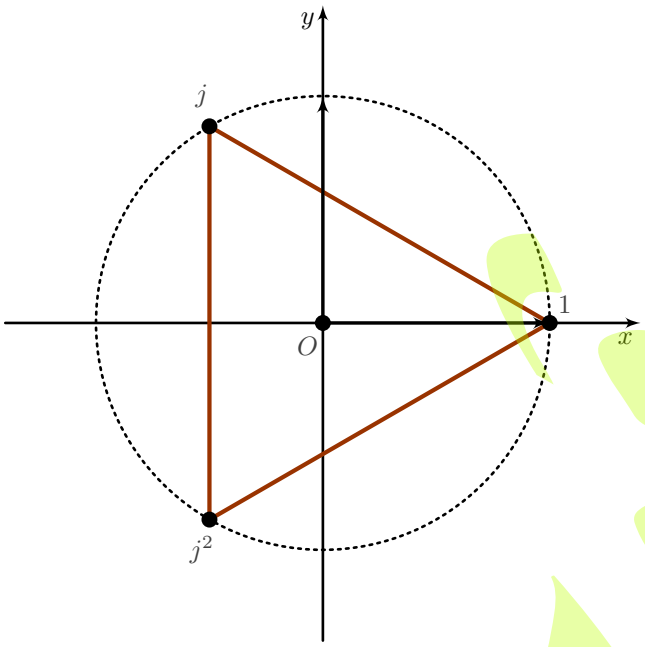
و هي تُشكّل مثلثا متقايس الأضلاع تقع رؤوسه على الدائرة $\mathscr{C}(0,1)$ (شكل **6.II**) .

- من أجل $n=4$ ، الجذور الرابعة للعدد 1 هي

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + \imath\sin\frac{2k\pi}{4}, \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل II.6: الجذور التكعيبية للوحدة.

أو

$$\omega_0 = \cos 0 + \imath \sin 0 = 1\ ,\ \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + \imath \sin\frac{2\pi}{4} = \imath$$

$$\omega_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + \imath \sin\frac{4\pi}{4} = -1\ ,\ \omega_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + \imath \sin\frac{6\pi}{4} = -\imath$$

أي أنّ $\mathbb{U}_4 = \{1, \imath, \imath^2, \imath^3\} = \{1, \imath, -1, -\imath\}$ و صور هذه الجذور هي رؤوس مربع مرسوم على الدائرة $\mathscr{C}(0,1)$ (شكل II.7).

لدينا إذن : $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ ، $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$ ، $\mathbb{U}_3 = \left\{1, j, j^2\right\}$ ، $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -\imath, \imath\}$.

مبرهنة 13 : ليكن z عددًا مركبًا و لتكن ℓ ، m ، n و d أعدادًا طبيعيةً أكبر من أو تساوي 2 . لدينا :

- 1 إذا كان $n|\ell$ فإنّ أي حلّ للمعادلة $z^n = 1$ هو حلّ للمعادلة $z^\ell = 1$ أي $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_\ell$.
- 2 الحلول المشتركة للمعادلتين $z^m = 1$ و $z^n = 1$ هي حلول المعادلة $z^d = 1$ حيث $d = \text{pgcd}(m, n) = m \wedge n$ أي $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_d$.

البرهان. 1 • نضع $\ell = qn$ منه[5] :

$$z^\ell - 1 = z^{qn} = (z^n)^q - 1 = (z^n - 1)\left(z^{(q-1)n} + z^{(q-2)n} + \cdots + z^n + 1\right)$$

منه

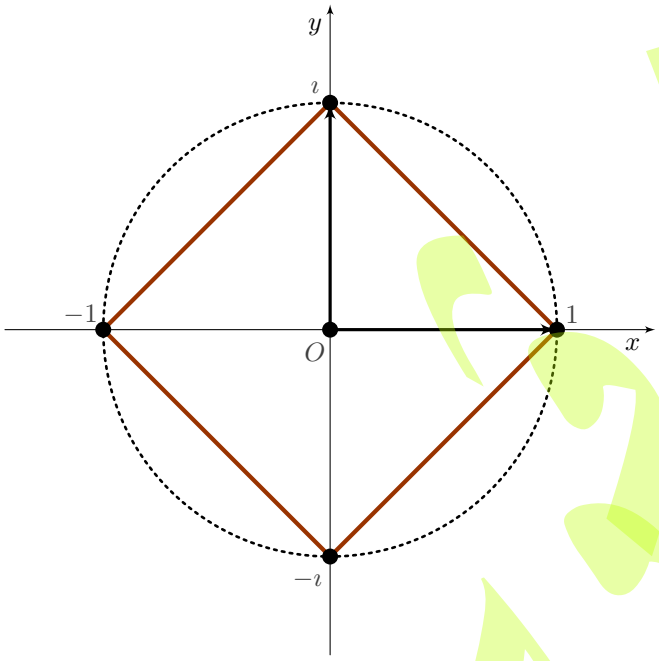
$$z^n = 1 \implies z^\ell - 1 = 0 \times \left(z^{(q-1)n} + z^{(q-2)n} + \cdots + z^n + 1\right) = 0$$

2 • بما أنّ $d|m$ و $d|n$ فحسب ما سبق كلّ حلّ للمعادلة $z^d = 1$ هو حلّ للمعادلتين $z^m = 1$ و $z^n = 1$.

[5] نُذكّر بالمتطابقة $x^k - 1 = (x-1)\left(x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x^2 + x + 1\right)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل II.7: الجذور الرابعة للعدد 1.

من جهة أخرى، ليكن $\omega_p = \cos\frac{2p\pi}{m} + \imath\sin\frac{2p\pi}{m}$ حلاً للمعادلة $z^m = 1$ و $\omega'_q = \cos\frac{2q\pi}{n} + \imath\sin\frac{2q\pi}{n}$ حلاً للمعادلة $z^n = 1$. بما أنّ $|\omega_p| = |\omega'_q|$ فإنّ

$$\omega_p = \omega'_q \iff \arg\left(\omega_p\right) = \arg\left(\omega'_q\right) \pmod{2\pi} \iff \frac{2p\pi}{m} = \frac{2q\pi}{n} + 2r\pi\,, \quad r \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \frac{p}{m} - \frac{q}{n} = r \iff pn - qm = rmn$$

لكن $m = m'd$ و $n = n'd$ مع $\gcd(m', n') = 1$ (لأنّ $d = \gcd(m, n)$) منه

$$pn - qm = rmn \iff n'p - m'q = rm'n'd \iff m'(rn'd + q) = n'p$$

منه $m' | n'p$ و بما أنّ $\gcd(m', n') = 1$ فإنّ $m' | p$ أي $p = p'm'$ مع $p' \in \mathbb{N}^*$ منه

$$\arg\left(\omega_p\right) = \frac{2p\pi}{m} = \frac{2p'm'\pi}{m'd} = \frac{2p'\pi}{d}$$

و هذا يعني أنّ (دستور **موافر**) :

$$\left(\omega_p\right)^d = \left(\cos\frac{2p'\pi}{d} + \imath\sin\frac{2p'\pi}{d}\right)^d = \cos\frac{2dp'\pi}{d} + \imath\sin\frac{2dp'\pi}{d} = \cos 2p'\pi + \imath\sin 2p'\pi = 1$$

أي أنّنا أثبتنا :

$$\omega_p = \omega'_q \implies \left(\omega_p\right)^d = 1$$

■

تطبيق 3 : نعتبر مضلّعين منتظمين مرسومين على نفس الدائرة. إذا كان عدد رؤوس المضلع الأوّل هو 1966 رأسًا و عدد رؤوس الثاني 2949 رأسًا و إذا علمنا أنّ لهما رأسًا مشتركًا فكم هو (بالتحديد) عدد الرؤوس المشتركة بين هذين المضلعين ؟

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. عدد الرؤوس المشتركة للمضلعين هو عدد الحلول المشتركة للمعادلتين $z^{1966}=1$ و $z^{2949}=1$ و حسب المبرهنة 13 (الشطر 2) ، فإنّ هذا العدد يساوي

$$d=\text{pgcd}\,(1966,2949)=983$$

■

مبرهنة 14 : لتكن ω_0 ، ω_1 ، ⋯ ، ω_{n-1} الجذور النونية للوحدة. من أجل كلّ عدد طبيعي k لدينا :

$$\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k=\begin{cases}n\,, & \text{إذا كان } n|k\\ 0\,, & \text{في الحالات الأخرى}\end{cases}$$

البرهان. نعتبر العدد المركب $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\imath\sin\dfrac{2\pi}{n}$. لدينا $\omega\in\mathbb{U}_n$ و $\forall\alpha\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}\ ,\ \omega^\alpha\neq 1$.

إذن $\omega^m=1\iff n|m$.

- إذا كان n لا يقسم k ($n\nmid k$) فإنّ $\omega^k\neq 1$ منه

$$\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega^j\right)^k=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega^k\right)^j=\frac{1-\left(\omega^k\right)^n}{1-\omega^k}=\frac{1-1^k}{1-\omega^k}=0$$

- إذا كان $k=qn$ مع $q\in\mathbb{N}$ فإنّ

$$\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^k=\sum_{j=0}^{n-1}\omega_j^{qn}=\sum_{j=0}^{n-1}\left(\omega_j^n\right)^q=\sum_{j=0}^{n-1}1^q=\sum_{j=0}^{n-1}1=n$$

■

تطبيق 4 : نضع $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\imath\sin\dfrac{2\pi}{n}$. ليكن z عددًا مركبًا يُحقّق

$$\forall j\in\{0,1,\cdots,n-1\}\ ,\quad |z-\omega^j|\leq 1$$

برهن أنّ $z=0$.

الحلّ. لدينا

$$|z-\omega^j|\leq 1\iff (z-\omega^j)\,\overline{(z-\omega^j)}\leq 1$$

و بعد النشر و الترتيب نجد (نُذكّر أنّ $z\overline{z}=|z|^2=1$ و $\omega\overline{\omega}=|\omega|^2=1$)

$$\begin{aligned}(z-\omega^j)\,\overline{(z-\omega^j)}\leq 1 &\iff (z-\omega^j)\left(\overline{z}-\overline{\omega}^j\right)\leq 1\\ &\iff z\overline{z}-z\overline{\omega}^j-\overline{z}\omega^j+\omega^j\,\overline{\omega}^j\leq 1\\ &\iff |z|^2-z\overline{\omega}^j-\overline{z}\omega^j+\left(|\omega|^2\right)^j\leq 1\\ &\iff |z|^2-z\overline{\omega}^j-\overline{z}\omega^j+1^j\leq 1\\ &\iff |z|^2\leq z\overline{\omega}^j+\overline{z}\omega^j\end{aligned}$$

إذن

$$\forall j\in\{0,1,\cdots,n-1\}\ ,\quad |z|^2\leq z\overline{\omega}^j+\overline{z}\omega^j$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بجمع هذه المتراجحات طرفًا إلى طرف ينتج

$$\underbrace{|z|^2 + |z|^2 + \cdots + |z|^2}_{\text{مرّة } n} \leq z \cdot \left(\overline{\omega}^0 + \overline{\omega}^1 + \cdots + \overline{\omega}^{n-1}\right) + \overline{z} \cdot \left(\omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^{n-1}\right)$$

منه

$$n|z|^2 \leq z \cdot \overline{\left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^j\right)} + \overline{z} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} \omega^j\right)$$

و بما أنّه من أجل كلّ j من $\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$، j لا يقسم n (لأنّ $j < n$) فحسب المبرهنة 14 (مع $k = 1$ ؛ منه $n \nmid k$ لأنّ $k < n$) :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \omega^j = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j = 0$$

منه $0 \leq n|z|^2 \leq z \cdot \overline{0} + \overline{z} \cdot 0 = 0$ أي $n|z|^2 = 0$. لكن $n \geq 2$ منه $|z|^2 = 0$ أي $z = 0$. ■

7.II المعادلة $Z^n = a$

ليكن a عددًا مركبًا و n عددًا طبيعيًا حيث $n \geq 2$.

حلّ المعادلة $Z^n = a$ يؤول إلى إيجاد الجذور النونية للعدد المركب a . و حسب ما سبق فإنّ هذه المعادلة تقبل n حلاً مختلفًا. نضع $Z = [\rho, \theta]$.

1• نفرض أنّ $a \in \mathbb{R}$.

• إذا كان $a > 0$ أي $a = [a, 0]$ فإنّ

$$[\rho, \theta]^n = [a, 0] \iff [\rho^n, n\theta] = [a, 0]$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = a \\ n\theta = 0 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{a} \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي الحلول هي

$$Z_k = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \imath \sin\frac{2k\pi}{n}\right)\,, \quad k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\} \qquad (2)$$

•

• إذا كان $a < 0$ أي $a = [-a, \pi]$ فإنّ

$$[\rho, \theta]^n = [-a, \pi] \iff [\rho^n, n\theta] = [-a, \pi]$$

$$\iff \begin{cases} \rho^n = -a \\ n\theta = \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{-a} \\ \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

أي الحلول هي

$$Z_k = \sqrt[n]{-a}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \imath\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right) \quad , \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\} \qquad (3)$$

• **2** و الآن ندرس الحالة العامة $a \in \mathbb{C}$. ليكن $\alpha = [r,t]$ جذرًا نونيًا للعدد a . لدينا $[r,t] = \left[\sqrt[n]{|a|}, \frac{\arg(a)}{n}\right]$ و :

$$\begin{aligned} Z^n = a &\iff [\rho,\theta]^n = [r,t]^n \iff [\rho^n, n\theta] = [r^n, nt] \\ &\iff \begin{cases} \rho^n = r^n \\ n\theta = nt + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \begin{cases} \rho = r \\ \theta = t + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta = \frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

أي الحلول هي

$$Z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \imath\sin\left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad , \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$

(4)

نلاحظ أنّ العبارة (4) ، تشمل العبارتين (2) و (3) . من هنا نستخلص أنّ :

حلول المعادلة $Z^n = a$ ، حيث $a \neq 0$ ، تُعطى بالعبارة :

$$\boxed{Z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \imath\sin\left(\frac{\arg(a)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \quad , \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}}$$

ملاحظة 12 : الجذر النوني الذي تمّ اختياره أعلاه لا يؤثّر على النتيجة، بمعنى إذا اخترنا جذرًا نونيًا آخرًا، فإنّنا نحصل على نفس الحلول لكن قد يختلف ترتيبها عن الحلول السابقة.

مثال 16 : حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $Z^3 + 8 = 0$.

الحل : نضع $Z = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$.

$$\begin{aligned} Z^3 + 8 = 0 &\iff Z^3 = -8 \iff \rho^3(\cos\theta + \imath\sin\theta)^3 = 8(\cos\pi + \imath\sin\pi) \\ &\iff \rho^3(\cos 3\theta + \imath\sin 3\theta) = 8(\cos\pi + \imath\sin\pi) \\ &\iff \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

أي الحلول هي

$$Z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \quad , \quad k \in \{0,1,2\}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

مثال 17 : نعتبر المعادلة

$$Z^6-(1+\imath)Z^3+\imath=0 \qquad (5)$$

- 1 أنشر ثمّ رتّب العبارة $\left(Z^3-1\right)\left(Z^3-\imath\right)$.
- 2 إستنتج حلول المعادلة (5) .

الحل :

- 1

$$\left(Z^3-1\right)\left(Z^3-\imath\right)=Z^6-\imath Z^3-Z^3+\imath=Z^6-(1+\imath)Z^3+\imath$$

- 2 حسب ما سبق

$$(5)\iff\left(Z^3-1\right)\left(Z^3-\imath\right)=0\iff Z^3-1=0 \text{ أو } Z^3-\imath=0$$

الحالة الأولى :

$$\begin{aligned}Z^3-1=0&\iff Z^3=1\iff \rho^3(\cos\theta+\imath\sin\theta)^3=\cos 0+\imath\sin 0\\&\iff \rho^3(\cos 3\theta+\imath\sin 3\theta)=\cos 0+\imath\sin 0\\&\iff\begin{cases}\rho^3=1\\3\theta=0+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}$$

أي

$$Z_k=\omega_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+\imath\sin\frac{2k\pi}{3}\,,\qquad k\in\{0,1,2\}$$

الحالة الثانية :

$$\begin{aligned}Z^3-\imath=0&\iff Z^3=\imath\iff \rho^3(\cos\theta+\imath\sin\theta)^3=\cos\frac{\pi}{2}+\imath\sin\frac{\pi}{2}\\&\iff \rho^3(\cos 3\theta+\imath\sin 3\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+\imath\sin\frac{\pi}{2}\\&\iff\begin{cases}\rho^3=1\\3\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\end{aligned}$$

$$Z_k=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\,,\qquad k\in\{0,1,2\}$$

في الأخير، مجموعة الحلول هي

$$S=\left\{\cos\frac{2k\pi}{3}+\imath\sin\frac{2k\pi}{3}\,;\ \cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)\,,\quad k\in\{0,1,2\}\right\}$$

II.8 الدالة الأسية المركبة

نسمي **دالة مركبة لمتغيّر حقيقي** كل دالة ترفق بعدد حقيقي t عددًا مركبا $z=z(t)$.
إذا كانت f دالة مركبة لمتغير حقيقي t فإنه يمكن أن نرفق بها الدالتين العدديتين $a(t)$ و $b(t)$ المعرفتين بالعبارتين $a(t)=\text{Re}(f(t))$ و $b(t)=\text{Im}(f(t))$. و بما أنّ $f(t)=a(t)+\imath b(t)$ ، فإنّ الدالة f مُعيّنة إذا عُرفت الدالتان $a(t)$ و $b(t)$ ، و بالعكس، إذا عُرفت الدالة f فبالإمكان إيجاد $a(t)$ و $b(t)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مثال 18 : نضع $f(t)=\dfrac{1}{t-\imath}$. هذه العبارة تُعرِّف دالة مركبة لمتغير حقيقي .
لدينا :

$$f(t)=\frac{1}{t-\imath}=\frac{t+\imath}{(t-\imath)(t+\imath)}=\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\imath$$

منه $a(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ و $b(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ ■

يمكن تعريف كل من **الإستمرارية** (الإتصال) و **قابلية الإشتقاق** بالنسبة للدوال المركبة لمتغير حقيقي :
فالدالة f مستمرة (متّصلة) إذا كانت a و b مستمرّتين و قابلة للإشتقاق إذا كانت a و b قابلتين للإشتقاق مع : $f'(t)=a'(t)+\imath b'(t)$.

ليكن α و β عددين حقيقيين . نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(t)=e^{\alpha t}(\cos\beta t+\imath\sin\beta t)=e^{\alpha t}\cos\beta t+\imath e^{\alpha t}\sin\beta t=a(t)+\imath b(t)$$

هذه الدالة مستمرة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأن الدالتين العدديتين a و b مستمرتان و قابلتان للإشتقاق على $\mathbb{R}$) و لدينا :

$$f'(t)=a'(t)+\imath b'(t)=\alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t+\imath\sin\beta t)+e^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t+\imath\beta\cos\beta t)=\alpha f(t)+\imath\beta f(t)$$

أي : $f'(t)=(\alpha+\imath\beta)f(t)$.
بالإضافة إلى ذلك :

$$\begin{aligned}f(t_1+t_2)&=e^{\alpha(t_1+t_2)}\left[\cos\beta(t_1+t_2)+\imath\sin\beta(t_1+t_2)\right]\\&=e^{\alpha t_1}e^{\alpha t_2}\left[(\cos\beta t_1\cos\beta t_2-\sin\beta t_1\sin\beta t_2)+\imath(\sin\beta t_1\cos\beta t_2+\cos\beta t_1\sin\beta t_2)\right]\\&=e^{\alpha t_1}e^{\alpha t_2}(\cos\beta t_1+\imath\sin\beta t_1)(\cos\beta t_2+\imath\sin\beta t_2)\,.\end{aligned}$$

منه : $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)$.
الدالة الأسيّة (الحقيقية) $g(t)=e^{\alpha t}$ تحقق : $g'(t)=\alpha g(t)$ و $g((t_1+t_2)=g(t_1)g(t_2)$.
هذا التشابه بين خواص f و g دفع بالعالم الرياضي **أولر** (Euler) إلى وضع : $f(t)=e^{(\alpha+\imath\beta)t}$.
إذن :

تعريف 11 : إذا كان $u=\alpha+\imath\beta$ عددًا مركبا، نضع :

$$e^u=e^{\alpha+\imath\beta}=e^{\alpha}(\cos\beta+\imath\sin\beta)=e^{\mathrm{Re}(u)}(\cos(\mathrm{Im}(u))+\imath\sin(\mathrm{Im}(u)))$$

تسمى هذه العبارة **الأسية المركبة** للعدد u و لدينا :

$$|e^u|=e^{\mathrm{Re}(u)}\quad,\quad \arg(e^u)=\mathrm{Im}(u)\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

إذا كان z عددًا مركبا غير معدوم فإنّ : $z=|z|(\cos(\arg(z))+\imath\sin(\arg(z)))=|z|e^{\imath\arg(z)}$.

تعريف 12 : ليكن z عدداً مركبا غير معدوم. الكتابة

$$z=|z|e^{\imath\arg(z)}$$

تسمى **الشكل الأُسي** للعدد المركب z .
بشكل خاص، كل عدد مركب طويلته 1 يُكتب على الشكل $e^{\imath t}$ حيث t عدد حقيقي.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

أمثلة 19 :

$$-1 = e^{\imath\pi}, \qquad \imath = e^{\imath\frac{\pi}{2}}, \qquad \frac{1+\imath}{\sqrt{2}} = e^{\imath\frac{\pi}{4}}, \qquad \sqrt{3}+\imath = 2e^{\imath\frac{\pi}{6}}, \qquad 1+\imath\sqrt{3} = 2e^{\imath\frac{\pi}{3}}$$

يمكن أن نثبت بسهولة الخواص التالية ($\rho > 0$ ، $\theta \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{Z}$) :

$$\left(\rho_1 e^{\imath\theta_1}\right)\left(\rho_2 e^{\imath\theta_2}\right) = \left(\rho_1\rho_2\right) e^{\imath(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{1}{\rho e^{\imath\theta}} = \frac{1}{\rho}e^{-\imath\theta}$$
$$\left(\rho e^{\imath\theta}\right)^n = \rho^n e^{n\imath\theta}$$
$$-\rho e^{\imath\theta} = \rho e^{\imath(\theta+\pi)}$$

مبرهنة 15 : لأجل كل عددين مركبين z و z' لدينا التكافؤ الآتي :

$$e^{z'} = e^{z} \iff z' = z + 2k\pi\imath\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

البرهان. بدايةً، لنبحث عن حلول المعادلة : $e^u = 1$. نضع $u = a + \imath b$ حيث a و b عددان حقيقيان.
لدينا : $|e^u| = e^a = 1$ منه $a = 0$ (لأنّ a عدد حقيقي و الدالة الأسية الحقيقية تَقَابُل من $\mathbb{R}$ نحو $]0,+\infty[$) . بالإضافة إلى ذلك : $\arg(1) = 0$ و $\arg(e^u) = b \pmod{2\pi}$ منه $b = 0 \pmod{2\pi}$ أي b من الشكل $2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.
أي أنّ $u = 0 + b\imath = 2\imath k\pi$.
و بالعكس، إذا كان $u = 2\imath k\pi$ فإنّ $e^u = e^{2\imath k\pi} = \cos(2k\pi) + \imath\sin(2k\pi) = 1$.
هذا يعني أنّ الأعداد المركبة التي تحقق $e^u = 1$ هي الأعداد التي من الشكل $u = 2\imath k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
الآن :

$$e^{z'} = e^{z} \iff e^{z'}e^{-z} = e^{z}e^{-z} \iff e^{z'-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \iff z' - z = 2k\pi\imath\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

■

و بما أنّ $\overline{\left(e^{\alpha+\imath\beta}\right)} = e^{\alpha}\left(\cos\beta - \sin\beta\right) = e^{\alpha-\imath\beta}$ فإنّ : $\overline{\left(e^u\right)} = e^{\overline{u}}$.
إذن يمكن تعميم نصّ النظرية 1 صفحة 10 ليشمل الأسية المركبة كما يلي :

نظرية 2 : لإيجاد مرافق عدد مركب مكتوب على صيغة تسلسل عمليات الجمع، الطرح، الضرب، القسمة و الأُس ، يكفي الإحتفاظ بنفس الصيغة مع تعويض العدد $\imath$ بالعدد $-\imath$ في كل مرّة.

في الحالة الخاصة $u = \imath t$ ، مع t عدد حقيقي، يكون :

$$e^{-\imath t} = \overline{\left(e^{\imath t}\right)} = \frac{1}{e^{\imath t}} \qquad , \qquad \arg\left(e^{\imath t}\right) = t \qquad , \qquad \left|e^{\imath t}\right| = 1$$

و الآن ندرج نص المبرهنة الأساسية في هذه الفقرة و التي يُطلق عليها إسم نظرية **أولر** أو صِيَغ **أولر** :

مبرهنة 16 : ليكن t عدداً حقيقيا . لدينا :

$$\sin t = \frac{e^{\imath t} - e^{-\imath t}}{2\imath} \qquad , \qquad \cos t = \frac{e^{\imath t} + e^{-\imath t}}{2}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

البرهان. لدينا :

$$e^{\imath t} = \cos t + \imath \sin t \quad (6)$$

$$e^{-\imath t} = \cos t - \imath \sin t \quad (7)$$

بجمع طرفي المعادلتين (6) و (7) ينتج : $e^{\imath t} + e^{-\imath t} = 2\cos t$.

و بطرحهما طرفاً إلى طرف نجد : $e^{\imath t} - e^{-\imath t} = 2\imath \sin t$. ■

لصِيَغ **أولر** أهمية كبيرة فمثلاً، يكفي أن نعلم أنّ $e^{\imath(t_1+t_2)} = e^{\imath t_1} e^{\imath t_2}$ ، $e^{2\imath\pi} = 1$ و $\left(e^{\imath t}\right)' = \imath e^{\imath t}$ لإيجاد جميع المتطابقات المثلثية ، مثلاً لإيجاد $\cos x \cos y$ نكتب :

$$\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \times \frac{e^{\imath y} + e^{-\imath y}}{2} = \frac{e^{\imath(x+y)} + e^{\imath(x-y)} + e^{\imath(-x+y)} + e^{\imath(-x-y)}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{\imath(x+y)} + e^{-\imath(x+y)}}{2}\right) + \left(\frac{e^{\imath(x-y)} + e^{-\imath(x-y)}}{2}\right)\right]$$

منه $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$.

بالمثل، لإيجاد $\cos x \sin y$ نكتب :

$$\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \times \frac{e^{\imath y} - e^{-\imath y}}{2\imath} = \frac{e^{\imath(x+y)} - e^{\imath(x-y)} + e^{\imath(-x+y)} - e^{\imath(-x-y)}}{4\imath}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{\imath(x+y)} - e^{-\imath(x+y)}}{2\imath}\right) - \left(\frac{e^{\imath(x-y)} - e^{-\imath(x-y)}}{2\imath}\right)\right]$$

منه $\cos x \sin y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$.

و أيضا بالنسبة لـ $\sin x \sin y$:

$$\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath} \times \frac{e^{\imath y} - e^{-\imath y}}{2\imath} = \frac{e^{\imath(x+y)} - e^{\imath(x-y)} - e^{\imath(-x+y)} + e^{\imath(-x-y)}}{-4}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^{\imath(x-y)} + e^{-\imath(x-y)}}{2}\right) - \left(\frac{e^{\imath(x+y)} + e^{-\imath(x+y)}}{2}\right)\right]$$

منه $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$.

كما يمكن إثبات دستور **موافر** بالإعتماد عليها :

$e^{\imath nt} = \left(e^{\imath t}\right)^n$ منه $\cos nt + \imath \sin nt = (\cos t + \imath \sin t)^n$.

مبرهنة 17 : إذا كان x و y عددين حقيقيين فإنّ $|e^{\imath x} - e^{\imath y}| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$.

البرهان. لدينا $e^{\imath x} - e^{\imath y} = e^{\imath y}\left(e^{\imath(x-y)} - 1\right)$ منه $|e^{\imath x} - e^{\imath y}| = |e^{\imath y}| \cdot |e^{\imath(x-y)} - 1|$

لكن $|e^{\imath y}| = 1$ منه $|e^{\imath x} - e^{\imath y}| = |e^{\imath(x-y)} - 1|$.

نضع $\theta = x - y$. حسب تعريف الطويلة :

$$|e^{\imath\theta} - 1|^2 = (e^{\imath\theta} - 1)\overline{(e^{\imath\theta} - 1)} = (e^{\imath\theta} - 1)(e^{-\imath\theta} - 1)$$

$$= e^{\imath\theta}e^{-\imath\theta} - (e^{\imath\theta} + e^{-\imath\theta}) + 1$$

$$= 1 - 2\,\mathrm{Re}\left(e^{\imath\theta}\right) + 1 = 2 - 2\cos\theta$$

و بما أنّ $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ فإنّ $|e^{\imath\theta} - 1|^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$.

و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين ينتج : $|e^{\imath x} - e^{\imath y}| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|$. ■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

3 تطبيقات الأعداد المركبة

1.III الجذور التربيعية لعدد مركب

في هذه الفقرة، ندرس الحالة الخاصة $n = 2$ للجذور النونية لعدد مركب و التي تمّت دراستها في الفقرة **5.II** صفحة 26 .

تعريف 13 : نسمي **جذرًا تربيعيًا** للعدد المركب L كل عدد مركب z يحقق : $z^2 = L$.

نعلم أنّ كل عدد مركب غير معدوم يقبل n جذرًا نونيًا. إذن كل عدد مركب غير معدوم L يقبل جذرين تربيعيين، و إذا كان z_0 جذرًا تربيعيًا للعدد L فإنّ $(-z_0)$ هو أيضا جذر تربيعي له لأنّ $(-z_0)^2 = L$ و منه المبرهنة التالية :

مبرهنة 18 : كل عدد مركب غير معدوم يقبل جذرين تربيعيين متناظرين.

2.III تعيين الجذور التربيعية لعدد مركب

ليكن L عددًا مركبًا حيث : $L = a + \imath b = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$.
للبحث عن الجذرين التربيعيين للعدد المركب L ، يمكن أن نستعمل إمّا شكله المثلثي $L = [\rho, \theta]$ أو شكله الجبري $L = a + \imath b$.

1.2.III الطريقة الأولى : باستعمال الشكل المثلثي

نتّبع فيما يلي نفس طريقة الفقرة **5.II** صفحة 26 و يمكن تطبيق النتيجة التي وجدناها فيها، لكن لترسيخ هذه الطريقة في الأذهان نقوم بإعادتها هنا :
لنبحث عن الأعداد المركبة z التي تحقق $z^2 = L$. نضع $z = [r, t]$ و منه : $z^2 = [r, t]^2 = [r^2, 2t]$
لدينا :

$$z^2 = L \iff r^2(\cos(2t) + \imath\sin(2t)) = \rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)$$

$$\iff \begin{cases} r^2 = \rho \\ 2t = \theta + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{\rho} \\ t = \dfrac{\theta}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

فالجذران التربيعيان للعدد L هما :

$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \imath \sin\frac{\theta}{2}\right) \quad \text{و} \quad z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right) + \imath \sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right) = -z_0$$

مثال 20 : الجذران التربيعيان للعدد $z = 1 + \imath\sqrt{3} = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$ هما :

$$z_0 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \imath\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+\imath\right)$$

و

$$z_1 = -z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+\imath\right)$$

2.2.III الطريقة الثانية : باستعمال الشكل الجبري

نضع $z = x + \imath y$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. لدينا :

$$\begin{aligned} z^2 = L &\iff (x+\imath y)^2 = a + \imath b \\ &\iff (x^2 - y^2) + (2xy)\,\imath = a + \imath b \\ &\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

و هي جملة معادلتين بمجهولين فبالإمكان حلُّها.

لكن لتسهيل حلّ هذه الجملة، تُضاف عادةً إلى المعادلتين (1) و (2) المعادلة $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ الناتجة من $|z^2| = |L|$ و تصبح عندئذ الجملة كما يلي :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} & (3) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة طرفا إلى طرف ينتج $x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}$ ، و بطرح المعادلة الأولى من الثالثة نجد $y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$.

من الواضح أنّ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \geq 0$ و $\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \geq 0$ و بالتالي :

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ 2xy = b \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases}$$

نختار x و y بحيث تكون إشارة الجداء xy من نفس إشارة b أي :

- إذا كان $b > 0$ ، نختار $x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ و $y = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$ ؛

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 و إذا كان $b<0$ ، نختار $x=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ و $y=-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$.

في كلا الحالتين، الجذران التربيعيان للعدد L هما $\pm(x+\imath y)$.

أمثلة 21 : • 1 لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد $L=5-12\imath$ ، نضع $z=x+\imath y$ و نحلّ :

$$(x+\imath y)^2=5-12\imath \iff \begin{cases} x^2-y^2=5 \\ 2xy=-12 \\ x^2+y^2=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13 \end{cases}$$

بجمع حدود المعادلتين الأولى و الثالثة طرفا إلى طرف نحصل على : $2x^2=18$ أي $x=\pm 3$.

- من أجل $x=-3$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $y=2$.
- من أجل $x=3$ و بالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $y=-2$.

إذن الجذران التربيعيان للعدد $L=5-12\imath$ هما $z_0=-3+2\imath$ و $z_1=3-2\imath$.

• 2 ليكن $z=x+\imath y$ جذرًا تربيعيًا للعدد $L=\imath$. لدينا $x^2-y^2=0$ ، $2xy=1$ و $x^2+y^2=1$ و بالتالي $x^2=y^2=\frac{1}{2}$ ؛ و x و y من نفس الإشارة، إذن فالجذران التربيعيان للعدد $\imath$ هما $\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• 3 لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد $-\imath$ نلاحظ أنّ :

$$-\imath=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\imath^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\imath\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2$$
$$=\left(\imath\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $-\imath$ هما $\pm\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.III المعادلات من الدرجة الثانية

1.3.III الحل ، في $\mathbb{C}$ ، لمعادلة من الدرجة الثانية

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$az^2+bz+c=0 \quad (4)$$

حيث a ، b ، c أعداد مركبة و $a\neq 0$.
من أجل كل عدد مركب z لدينا :

$$az^2+bz+c=a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right]$$
$$=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

أي

$$az^2+bz+c=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

ليكن δ أحد الجذرين التربيعيين للعدد b^2-4ac . لدينا :

$$\begin{aligned}az^2+bz+c=0 &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0\\ &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\delta^2}{4a^2}\right]=0\\ &\iff a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right]=0\\ &\iff \left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)=0\\ &\iff z=\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad \frac{-b+\delta}{2a}\end{aligned}$$

إذن

مبرهنة 19 : المعادلة $az^2+bz+c=0$ ، حيث $a\neq 0$ ، تقبل في $\mathbb{C}$ حلّين هما $\frac{-b-\delta}{2a}$ و $\frac{-b+\delta}{2a}$ حيث δ هو أحد الجذرين التربيعيين للعدد b^2-4ac .

يُسمّى العدد b^2-4ac **مُمَيِّز** المعادلة و نرمز إليه بالرمز Δ كما هو الحال في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

مثال 22 : نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(1+\imath)z^2+(3-4\imath)z+\imath-5=0$.

لدينا : $\Delta=(3-4\imath)^2-4(1+\imath)(\imath-5)=-3-4\imath$.

ليكن $\delta=x+\imath y$ عددًا مركبا حيث $\delta^2=\Delta$. لدينا :

$$\begin{aligned}(x+\imath y)^2=-3-4\imath &\iff x^2-y^2+2\imath xy=-3-4\imath\\ &\iff \begin{cases}x^2-y^2=-3\\ 2xy=-4\\ x^2+y^2=5\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}(x=1 \quad \text{و} \quad y=-2)\\ (x=-1 \quad \text{و} \quad y=2)\end{cases} \quad \text{أو}\end{aligned}$$

و منه $\delta=-1+2\imath$ (أو $\delta=1-2\imath$).

إذن الحلان z_0 و z_1 للمعادلة المقترحة هما :

$$z_0=\frac{-(3-4\imath)-(-1+2\imath)}{2(1+\imath)}=\imath$$

$$z_1=\frac{-(3-4\imath)+(-1+2\imath)}{2(1+\imath)}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\imath$$

ملاحظة 13 : ◅ إذا كان $b=2b'$ أي إذا كانت المعادلة : $az^2+2b'z+c=0$ فإننا نُعرّف **المُميِّز المُختصر** $\Delta'=b'^2-ac$ ؛ و إذا كان δ' جذرًا تربيعيًا للعدد Δ' فإنّ حلول المعادلة السابقة تُعطى بالعبارة :

$$z_1=\frac{-b'-\delta'}{a} \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-b'+\delta'}{a}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

نلاحظ أنّ مجموع الجذرين هو $-\frac{b}{a}$ و جداؤهما هو $\frac{c}{a}$.
و بالعكس، لإيجاد عددين مركبين مجموعهما s و جداؤهما p يكفي حلّ المعادلة : $z^2 - sz + p = 0$.

2.3.III الحل ، في $\mathbb{C}$ ، لمعادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية

إذا كانت a ، b ، c أعدادًا حقيقيةً يكون العدد Δ حقيقيا.

- إذا كان $\Delta > 0$ فإنّ المعادلة (4) تقبل حلّين حقيقيين متمايزين هما :
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- إذا كان $\Delta = 0$ فإنّ المعادلة (4) تقبل حلا حقيقيا مضاعفا هو : $\frac{-b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta < 0$ فإنه يمكن كتابة Δ على الشكل $\Delta = \left(\imath\sqrt{-\Delta}\right)^2$ و المعادلة (4) تقبل حلين مركبين مترافقين هما :
$$z_1 = \frac{-b - \imath\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b + \imath\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

إذن

مبرهنة 20 : كل معادلة من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية تقبل، في $\mathbb{C}$ ، حلّين حقيقيين أو مركبين مترافقين.

ملاحظة 14 : الفرضية (الشرط) «المعاملات a ، b ، c حقيقية»مهمة جدّا لأنه إذا لم يتحقق هذا الشرط، فنتيجة المبرهنة 20 خاطئة كما يُبيِّن ذلك المثال 22 .

4.III حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$

يمكن حساب $\cos n\theta$ و $\sin n\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ و ذلك باتباع الطريقة التالية :
لدينا حسب دستور **موافر** : $\cos n\theta + \imath \sin n\theta = (\cos\theta + \imath\sin\theta)^n$.
عند نشر الطرف الثاني من هذه المساواة، حسب **دستور ثنائي الحد**، نحصل على عدد مركب جزؤه الحقيقي يساوي $\cos n\theta$ و جزؤه التخيلي يساوي $\sin n\theta$ كما في الأمثلة التالية :

- نأخذ $n = 2$. لدينا :

$$\begin{aligned}\cos 2\theta + \imath\sin 2\theta &= (\cos\theta + \imath\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2\imath\cos\theta\sin\theta\end{aligned}$$

و منه النتيجتان المعروفتان :

$$\boxed{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta} \quad , \quad \boxed{\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

- نأخذ $n = 3$. لدينا :

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \imath\sin 3\theta &= (\cos\theta + \imath\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3(\cos\theta)^2(\imath\sin\theta) + 3(\cos\theta)(\imath\sin\theta)^2 + (\imath\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta + \imath\left(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin^3\theta\right)\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و منه النتيجتان التاليتان :

$$\boxed{\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\cdot\sin\theta - \sin^3\theta} \quad , \quad \boxed{\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\cdot\sin^2\theta}$$

• 3 نأخذ $n = 4$. لدينا :

$$\begin{aligned}\cos 4\theta + \imath\sin 4\theta &= (\cos\theta + \imath\sin\theta)^4\\ &= \cos^4\theta + 4(\cos\theta)^3(\imath\sin\theta) + 6(\cos\theta)^2(\imath\sin\theta)^2 + 4(\cos\theta)(\imath\sin\theta)^3 + (\imath\sin\theta)^4\\ &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + \sin^4\theta + \imath\left(4\cos^3\theta\cdot\sin\theta - 4\cos\theta\cdot\sin^3\theta\right)\end{aligned}$$

و منه النتيجتان التاليتان :

$$\boxed{\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\cdot\sin\theta - 4\cos\theta\cdot\sin^3\theta} \quad , \quad \boxed{\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta + \sin^4\theta}$$

• 4 نأخذ $n = 5$. لدينا :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta + \imath\sin 5\theta &= (\cos\theta + \imath\sin\theta)^5\\ &= \cos^5\theta + 5(\cos\theta)^4(\imath\sin\theta) + 10(\cos\theta)^3(\imath\sin\theta)^2\\ &\qquad + 10(\cos\theta)^2(\imath\sin\theta)^3 + 5(\cos\theta)(\imath\sin\theta)^4 + (\imath\sin\theta)^5\\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\cdot\sin^2\theta + 5\cos\theta\cdot\sin^4\theta\\ &\qquad + \imath\left(5\cos^4\theta\cdot\sin\theta - 10\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta + \sin^5\theta\right)\end{aligned}$$

و منه النتيجتان التاليتان :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\cdot\sin^2\theta + 5\cos\theta\cdot\sin^4\theta\\ \sin 5\theta &= 5\cos^4\theta\cdot\sin\theta - 10\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta + \sin^5\theta\end{aligned}}$$

• 5 نجد بنفس الطريقة أنّ :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos 6\theta &= \cos^6\theta - 15\cos^4\theta\cdot\sin^2\theta + 15\cos^2\theta\cdot\sin^4\theta - \sin^6\theta\\ \sin 6\theta &= 6\cos^5\theta\cdot\sin\theta - 20\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta + 6\cos\theta\cdot\sin^5\theta\\ \\ \cos 7\theta &= \cos^7\theta - 21\cos^5\theta\cdot\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\cdot\sin^4\theta - 7\cos\theta\cdot\sin^6\theta\\ \sin 7\theta &= 7\cos^6\theta\cdot\sin\theta - 35\cos^4\theta\cdot\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\cdot\sin^5\theta - \sin^7\theta\end{aligned}}$$

يمكن أن نبرهن، باستعمال دستور **موافر** أنّ :

$$\cos nx = \sum_{\ell=0}^{[n/2]}\binom{n}{2\ell}(-1)^\ell(\cos x)^{n-2\ell}\left(1-\cos^2 x\right)^\ell$$

$$\sin nx = \sin x\sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]}\binom{n}{2\ell+1}(-1)^\ell(\cos x)^{n-2\ell-1}\left(1-\cos^2 x\right)^\ell$$

حيث $[t]$ يرمز إلى **الجزء الصحيح** [1] للعدد الحقيقي t .

[1] الجزء الصحيح للعدد الحقيقي t ، و الذي نرمز إليه بالرمز $[t]$ ، هو أكبر عدد صحيح يُحقق $[t] \leq t < [t]+1$. مثلاً : $[3.2] = 3$ ، $[5] = 5$ ، $[-2.07] = -3$ (و ليس -2).

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي، فكلّ من $\cos nx$ و $\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ عبارة عن كثير حدود في $\cos x$. بتعبير أدقّ، لدينا :

$$\cos nx = T_n(\cos x) \quad , \quad \frac{\sin nx}{\sin x} = U_n(\cos x)$$

حيث :

$$T_n(X) = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell X^{n-2\ell} \left(1-X^2\right)^\ell \quad U_n(X) = \sum_{\ell=0}^{[(n-1)/2]} \binom{n}{2\ell+1} (-1)^\ell X^{n-2\ell-1} \left(1-X^2\right)^\ell$$

يُدعى كثير الحدود T_n بكثير حدود **تشيبيتشيف** (TCHEBYTCHEF) من الصنف الأوّل و يُدعى كثير الحدود U_n بكثير حدود **تشيبيتشيف** من الصنف الثاني[2].

5.III العبارة الخطية لكل من $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$

الهدف، في هذه الفقرة، هو التعبير عن كل من $\cos^n\theta$ و $\sin^n\theta$ كمجموع حدود من الشكل $\alpha\cos k\theta$ أو من الشكل $\alpha\sin k\theta$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $k\in\mathbb{N}$.
لذلك نتّبع الطريقة التالية :

نضع $z=\cos\theta+\imath\sin\theta$ و منه $\dfrac{1}{z}=\cos\theta-\imath\sin\theta$

و يكون عندئذ : $z^n=\cos n\theta+\imath\sin n\theta$ و $\dfrac{1}{z^n}=\cos n\theta-\imath\sin n\theta$.

و بالتالي :

$$\sin\theta=\frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right) \quad , \quad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$
$$\sin n\theta=\frac{1}{2\imath}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right) \quad , \quad \cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

للحصول على $\cos^n\theta$ ننشر $\left[\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)\right]^n$ و للحصول على $\sin^n\theta$ ننشر $\left[\dfrac{1}{2\imath}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\right]^n$ مستعملين في الحالتين دستور ثنائي الحد.

أمثلة 23 : العبارة الخطية لكل من $\cos^3\theta$ ، $\sin^3\theta$ ، $\cos^4\theta$ و $\sin^4\theta$:

• 1

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^3\\ &= \frac{1}{8}\left(z^3+3z^2\times\frac{1}{z}+3z\times\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left[\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\\ &= \frac{1}{8}\left[2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta\right]\end{aligned}$$

[2] يمكن أن نبرهن أنه لكل عدد طبيعي $n\geq 1$ فإنّ :

$$T_n(X)=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \quad , \quad U_n(X)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X-\cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و منه

$$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

• 2

$$\begin{aligned}\sin^3\theta &= \left[\frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^3\\ &= -\frac{1}{8\imath}\left(z^3 - 3z^2\times\frac{1}{z} + 3z\times\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3}\right)\\ &= -\frac{1}{8\imath}\left[\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{8\imath}\left[2\imath\sin 3\theta - 3\times 2\imath\sin\theta\right]\end{aligned}$$

و منه

$$\boxed{\sin^3\theta = -\frac{1}{4}\sin 3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta}$$

• 3

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^4\\ &= \frac{1}{16}\left(z^4 + 4z^3\times\frac{1}{z} + 6z^2\times\frac{1}{z^2} + 4z\times\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left[\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right) + 4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) + 6\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[2\cos 4\theta + 4\times 2\cos 2\theta + 6\right]\end{aligned}$$

و منه

$$\boxed{\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}}$$

• 4

$$\begin{aligned}\sin^4\theta &= \left[\frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^4\\ &= \frac{1}{16}\left(z^4 - 4z^3\times\frac{1}{z} + 6z^2\times\frac{1}{z^2} - 4z\times\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left[\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right) - 4\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) + 6\right]\\ &= \frac{1}{16}\left[2\cos 4\theta - 4\times 2\cos 2\theta + 6\right]\end{aligned}$$

و منه

$$\boxed{\sin^4\theta = \frac{1}{8}\cos 4\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8}}$$

• 5 نجد بنفس الطريقة أنّ :

$$\boxed{\cos^5\theta = \frac{1}{16}\cos 5\theta + \frac{5}{16}\cos 3\theta + \frac{5}{8}\cos\theta} \qquad \boxed{\cos^6\theta = \frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta + \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{5}{16}}$$

$$\boxed{\sin^5\theta = \frac{1}{16}\sin 5\theta - \frac{5}{16}\sin 3\theta + \frac{5}{8}\sin\theta} \qquad \boxed{\sin^6\theta = -\frac{1}{32}\cos 6\theta + \frac{3}{16}\cos 4\theta - \frac{15}{32}\cos 2\theta + \frac{5}{16}}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$\boxed{\cos^7\theta = \frac{1}{64}\cos 7\theta + \frac{7}{64}\cos 5\theta + \frac{21}{64}\cos 3\theta + \frac{35}{64}\cos\theta}$$

$$\boxed{\sin^7\theta = -\frac{1}{64}\sin 7\theta + \frac{7}{64}\sin 5\theta - \frac{21}{64}\sin 3\theta + \frac{35}{64}\sin\theta}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

4 تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب

فيما يلي، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.IV الأعداد المركبة و الهندسة المستوية

1.1.IV المسافة

مبرهنة 21 : لتكن M_1 و M_2 نقطتين من المستوي و ليكن z_1 و z_2 صورتيهما على الترتيب.
المسافة بين النقطتين M_1 و M_2 هي $M_1M_2 = |z_2 - z_1|$.

البرهان. صورة الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}$ هي $z_2 - z_1$. و بما أنّ $M_1M_2 = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = |z_2 - z_1|$ فإنّ المسافة بين M_1 و M_2 هي $|z_2 - z_1|$. ■

2.1.IV مركز المسافات المتناسبة

مبرهنة 22 : لتكن M_1 ، M_2 و B ثلاث نقط صورها z_1 ، z_2 و b على الترتيب. ليكن α_1 و α_2 عددين حقيقيين حيث $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$.
النقطة B هي مركز المسافات المتناسبة للنقطتين M_1 و M_2 المرفوقتين بالمعاملين α_1 و α_2 إذا و فقط إذا كان :

$$\alpha_1 (b - z_1) + \alpha_2 (b - z_2) = 0$$

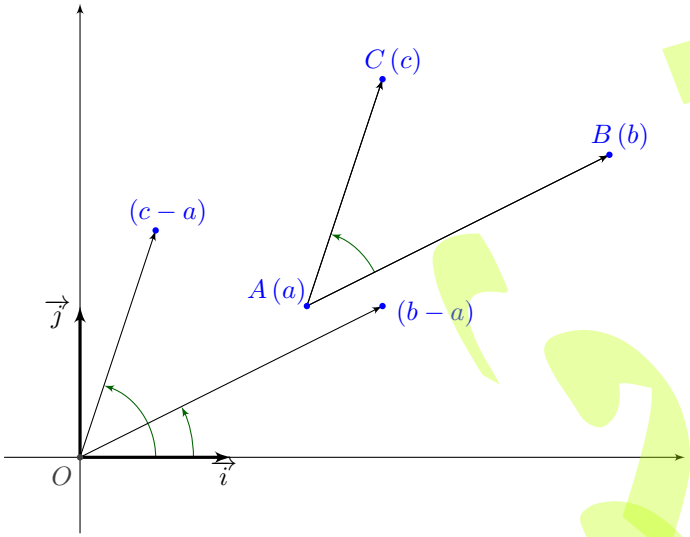
البرهان. حسب تعريف مركز المسافات المتناسبة : النقطة B هي مركز المسافات المتناسبة للنقطتين M_1 و M_2 المرفوقتين بالمعاملين α_1 و α_2 إذا و فقط إذا كان $\alpha_1\overrightarrow{BM_1} + \alpha_2\overrightarrow{BM_2} = \vec{0}$ أي إذا و فقفط إذا كان :

$$\alpha_1 (b - z_1) + \alpha_2 (b - z_2) = 0$$

■

ملاحظة 15 : ◅ في الحالة الخاصة $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ، النقطة B هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$ و نجد المساواة (المعروفة) : $b = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل 1.IV: زاوية شعاعين.

⊳

و تُعمَّم هذه النتيجة كما يلي :

مبرهنة 23 : ليكن $n \geq 2$ عددًا طبيعيا و لتكن A_1 ، A_2 ، ⋯ ، A_n نقطاً من المستوي لواحقها z_1 ، z_2 ، ⋯ ، z_n على الترتيب. لتكن α_1 ، α_2 ، ⋯ ، α_n أعدادًا حقيقية بحيث $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \neq 0$.
النقطة G هي مركز المسافات المتناسبة للنقط A_i المرفوقة بالمعاملات α_i ، $i = 1, 2, \cdots, n$ ، إذا و فقط إذا حققت لاحقتها z المعادلة :

$$\alpha_1 (z_1 - z) + \alpha_2 (z_2 - z) + \cdots + \alpha_n (z_n - z) = 0$$

البرهان. يكفي إعادة كتابة المعادلة (من تعريف مركز المسافات المتناسبة) $\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$ باستعمال اللاحقة. ■

3.1.IV الزوايا

مبرهنة 24 : لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي بحيث النقطة C تختلف عن A و B ، و لتكن a ، b و c لواحقها على الترتيب.
إحدى قياسات الزاوية $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$ هي : $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}$.

البرهان. نعلم أنّ $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) = \arg(b-c) - \arg(a-c) \pmod{2\pi}$.
لكن $b - c$ هي لاحقة $\overrightarrow{CB}$ و $a - c$ هي لاحقة $\overrightarrow{CA}$ منه $\arg(b-c) = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CB}}\right)$ و $\arg(a-c) = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CA}}\right)$.
و بما أنّ $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CB}}\right) - \left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{CA}}\right) \pmod{2\pi}$ فإنّ : $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right) \pmod{2\pi}$
■

من هنا نستخلص ما يلي :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لازمة 1 : لتكن A ، B و C ثلاث نقط من المستوي بحيث النقطة C تختلف عن A ، و لتكن a ، b و c لواحقها على الترتيب.

- النقط A ، B و C على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $\frac{c-b}{c-a}$ حقيقيا.
- المستقيمان (CA) و (CB) متعامدان إذا و فقط إذا كان $\frac{c-b}{c-a}$ تخيليا صرفا.

البرهان.

- النقط A ، B و C على استقامة واحدة إذا كانت :

$$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = 0 \pmod{2\pi} \quad \text{أو} \quad \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \pi \pmod{2\pi}.$$

حسب المبرهنة السابقة، الزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ معدومة إذا و فقط إذا كان $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = 0 \pmod{2\pi}$

و مستقيمة إذا و فقط إذا كان $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \pi \pmod{2\pi}$.

أي (في الحالتين) إذا و فقط إذا كان $\frac{c-b}{c-a}$ حقيقيا. أنظر التمرين 25 صفحة 91

- المستقيمان (CA) و (CB) متعامدان إذا و فقط إذا كان $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

أي (حسب المبرهنة السابقة) إذا و فقط إذا كان $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \pm\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ أي إذا و فقط إذا كان $\frac{c-b}{c-a}$ تخيليا صرفا.

■

4.1.IV الجداء السلمي

مبرهنة 25 : ليكن $\vec{V_1}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ و $\vec{V_2}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ شعاعين من المستوي $\mathscr{P}$ لاحقتاهما $z_1 = x_1 + \imath y_1$ و $z_2 = x_2 + \imath y_2$ على الترتيب.

العبارة المركبة للجداء السلمي $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2}$ للشعاعين $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ هي $\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = \mathrm{Re}\left(\bar{z}_1\cdot z_2\right)$.

البرهان. لدينا من جهة

$$\vec{V_1}\cdot\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2$$

و من جهة أخرى

$$\bar{z}_1\cdot z_2 = \left(x_1 - \imath y_1\right)\left(x_2 + \imath y_2\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + \left(x_1y_2 - y_1x_2\right)\imath$$

منه النتيجة.

■

2.IV تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب

دُرِست التحويلات النقطية في ما سبق دراسة تحليلية (أي باستخدام الهندسة التحليلية)، و سنحاول فيما يلي إعطاء صِيغ جديدة لها باستعمال الأعداد المركبة، الشيء الذي يُسهِّل العمل و الحسابات المعقدة.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ليكن $\mathscr{P}$ المستوي و $\mathscr{V}$ مجموعة أشعة المستوي.
نسمّي **تحويلا نقطيا** كل تطبيق تقابلي للمستوي $\mathscr{P}$ في نفسه.

$$f:\begin{cases}\mathscr{P}\longrightarrow\mathscr{P}\\ M\longmapsto M'=f(M)\end{cases}$$

يمكن أن نرفق بكل تحويل نقطي f التطبيق g للمستوي المركب في نفسه و الذي يرفق بالعدد المركب z ذي الصورة M ، العدد المركب z' لاحقة النقطة $M'=f(M)$.

$$g:\begin{cases}\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\\ z\longmapsto z'\end{cases}$$

نقول عندئذ أنّ التطبيق g يُمثِّل التحويل النقطي f في المستوي المركب و نقول تجاوُزاً أنّه تحويل نقطي مُعرَّف بالأعداد المركبة.

مثال 24 : ليكن f التحويل النقطي المعرف بالعبارة :

$$f:\begin{cases}\mathscr{P}\longrightarrow\mathscr{P}\\ M(x,y)\longmapsto M'(x',y')\end{cases}\quad\text{حيث}\quad\begin{cases}x'=x^2-y^2\\ y'=2xy\end{cases}$$

إذا كان $z=x+\imath y$ و $z'=x'+\imath y'$ حيث $\imath^2=-1$ فإنّ التطبيق g المرفق بالتحويل f يحقق

$$z'=g(z)=x'+\imath y'=x^2-y^2+2\imath xy=(x+\imath y)^2=z^2$$

أي

$$g:\begin{cases}\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\\ z\longmapsto g(z)=z^2\end{cases}$$

ملاحظة 16 : ◁ يمكن تعيين العبارة المركبة لتحويل نقطي انطلاقًا من عبارته التحليلية و العكس صحيح. ▷

مثال 25 : ليكن g التطبيق الذي عبارته المركبة :

$$g:\begin{cases}\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\\ z\longmapsto g(z)=\imath z+1-\imath\end{cases}$$

لدينا :

$$z'=g(z)=\imath z+1-\imath=\imath(x+\imath y)+1-\imath=(-y+1)+(x-1)\imath$$

أي أنّ : $x'=-y+1$, $y'=x-1$ ، إذن العبارة التحليلية للتحويل f الموافق للتطبيق g هي :

$$f:\begin{cases}\mathscr{P}\longrightarrow\mathscr{P}\\ M(x,y)\longmapsto M'(x',y')\end{cases}\quad\text{حيث}\quad\begin{cases}x'=-y+1\\ y'=x-1\end{cases}$$

1.2.IV الإنسحاب و التحاكي

تعريف 14 :

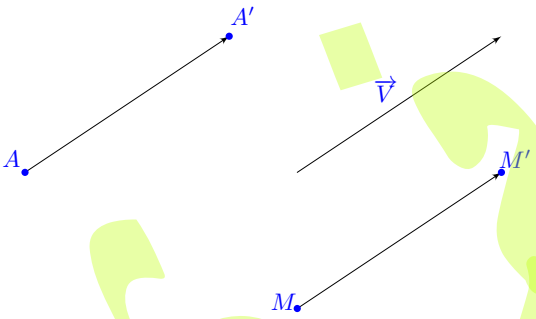
- ليكن $\vec{V}$ شعاعًا من المستوي $\mathscr{P}$.

نسمي **انسحابا** شعاعه $\vec{V}$ ، و نرمز إليه بالرمز $\mathscr{T}_{\vec{V}}$ ، التحويل النقطي للمستوي $\mathscr{P}$ في نفسه و الذي يرفق بكل نقطة M من $\mathscr{P}$ النقطة M' بحيث يكون : $\overrightarrow{MM'}=\vec{V}$.

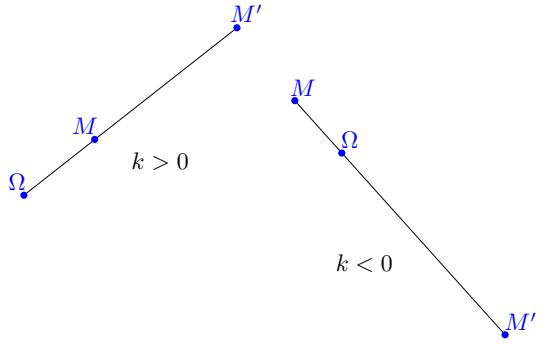
- لتكن Ω نقطة من المستوي و ليكن k عدداً حقيقيا غير معدوم.

التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k ، و الذي نرمز إليه بالرمز $\mathscr{H}(\Omega,k)$ ، هو التحويل النقطي للمستوي $\mathscr{P}$ في نفسه و الذي يرفق بكل نقطة M من $\mathscr{P}$ النقطة M' بحيث يكون : $\overrightarrow{\Omega M'}=k\cdot\overrightarrow{\Omega M}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل 2.IV: الإنسحاب



شكل 3.IV: التحاكي

خواص (مراجعة) :

نُذكّر فيما يلي (بدون برهان) بالخواص الأساسية لكل من الإنسحاب و التحاكي :

- 1• الإنسحاب $\mathscr{T}_{\vec{V}}$ تطبيق تقابلي للمستوي $\mathscr{P}$ في نفسه، و التحويل العكسي له هو الإنسحاب $\mathscr{T}_{-\vec{V}}$.

إذا كان $\vec{V} \neq \vec{0}$ فلا توجد نقطة مضاعفة (صامدة) ، و إذا كان $\vec{V} = \vec{0}$ فإنّ $\mathscr{T}_{\vec{0}} = \mathbb{1}_{\mathscr{P}}$ حيث $\mathbb{1}_{\mathscr{P}}$ هو التحويل الحيادي (المطابق) للمستوي (التحويل الذي يرفق بكل نقطة $M \in \mathscr{P}$ النقطة M نفسها).

تركيب الإنسحابين $\mathscr{T}_{\vec{V}}$ و $\mathscr{T}_{\vec{V'}}$ هو الإنسحاب $\mathscr{T}_{\vec{V}+\vec{V'}}$.

الإنسحاب يحفظ المسافات (نقول أنه **تساوي قياس**) و التحاكي الذي نسبته k يضربها بالعدد $|k|$.

- 2• التحاكي $\mathscr{H}(\Omega, k)$ تطبيق تقابلي للمستوي $\mathscr{P}$ في نفسه ، و التحويل العكسي له هو التحاكي $\mathscr{H}\left(\Omega, \frac{1}{k}\right)$ (له نفس المركز) .

إذن يكون التحاكي تضامنيا إذا و فقط إذا كان $k = \pm 1$.

إذا كان $k \neq 1$ تكون النقطة Ω هي النقطة المضاعفة (الصامدة) الوحيدة ، و إذا كان $k = 1$ فإنّ جميع النقط صامدة (لأنّ $(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \vec{0} \iff \overrightarrow{\Omega M} = k\overrightarrow{\Omega M}$).

تركيب التحاكيين $\mathscr{H}_1(\Omega, k_1)$ و $\mathscr{H}_2(\Omega, k_2)$ (نفس المركز) هو التحاكي $\mathscr{H}(\Omega, k_1 k_2)$ (نفس المركز) .

- 3• تركيب انسحاب و تحاكٍ نسبته k (بأي ترتيب) هو تحاك نسبته k .

مبرهنة 26 : 1• ليكن $\vec{V}$ شعاعاً لاحقته z_0 .

العبارة المركبة للإنسحاب $\mathscr{T}_{\vec{V}}$ الذي شعاعه $\vec{V}$ هي : $z' = z + z_0$.

2• لتكن Ω نقطة من المستوي لاحقتها ω و ليكن k عدداً حقيقيا غير معدوم.

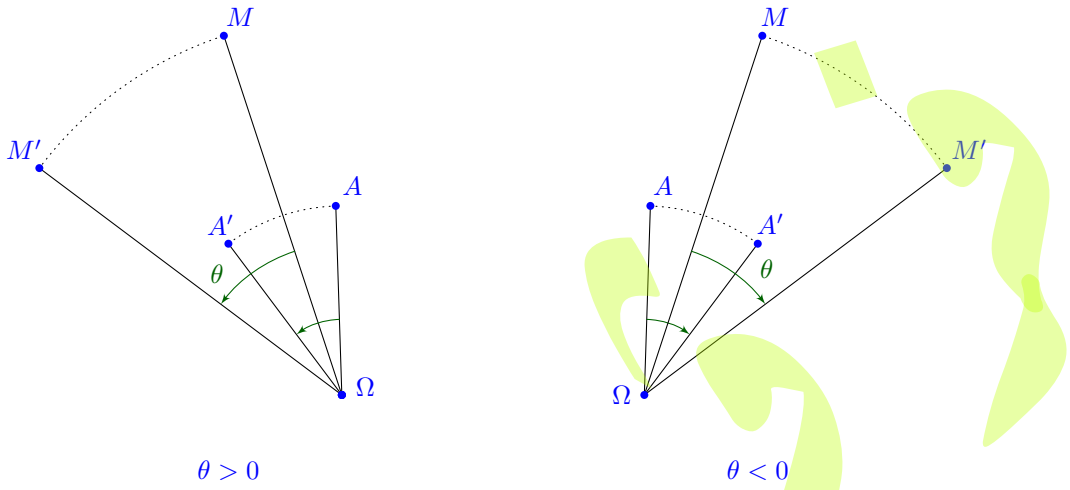
العبارة المركبة للتحاكي $\mathscr{H}(\Omega, k)$ الذي مركزه Ω و نسبته k هي :

$z' - \omega = k(z - \omega)$ (أو $z' = kz + (1-k)\omega$).

البرهان. 1• نضع $\vec{V}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (أي $z_0 = a + \imath b$)، $z = x + \imath y$ و $z' = x' + \imath y'$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 4.IV: الدوران

نعلم أنّ العبارة التحليلية للإنسحاب $\mathscr{T}_{\vec{V}}$ هي : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

و منه :

$$z' = x' + \imath y' = (x + a) + \imath (y + b) = (x + \imath y) + (a + \imath b) = z + z_0$$

• 2 لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M}$ هي $z - \omega$ و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{\Omega M'}$ هي $z' - \omega$ إذن المساواة $\overrightarrow{\Omega M'} = k \cdot \overrightarrow{\Omega M}$ تُكتب : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

■

2.2.IV الدوران

تعريف 15 : لتكن Ω نقطة ثابتة في المستوي $\mathscr{P}$ و θ زاوية موجهة.

نسمي **دوراناً** مركزه Ω و زاويته θ، و الذي نرمز إليه بالرمز $\mathscr{R}(\Omega, \theta)$ ، التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة Ω النقطة نفسها و يرفق بكل نقطة M تختلف عن Ω النقطة M' بحيث : $\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$.

لإيجاد محوّلة نقطة M وفق الدوران $\mathscr{R}(\Omega, \theta)$ ، نرسم قوساً قياسه θ من دائرة مركزها Ω و نصف قطرها ΩM ، فتكون نهايته هي النقطة M' .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وفقك الله تعالى

خواص (مراجعة) :

نُذكّر فيما يلي (بدون برهان) بالخواص الأساسية للدوران :

- 1. يمكن التعبير عن الدوران $\mathscr{R}(\Omega,\theta)$ كتركيب تناظرين عموديين حول مستقيمين إختياريين متقاطعين في النقطة Ω و قيس الزاوية بينهما يساوي $\frac{\theta}{2}$ ، و ذلك بعدد غير منتهٍ من الحالات (بمعنى أنّ أحد المستقيمين إختياري و الآخر يصنع معه الزاوية المعطاة $\frac{\theta}{2}$).
- 2. الدوران $\mathscr{R}(\Omega,\theta)$ تطبيق تقابلي للمستوي $\mathscr{P}$ في نفسه، و تطبيقه العكسي هو الدوران $\mathscr{R}^{-1}(\Omega,-\theta)$.
- 3. يكون الدوران تضامنيا إذا و فقط إذا كانت زاويته معدومة (التطبيق الحيادي) أو كانت زاويته مستقيمة (تناظر بالنسبة إلى نقطة).
- 4. مركز الدوران هو النقطة الصامدة الوحيدة إذا كان $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$.
- 5. تركيب الدورانين $\mathscr{R}_1(\Omega,\theta_1)$ و $\mathscr{R}_2(\Omega,\theta_2)$ (نفس المركز) هو الدوران $\mathscr{R}(\Omega,\theta_1+\theta_2)$ (نفس المركز).
- 6. تركيب انسحاب مع دوران (أو العكس) هو دوران له نفس الزاوية.

مبرهنة 27 : لتكن $\Omega \in \mathscr{P}$ نقطة من المستوي لاحقتها ω و ليكن θ عدداً حقيقيا.
العبارة المركبة للدوران $\mathscr{R}(\Omega,\theta)$ هي $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ (أو $z' = e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta})\omega$).

البرهان. لتكن z و z' لاحقتَيْ M و M' على الترتيب. إذا كان $M \neq \Omega$ فإنّ :

$$\begin{aligned}
M' = \mathscr{R}(\Omega,\theta)(M) &\iff \Omega M = \Omega M' \text{ و } \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta \pmod{2\pi} \\
&\iff |z-\omega| = |z'-\omega| \text{ و } \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \pmod{2\pi} \\
&\iff \left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \pmod{2\pi} \\
&\iff \frac{z'-\omega}{z-\omega} = [1,\theta] = e^{i\theta} \\
&\iff z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)
\end{aligned}$$

في الحالة الخاصة $M = \Omega$ ، فإنّ $M' = \Omega$ أي $z' = z = \omega$ و المساواة $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$ محققة. ■

3.IV التشابه المستوي المباشر

يُعرّف التشابه المستوي المباشر $\mathscr{S}(k,\theta)$ الذي نسبته $k > 0$ و زاويته θ بالعبارة :

$$\forall M, N \in \mathscr{P} \quad : \quad \begin{cases} M'N' = k \cdot MN \\ \left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}\right) = \theta \pmod{2\pi} \end{cases}$$

لكن في بحثنا هذا، سنعطي تعريفا آخر له يُسهّل بعض الشيء دراسته.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

تعريف 16 : **التشابه المباشر** هو التحويل المستوي الذي عبارته المركبه هي :

$$\begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto az+b \end{cases} \quad ; \quad a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}$$

بدايةً، بإمكاننا إثبات ما يلي :

مبرهنة 28 : التشابه المباشر يحافظ على الزوايا الموجهة و النسبة بين المسافات بمعنى : إذا كانت A_1 ، A_2 ، A_3 و A_4 أربع نقط من المستوي $\mathscr{P}$ بحيث $A_1 \neq A_2$ و $A_3 \neq A_4$ و كانت A'_1 ، A'_2 ، A'_3 و A'_4 صورها بالتشابه المباشر $\mathscr{S}(k,\theta)$ فإنّ:

$$\frac{A'_3A'_4}{A'_1A'_2} = \frac{A_3A_4}{A_1A_2} \quad \text{و} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_3A'_4}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}}\right) \pmod{2\pi}$$

البرهان. ليكن $f : z \mapsto az+b$ التمثيل المركب للتشابه $\mathscr{S}(k,\theta)$. لتكن z_1 ، z_2 ، z_3 ، z_4 لواحق النقط A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 على الترتيب و لتكن z'_1 ، z'_2 ، z'_3 ، z'_4 لواحق النقط A'_1 ، A'_2 ، A'_3 ، A'_4 على الترتيب. لدينا : $z'_i = az_i + b$ لأجل $i \in \{1,2,3,4\}$. منه :

$$\begin{cases} z'_2 - z'_1 = a(z_2 - z_1) \\ z'_4 - z'_3 = a(z_4 - z_3) \end{cases}$$

و بما أنّ $a \neq 0$ فإنّ : $\dfrac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1} = \dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$

منه :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{A'_1A'_2}, \overrightarrow{A'_3A'_4}}\right) = \arg\left(\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}}\right) \pmod{2\pi}$$

و

$$\frac{A'_3A'_4}{A'_1A'_2} = \left|\frac{z'_4 - z'_3}{z'_2 - z'_1}\right| = \left|\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right| = \frac{A_3A_4}{A_1A_2}$$

■

مبرهنة 29 :

1. التشابه المباشر $f : z \mapsto az+b$ تحويل تقابلي للمستوي في نفسه و تحويله العكسي هو التشابه المباشر $f^{-1} : z \mapsto \dfrac{1}{a}z - \dfrac{b}{a}$.
2. تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر.

البرهان.

1. بما أنّ $a \neq 0$ فإنّ :

$$z' = az+b \iff az = z' - b \iff z = \frac{z'-b}{a}$$

2. ليكن $f_1 : z \mapsto a_1z + b_1$ و $f_2 : z \mapsto a_2z + b_2$ تشابهين مباشرين. لدينا :

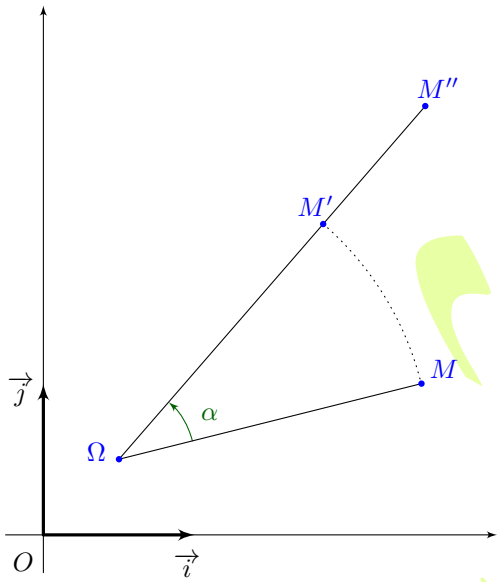
$$f_2(f_1(z)) = f_2(a_1z+b_1) = a_2(a_1z+b_1) + b_2 = a_1a_2z + a_2b_1 + b_2$$

و بوضع $c = a_1a_2$ و نجد $d = a_2b_1 + b_2$ حيث $f_2 \circ f_1 : z \mapsto cz + d$ و هي العبارة المركبة لتشابه مباشر.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل IV.5: التشابه المباشر

نظرية 3 : ليكن $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$. ليكن f التشابه المباشر الذي عبارته المركبة هي $f : z \mapsto az + b$.

- 1 إذا كان $a = 1$ فإنّ f هو الإنسحاب الذي لاحقة شعاعه b .
- 2 إذا كان $a \neq 1$ فإنّه للتشابه المباشر f نقطة صامدة (مضاعفة) وحيدة $(\Omega = f(\Omega))$. Ω تُدعى **مركز التشابه**. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان :
  - α عمدة للعدد المركب a.
  - $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\Omega, \alpha)$ هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α .
  - $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\Omega, |a|)$ هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $|a|$.

  فإنّ f يُكتب على شكل تركيب $\mathscr{R}$ و $\mathscr{H}$: $f = \mathscr{R} \circ \mathscr{H} = \mathscr{H} \circ \mathscr{R}$.
  يُسمى العدد الحقيقي $|a|$ **نسبة التشابه** و العدد α **إحدى قياسات** (أو، اختصارًا، **قياس**) زاوية التشابه.
- 3 إذا كان $a \in \mathbb{R}^*$ فإنّ f هو التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته $|a|$.
- 4 إذا كان $|a| = 1$ فإنّ f هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته α .

البرهان.

1 إذا كان $a = 1$ فإنّ $f(z) = z + b$ و حسب المبرهنة 26 ، f هو الإنسحاب الذي شعاعه b .

2 نفرض $a \neq 1$ و لنبحث عن النقط الصامده بالتحويل f :

لتكن z_0 لاحقة نقطة صامدة. لدينا $z_0 = az_0 + b$ منه $z_0 = \frac{b}{1-a}$ (فرضنا $a \neq 1$!) . لتكن Ω النقطة ذات اللاحقة z_0 . حسب ما سبق، النقطة Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتحويل f . لتكن M النقطة ذات اللاحقة z و لتكن M' النقطة ذات اللاحقة $z' = f(z) = az + b$. لدينا : $z' - z_0 = a(z - z_0)$. لتكن α عمدة للعدد a ، $\mathscr{H}(\Omega, |a|)$ التحاكي و $\mathscr{R}(\Omega, \alpha)$ الدوران $\mathscr{R}$.

لنُثبت أنّ f يُكتب على شكل تركيب $\mathscr{H}$ و $\mathscr{R}$. لتكن z_1 لاحقة $\mathscr{R}(M)$ و z_2 لاحقة $\mathscr{H}(\mathscr{R}(M))$. حسب

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

المبرهنة 26 صفحة 55 لدينا :

$$z_1 - z_0 = e^{\imath\alpha}(z - z_0)$$
$$z_2 - z_0 = |a|(z_1 - z_0)$$

إذن

$$z_2 - z_0 = |a| e^{\imath\alpha}(z - z_0) = a(z - z_0)$$

و هذا يعني أنّ $z_2 = z'$ أي أنّ z_2 هي لاحقة النقطة $f(M)$ أو بتعبير آخر $f = \mathscr{H} \circ \mathscr{R}$.

نثبت بنفس الطريقة أنّ $f = \mathscr{R} \circ \mathscr{H}$.

■

تطبيق 5 : عيّن في كل حالة طبيعة و عناصر التحويل المعرّف بالصيغة المركبة :

- $f_1 : z \mapsto \imath z + \imath - 1$
- $f_2 : z \mapsto (1+\imath)z + 2 - 4\imath$
- $f_3 : z \mapsto (1-\imath)z$
- $f_4 : z \mapsto -2z + 1 - \imath$

الحلّ.

- f_1 دوران لأنّ $a = \imath = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

مركزه النقطة Ω التي لاحقتها $z_0 = \frac{\imath - 1}{1 - \imath} = -1$ أي $\Omega(-1, 0)$.

إذن f_1 هو **الدوران** $\mathscr{R}\left((-1,0), \frac{\pi}{2}\right)$.

- f_2 تشابه لأنّ $a = 1 + \imath = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

لاحقة النقطة الصامدة الوحيدة Ω هي $z_0 = \frac{2 - 4\imath}{1 - (1+\imath)} = 4 + 2\imath$ أي أنّ $\Omega(4, 2)$.

إذن f_2 هو **التشابه** $\mathscr{S}\left((4,2), \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

- f_3 تشابه لأنّ $a = 1 - \imath = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.

لاحقة النقطة الصامدة الوحيدة Ω هي $z_0 = \frac{0}{1 - (1-\imath)} = 0$ أي أنّ $\Omega(0, 0)$.

إذن f_3 هو **التشابه** $\mathscr{S}\left(O, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

- f_4 تحاكي لأنّ $a = -2 \in \mathbb{R}^*$.

لاحقة النقطة الصامدة الوحيدة Ω هي $z_0 = \frac{1 - \imath}{1 - (-2)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\imath$ أي أنّ $\Omega\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

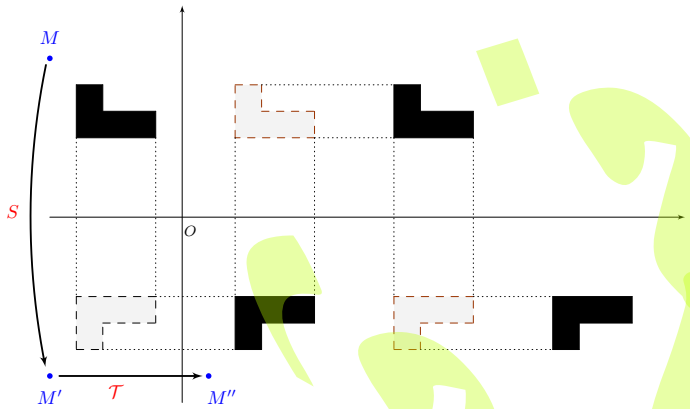
إذن f_4 هو **التحاكي** $\mathscr{H}\left(\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), -2\right)$.

■

تطبيق 6 : A ، M و P ثلاث نقط من المستوي لواحقها هي 1 ، z و z^2 على الترتيب.
أوجد الأعداد المركبة z لكي يكون المثلث AMP قائما في A و متساوي الساقين.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

شكل IV.7



شكل IV.6

الحلّ. لكي يُحقق العدد z المطلوب، يجب و يكفي أن ننتقل من M إلى P بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\pm\frac{\pi}{2}$.
العدد المركب الذي طويلته 1 و $-\frac{\pi}{2}$ عمدة له هو $-\imath$ ، و العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له هو $\imath$.
فالأعداد z التي نبحث عنها هي الأعداد التي تحقق $z^2-1=-\imath(z-1)$ أو $z^2-1=\imath(z-1)$
أي $(z-1)(z+1+\imath)=0$ أو $(z-1)(z+1-\imath)=0$.
نجد : $z=1$ (A ، M ، P متطابقة) و $z=-1+\imath$ و $z=-1-\imath$ ■

1.3.IV تحويل نقطي آخر : الإنزلاق

لندرس التحويل النقطي المعرف بالعبارة المركبة : $f:\begin{cases}\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}\\ z\longmapsto f(z)=\overline{z}+u\end{cases}$ ؛
حيث u عدد حقيقي غير معدوم: $u\in\mathbb{R}^*$.
لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها $z=x+\imath y$ ، حيث $x,y\in\mathbb{R}$. النقطة M' التي لاحقتها $\overline{z}=x-\imath y$ هي نظيرة النقطة M بالنسبة لمحور الفواصل (Ox) (الذي سمّيناه محور الأعداد الحقيقية). لتكن M'' النقطة التي لاحقتها $f(z)=\overline{z}+u$ (أي صورة النقطة M بالتحويل f). لاحقة الشعاع $\overrightarrow{M'M''}$ هي $f(z)-\overline{z}=u$ ، و بما أنّ $u\in\mathbb{R}^*$ فإنّ $\overrightarrow{M'M''}=u\vec{\imath}$.
التحويل $M\longmapsto M''$ المعرّف بالعبارة المركبة f عبارة عن تركيب الإنسحاب $\mathscr{T}$ الذي شعاعه $u\vec{\imath}$ مع التناظر العمودي S بالنسبة لمحور الفواصل (Ox) : $\mathscr{T}\circ S$. هذا التحويل يُدعى **الإنزلاق ذو المحور** (Ox) .
لدينا :

$$f\circ f(z)=f(\overline{z}+u)=\overline{\overline{z}+u}+u$$
$$=z+\overline{u}+u=z+2u\ ,\qquad (\text{لأنّ } u \text{ حقيقي } \overline{u}=u)$$

هذا يعني أنّ النقطة $f\circ f(z)$ هي صورة النقطة z بالإنسحاب الذي شعاعه $2u\vec{\imath}$.
الشكل IV.6 يمثل بعض الصور المتتابعة للمضلع الأسود بالإنزلاق f و الشكل IV.7 يبيّن بعض الزخارف التي يمكن الحصول عليها بتطبيق إنزلاق بصفة متتابعة (تكرارية).

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

IV

تمارين محلولة

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

5 اختبر استيعابك للدرس

الهدف من الأسئلة الآتية هو اختبار مدى استيعاب الطالب للدرس و فهمه للطرق المتبعة في إثبات خاصية أو إيجاد صيغة أو علاقة ما.
إذا أخفق الطالب في الجواب أو عجز عن الردّ، بعد مدة تفكير و بحث لا يجب أن تقلّ عن 10 دقائق، فلا ينبغي عليه النظر إلى الحل مباشرة بل بإمكانه بدايةً النظر في الملخص الموجود صفحة د ، و إذا لم يجد ضالته فيه، يراجع الدرس ؛ فإذا لم يساعده ذلك كله، يتأمّل الحل بكلّ تركيز و لا ينسى أن يُعاود المحاولة بعد أيام أو أسابيع و لا يتوقف حتى يتمكن من السؤال ... فالمثابرة أساس النجاح.

١ علماً أنه : $\forall z, z' \in \mathbb{C}\ ,\ |z+z'| \leq |z| + |z'|$ (المتباينة المثلثية) ، أثبت أنّ :
$\forall z, z' \in \mathbb{C}\ ,\quad \big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'|$

الجواب. ليكن z و z' عددين مركبين. المتباينة المثلثية تسمح لنا بكتابة :
$|(z+z') + (-z)| \leq |z+z'| + |-z|$ أي $|z'| - |z| \leq |z+z'|$.
و بنفس الطريقة، نثبت أنّ $|z'| - |z| \leq |z+z'|$ أي $-(|z'| - |z|) \leq |z+z'|$.
و بما أنّ $\big||z'| - |z|\big|$ يساوي إمّا $|z'| - |z|$ أو $|z| - |z'|$ فإنّ :
$\forall z, z' \in \mathbb{C}\ ,\quad \big||z| - |z'|\big| \leq |z+z'|$
■

٢ إبحث عن الخطأ في الإثبات الآتي :
« ليكن a و b عددين مركبين بحيث $a^2 + b^2 = 0$. بما أنّ $a^2 \geq 0$ و $b^2 \geq 0$ فإنّ المجموع $a^2 + b^2$ لا يكون معدوماً إلاّ إذا كان $a^2 = 0$ و $b^2 = 0$ أي إذا كان $a = b = 0$.
(هذا الإثبات خاطئ لأنه مثلاً إذا كان $a = 1$ و $b = \imath$ فإنّ $a^2 + b^2 = 0$ لكن $a \neq 0$ و $b \neq 0$). »

الجواب. مربع عدد مركب ليس، في الحالة العامة، عدداً حقيقياً إذن لا يمكن القول أنه موجب أو معدوم. مثلاً $\imath^2 = -1$.
السبب يرجع إلى أنّ علاقة الترتيب $\leq$ (أو $\geq$) ليس لها معنى في $\mathbb{C}$ كما تم شرحه في الدرس صفحة 5 .
■

٣ كيف يتم تحديد الشكل المثلثي (الأسي) لعدد مركب ؟ أكتب $1 + \imath$ و -3 على الشكل الأسي.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الجواب. الطريقة بسيطة : نضع طويلة العدد كعامل مشترك و يبقى الجزء « $e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta$ ».
مثلاً، بما أنّ $|1+\imath| = \sqrt{2}$ فإنّ :

$$1+\imath = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$$

بالمثل، الشكل الأسي للعدد -3 هو : $-3 = 3\times(-1) = 3e^{\imath\pi}$.
يجب الحذر من الكتابة $-3e^{\imath 0}$ التي ليست الشكل المثلثي للعدد -3 لأنّ الطويلة يجب أن تكون عدداً حقيقياً موجباً. ■

٤ أوجد، مع الشرح، الجذور الرابعة للعدد -16 .

الجواب. ليكن z جذراً رابعاً للعدد -16 . لدينا :

بدايةً، نكتب -16 على الشكل الأسي : $z^4 = -16 \iff z^4 = 16e^{\imath\pi}$
ثمّ نكتب الطرف الأيمن للمعادلة على شكل جذر رابع : $\iff z^4 = \left(2e^{\imath\pi/4}\right)^4$
بعدها، نُحوّل المعادلة إلى الشكل $\omega^4 = 1$: $\iff \left(\frac{z}{2e^{\imath\pi/4}}\right)^4 = 1$
في الأخير، نُطبّق نتيجة الدرس حول جذور الوحدة : $\iff \exists k\in\{0,1,2,3\} \mid \frac{z}{2e^{\imath\pi/4}} = e^{2\imath k\pi/4}$
$\iff \exists k\in\{0,1,2,3\} \mid z = 2e^{(2k+1)\imath\pi/4}$

لإتمام الحل، نُعوّض عن k بالقِيَم 0 ، 1 ، 2 و 3 . نجد أنّ الحلول هي : $2e^{\pm\imath\pi/4}$ و $2e^{\pm 3\imath\pi/4}$. ■

٥ a ، b ، c أعداد مركبة بحيث $a\neq 0$. ليكن z_1 و z_2 حلّي المعادلة $az^2+bz+c=0$ ذات المجهول $z\in\mathbb{C}$. عبِّر عن $s = z_1+z_2$ و $p = z_1z_2$ بدلالة المعاملات a ، b و c .
إذا لم نكن نحفظ هذه الصِيَغ، فكيف يمكن إيجادها بسرعة ؟

الجواب. نعلم أنّ $s = -\frac{b}{a}$ و $p = \frac{c}{a}$ و يمكن إثبات ذلك كما يلي :

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2) = az^2 - a(z_1+z_2)z + az_1z_2 = az^2 - asz + ap$$

هذه المساواة صحيحة لكل عدد مركب $z\in\mathbb{C}$ ، إذن بالمطابقة ينتج : $b=-as$ و $c=ap$. ■

٦ a ، b ، c أعداد مركبة بحيث $a\neq 0$. أكتب على الشكل النموذجي العبارة az^2+bz+c .
طبق هذه النتيجة على z^2+8z-6 و $5z^2-2z+1$.

الجواب. بدايةً، نضع a كعامل مشترك $a\left(z^2+\frac{b}{2a}z+\frac{c}{a}\right)$. ثمّ نتبع طريقة إتمام المربع :

$$az^2+bz+c = a\left[z^2+\frac{b}{2a}a+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

إذن : $z^2+8z-6 = (z+4)^2 - 4^2 - 6 = (z+4)^2 - 22$
و $5z^2-2z+1 = 5\left[z^2-\frac{2}{5}z+\frac{1}{5}\right] = 5\left[\left(z-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\right] = 5\left[\left(z-\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}\right]$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

■

٧ إشرح طريقة كتابة الجداء $\sin^m x \cos^n x$ ، مع $m, n \in \mathbb{N}$ و $x \in \mathbb{R}$ ، على شكل عبارة خطية .
(يمكن شرحها في الحالة $m = 4$ و $n = 3$) .

الجواب. نشرح الطريقة في الحالة $m = 4$ و $n = 3$. ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا :

بدايةً، نطبق صِيغ **أولر** : $$\sin^4 x \cos^3 x = \left(\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^4 \left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^7}\left(e^{\imath x} - e^{-\imath x}\right)^4 \left(e^{\imath x} + e^{-\imath x}\right)^3$$

بعدها، دستور ثنائي الحد : $$= \frac{1}{2^7}\left(e^{4\imath x} - 4e^{2\imath x} + 6 - 4e^{-2\imath x} + e^{-4\imath x}\right)\left(e^{3\imath x} + 3e^{\imath x} + 3e^{-\imath x} + e^{-3\imath x}\right)$$

ثمّ، النشر و الترتيب : $$= \frac{1}{2^7}\left(e^{7\imath x} - e^{5\imath x} - 3e^{3\imath x} + 3e^{\imath x} + 3e^{-\imath x} - 3e^{-3\imath x} - e^{-5\imath x} + e^{7\imath x}\right)$$

في الأخير، صِيغ **أولر** : $$= \frac{1}{2^6}\left(\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos x\right)$$

■

٨ x و y عددان حقيقيان. أكتب العدد $e^{\imath x} + e^{\imath y}$ على الشكل الأسي مع الشرح.
استنتج الشكل الأسي للعدد $e^{\imath x} - e^{\imath y}$.

الجواب. نتبع طريقة «الزاوية النصف» و نضع $e^{\imath(x+y)/2}$ كعامل مشترك فيكون :

$$e^{\imath x} + e^{\imath y} = e^{\imath(x+y)/2}\left(e^{\imath(x-y)/2} + e^{-\imath(x-y)}\right) = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{\imath(x+y)/2}$$

و بالتالي :

- إذا كان $\cos\frac{x-y}{2} = 0$ فإنّ $e^{\imath x} + e^{\imath y} = 0$ (الشكل الأسي غير معرف) ؛
- إذا كان $\cos\frac{x-y}{2} > 0$ فإنّ الشكل الأسي للعدد $e^{\imath x} + e^{\imath y}$ هو $2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{\imath(x+y)/2}$ ؛
- و إذا كان $\cos\frac{x-y}{2} < 0$ فإنّ الشكل الأسي للعدد $e^{\imath x} + e^{\imath y}$ هو $-2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{\imath\pi+\imath(x+y)/2}$.

و بما أنّ $e^{\imath x} - e^{\imath y} = e^{\imath x} + e^{\imath(y+\pi)}$ ، فحسب ما سبق نستنتج أنّ :

- $e^{\imath x} - e^{\imath y} = 0$ إذا كان $\frac{x-y-\pi}{2} = 0$ (الشكل الأسي غير معرف) ؛
- الشكل الأسي للعدد $e^{\imath x} + e^{\imath y}$ هو $2\cos\left(\frac{x-y-\pi}{2}\right)e^{\imath(x+y+\pi)/2}$ أي $2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{\imath(x+y+\pi)/2}$
(لأنّ $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$) إذا كان $\cos\frac{x-y-\pi}{2} > 0$ ؛
- و الشكل الأسي للعدد $e^{\imath x} + e^{\imath y}$ هو $-2\cos\left(\frac{x-y-\pi}{2}\right)e^{\imath\pi+\imath(x+y+\pi)/2}$ أي $-2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{\imath\pi+\imath(x+y+\pi)/2}$
(لأنّ $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin t$) إذا كان $\cos\frac{x-y-\pi}{2} < 0$.

■

٩ z عدد مركب و z' صورته بالدوران الذي لاحقة مركزه $\imath$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$. عبِّر عن z' بدلالة z .

الجواب. نعلم أنّ $z' - \imath = e^{\imath\pi/4}(z - \imath)$ و بما أنّ $e^{\imath\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\imath$ فإنّ :

$$z' = \imath + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right)(z - \imath) = \frac{\sqrt{2} + \imath\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2} + \imath\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2}$$

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

http ://tinyurl.com/Malki1718

6 تمارين تطبيقية

1.VI مجموعة الأعداد المركبة

1 ☼ أنجز الحسابات التالية :

1. $(1+\imath)^2$
2. $(3-\imath)^2$
3. $(3-2\imath)^3$
4. $\left(\frac{1+\imath}{1-\imath}\right)^{32}$
5. $(4-5\imath)\cdot(6+3\imath)$
6. $(2+3\imath)^3\cdot(2-3\imath)^3$
7. $\frac{(1+\imath)(4+3\imath)}{(5-\imath)(2+\imath)}$
8. $\frac{2+\imath}{3-\imath}+\frac{3-\imath}{2+\imath}$

الحلّ.

1. $(1+\imath)^2 = 1^2+2\times1\times\imath+\imath^2 = 1+2\imath-1 = \boxed{2\imath}$
2. $(3-\imath)^2 = 3^2-2\times3\times\imath+\imath^2 = 9-6\imath-1 = \boxed{8-6\imath}$
3. $(3-2\imath)^3 = 3^3-3\times3^2\times2\imath+3\times3(2\imath)^2-(2\imath)^3$
$= 27-54\imath-36+8\imath = \boxed{-9-46\imath}$
4. لدينا : $\frac{1+\imath}{1-\imath} = \frac{(1+\imath)^2}{1^2+(-1)^2} = \frac{2\imath}{2} = \imath$
منه : $\left(\frac{1+\imath}{1-\imath}\right)^2 = \imath^{32} = (\imath^4)^8 = 1^8 = \boxed{1}$
5. $(4-5\imath)\cdot(6+3\imath) = 4\times6+4\times3\imath-5\imath\times6-5\imath\times3\imath$
$= 24+12\imath-30\imath-15\imath^2 = 24-18\imath+15 = \boxed{39-18\imath}$
6. نضع $a = 2+3\imath$ فيكون $\overline{a} = 2-3\imath$ و بالتالي :

$$(2+3\imath)^3\cdot(2-3\imath)^3 = a^3\cdot\overline{a^3} = (a\overline{a})^3 = \left(|a|^2\right)^3$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$= \left(2^2+3^2\right)^3 = 13^3 = \boxed{2197}$$

•7 $$\frac{(1+\imath)(4+3\imath)}{(5-\imath)(2+\imath)} = \frac{1\times4+1\times3\imath+\imath\times4+\imath\times3\imath}{5\times2+5\times\imath-\imath\times2-\imath^2}$$
$$= \frac{4+3\imath+4\imath+3\imath^2}{10+5\imath-2\imath+1} = \frac{4+7\imath-3}{11+3\imath} = \frac{1+7\imath}{11+3\imath}$$
$$= \frac{(1+7\imath)\cdot(11-3\imath)}{11^2+3^2} = \frac{1\times11+1\times(-3\imath)+7\imath\times11+7\imath\times(-3\imath)}{130}$$
$$= \frac{11-3\imath+77\imath-21\imath^2}{130} = \frac{11+74\imath+21}{130} = \frac{32+74\imath}{130} = \boxed{\frac{16}{65}+\frac{37}{65}\imath}$$

•8 $$\frac{2+\imath}{3-\imath}+\frac{3-\imath}{2+\imath} = \frac{(2+\imath)(3+\imath)}{3^2+(-1)^2}+\frac{(3-\imath)(2-\imath)}{2^2+1^2}$$
$$= \frac{2\times3+2\times\imath+\imath\times3+\imath^2}{10}+\frac{3\times2+3\times(-\imath)-\imath\times2+\imath^2}{5}$$
$$= \frac{6+5\imath-1}{10}+\frac{6-5\imath-1}{5} = \frac{5+5\imath}{10}+\frac{5-5\imath}{5}$$
$$= \frac{1+\imath}{2}+1-\imath = \frac{1+\imath+2-2\imath}{2} = \frac{3-\imath}{2} = \boxed{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\imath}$$

■

2 ☼ أكتب على الشكل الجبري الأعداد :

•1 $\frac{3+6\imath}{3-4\imath}$ •2 $\left(\frac{1+\imath}{2-\imath}\right)^2+\frac{3+6\imath}{3-4\imath}$ •3 $\frac{2+5\imath}{1-\imath}+\frac{2-5\imath}{1+\imath}$

الحلّ. •1 لدينا :

$$\frac{3+6\imath}{3-4\imath} = \frac{(3+6\imath)(3+4\imath)}{(3-4\imath)(3+4\imath)} = \frac{9+12\imath+18\imath-24}{3^2+4^2} = \frac{-15+30\imath}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\imath$$

•2

لدينا : $$\frac{1+\imath}{2-\imath} = \frac{(1+\imath)(2+\imath)}{(2-\imath)(2+\imath)} = \frac{2+\imath+2\imath-1}{2^2+1^2} = \frac{1+3\imath}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}\imath$$

منه : $$\left(\frac{1+\imath}{2-\imath}\right)^2 = \left(\frac{1+3\imath}{5}\right)^2 = \frac{(1+3\imath)^2}{5^2} = \frac{1+6\imath-9}{25} = \frac{-8+6\imath}{25} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}\imath$$

منه : $$\frac{3+6\imath}{3-4\imath}+\left(\frac{1+\imath}{2-\imath}\right)^2 = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\imath-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}\imath = \frac{-15+30\imath}{25}+\frac{-8+6\imath}{25} = \frac{-23+36\imath}{25}$$
$$= -\frac{23}{25}+\frac{36}{25}\imath$$

•3 نضع $a = \frac{2+5\imath}{1-\imath}$ فيكون $\overline{a} = \frac{2-5\imath}{1+\imath}$ و بالتالي : $\frac{2+5\imath}{1-\imath}+\frac{2-5\imath}{1+\imath} = a+\overline{a} = 2\,\mathrm{Re}(a)$. لكن :

$$a = \frac{2+5\imath}{1-\imath} = \frac{(2+5\imath)(1+\imath)}{(1-\imath)(1+\imath)} = \frac{2+2\imath+5\imath-5}{1^2+1^2} = \frac{-3+7\imath}{2} = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\imath$$

إذن :

$$\frac{2+5\imath}{1-\imath}+\frac{2-5\imath}{1+\imath} = a+\overline{a} = 2\,\mathrm{Re}(a) = 2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\imath\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

■

VI

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

3 ☼ أكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري

1. $\dfrac{2+\imath}{\imath}$
2. $\dfrac{1}{1-4\imath}$
3. $\dfrac{3+2\imath}{2-5\imath}$
4. $\dfrac{(1+2\imath)(-2+5\imath)}{(7+3\imath)(-12+\imath)}$
5. $\dfrac{\imath+7}{3+7\imath}+\dfrac{1-\imath}{1+\imath}$
6. $\dfrac{(1+\imath)^3}{1-\imath}+\dfrac{(1-\imath)^4}{(1+\imath)^2}$

الحل.

1. $$\frac{2+\imath}{\imath}=\frac{(2+\imath)(-\imath)}{-\imath^2}=\frac{-2\imath-\imath^2}{1}=\boxed{1-2\imath}$$

2. $$\frac{1}{1-4\imath}=\frac{1+4\imath}{1^2+4^2}=\frac{1+4\imath}{17}=\boxed{\frac{1}{17}+\frac{4}{17}\imath}$$

3. $$\frac{3+2\imath}{2-5\imath}=\frac{(3+2\imath)(2+5\imath)}{2^2+5^2}=\frac{3\cdot 2+3\cdot 5\imath+2\cdot 2\imath+2\imath\cdot 5\imath}{29}$$
$$=\frac{6+15\imath+4\imath+10\imath^2}{29}=\frac{6+19\imath-10}{29}=\frac{-4+19\imath}{29}=\boxed{-\frac{4}{29}+\frac{19}{29}\imath}$$

4. $$\frac{(1+2\imath)(-2+5\imath)}{(7+3\imath)(-12+\imath)}=\frac{-2+5\imath-4\imath+10\imath^2}{-84+7\imath-36\imath+3\imath^2}=\frac{-2+\imath-10}{-84-29\imath-3}$$
$$=\frac{-12+\imath}{-87-29\imath}=\frac{(-12+\imath)(-87+29\imath)}{(-87)^2+29^2}$$
$$=\frac{1044-348\imath-87\imath+29\imath^2}{8410}=\frac{1044-435\imath-29}{8410}$$
$$=\frac{1015-435\imath}{8410}=\boxed{\frac{7}{58}-\frac{3}{58}\imath}$$

5. $$\frac{\imath+7}{3+7\imath}+\frac{1-\imath}{1+\imath}=\frac{(7+\imath)(3-7\imath)}{3^2+7^2}+\frac{(1-\imath)^2}{1^2+1^2}$$
$$=\frac{21-49\imath+3\imath-7\imath^2}{58}+\frac{1-2\imath-1}{2}=\frac{21-46\imath+7}{58}-\imath$$
$$=\frac{28-46\imath-58\imath}{58}=\frac{28-104\imath}{58}=\boxed{\frac{14}{29}-\frac{52}{29}\imath}$$

6. $$\frac{(1+\imath)^3}{1-\imath}+\frac{(1-\imath)^4}{(1+\imath)^2}=\frac{(1+\imath)^4}{1^2+1^2}+\frac{(1-\imath)^4\overline{(1+\imath)^2}}{\left(1^2+1^2\right)^2}$$
$$=\frac{\left((1+\imath)^2\right)^2}{2}+\frac{(1-\imath)^6}{4}=\frac{(1+2\imath-1)^2}{2}+\frac{\left((1-\imath)^2\right)^3}{4}$$
$$=\frac{(2\imath)^2}{2}+\frac{(-2\imath)^3}{4}=\frac{-4}{2}+\frac{8\imath}{4}=\boxed{-2+2\imath}$$

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

4 ☼

1• نضع $j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath$. أحسب j^2 .

2• إستنتج أنّ : $1+j+j^2=0$ ؛ $j^3=1$ و $\frac{1}{j}=j^2=\bar{j}$ ($\bar{j}$ هو مرافق j) .

3• أحسب الأعداد الآتية :

(ا) $j(j+1)$ (ج) $\frac{1-\imath}{1-j^2}$ (ه) $\frac{1-j}{(1+\imath)^2}$

(ب) $\frac{j}{j^2+1}$ (د) $\frac{1+j}{(1-\imath)^2}$ (و) $\frac{j+1}{j-1}$

الحلّ.

1• لدينا :

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-2\imath\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2• حسب ما سبق :

$$1+j+j^2=1-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

منه : $(1-j)\left(1+j+j^2\right)=0$ أي $1-j^3=0$ أي $j^3=1$.

بتعبير آخر: $j\times j^2=1$ أي $j^2=\frac{1}{j}$.

و بما أنّ $|j|=1$ فإنّ $\bar{j}=\frac{1}{j}=j^2$.

3•

(ا) $j(j+1)=j^2+j=\boxed{-1}$

(ب) $\frac{j}{j^2+1}=\frac{j}{-j}=\boxed{-1}$

(ج) $\frac{1-\imath}{1-j^2}=\frac{1-\imath}{1+\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-2\imath}{3+\imath\sqrt{3}}=\frac{(2-2\imath)\left(3-\imath\sqrt{3}\right)}{3^2+\sqrt{3}^2}$

$=\frac{6-2\imath\sqrt{3}-6\imath+2\sqrt{3}\imath^2}{12}=\frac{6-2\imath\left(3+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}}{12}=\boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{6}-\imath\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$

(د) $\frac{1+j}{(1-\imath)^2}=\frac{-j^2}{1-2\imath-1}=\frac{j^2}{2\imath}=-\frac{1}{2}\imath j^2=-\frac{1}{2}\imath\left(-\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}\imath}$

(ه) $\frac{1-j}{(1+\imath)^2}=\frac{1+\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2\imath-1}=-\frac{1}{2}\imath\left(\frac{3}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}\imath}$

(و) $\frac{j+1}{j-1}=\frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}}=\frac{(j+1)\left(j^2-1\right)}{(j-1)\left(j^2-1\right)}$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$= \frac{j^3 + j^2 - j - 1}{j^3 - (j^2 + j) + 1} = \frac{1 + (-j - 1) - j - 1}{1 - (-1) + 1} = \boxed{\frac{-1 - 2j}{3}}$$

■

5 z عدد مركب حيث $z = \frac{\sqrt{3}+\imath}{\sqrt{3}-\imath} + \frac{\sqrt{3}-\imath}{\sqrt{3}+\imath} + \imath - 1$

أكتب z على شكله الجبري ثم أحسب $z + \frac{1}{z}$.

الحلّ. نضع $a = \frac{\sqrt{3}+\imath}{\sqrt{3}-\imath}$ فيكون $z = a + \frac{1}{a} + \imath - 1$.

لدينا :
$$a = \frac{\sqrt{3}+\imath}{\sqrt{3}-\imath} = \frac{\left(\sqrt{3}+\imath\right)^2}{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \frac{3 + 2\imath\sqrt{3} - 1}{4} = \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$

منه :
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي :
$$z = \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2} + \imath - 1 = \imath$$

و
$$z + \frac{1}{z} = \imath + \frac{1}{\imath} = \imath - \imath = 0$$

■

6 z عدد مركب حيث $z = 3 - 2\imath$. ضع العدد المركب $\frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1}$ على شكله الجبري.

الحلّ.

لدينا :
$$z^2 = (3 - 2\imath)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times 2\imath + (2\imath)^2 = 9 - 12\imath - 4 = 5 - 12\imath$$

منه :
$$z^4 = \left(z^2\right)^2 = (5 - 12\imath)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 12\imath + (12\imath)^2$$
$$= 25 - 120\imath - 144 = -119 - 120\imath$$

و بالتالي :
$$\frac{z^2 + z + 1}{z^4 - 1} = \frac{5 - 12\imath + 3 - 2\imath + 1}{-119 - 120\imath - 1} = \frac{9 - 14\imath}{-120 - 120\imath} = -\frac{1}{120} \cdot \frac{9 - 14\imath}{1 + \imath}$$
$$= -\frac{1}{120} \cdot \frac{(9 - 14\imath)(1 - \imath)}{1^2 + 1^2} = -\frac{1}{120} \cdot \frac{9 - 9\imath - 14\imath + 14\imath^2}{2}$$
$$= -\frac{1}{240}(-5 - 23\imath) = \boxed{\frac{1}{48} + \frac{23}{240}\imath}$$

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

7 z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1 = \dfrac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}}$ و $z_2 = \dfrac{\imath}{2\imath\sqrt{3}-2}$.

أكتب الأعداد الآتية على شكلها الجبري :

1. z_1
2. z_2
3. $z_1 + z_2$
4. $z_1 \cdot z_2$
5. $\dfrac{z_1}{z_2}$

الحلّ.

1. $$z_1 = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\imath\sqrt{3}\right)^2}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1+2\imath\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-2+2\imath\sqrt{3}}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. $$z_2 = \frac{\imath}{-2+2\imath\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\imath}{-1+\imath\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\imath\left(-1-\imath\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-\imath}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\imath}$$

3. $$z_1 + z_2 = -\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\imath = \boxed{\frac{\sqrt{3}-4}{8}+\imath\frac{4\sqrt{3}-1}{8}}$$

4. $$z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\imath\right) = \frac{1}{16}\left(-1+\imath\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\imath\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(-\sqrt{3}+\imath+3\imath+\sqrt{3}\right) = \boxed{\frac{1}{4}\imath}$$

5. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\imath} = 4\cdot\frac{-1+\imath\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\imath} = 4\cdot\frac{\left(-1+\imath\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+\imath\right)}{\sqrt{3}^2+1^2}$$
$$= 4\cdot\frac{-\sqrt{3}-\imath+3\imath-\sqrt{3}}{4} = \boxed{-2\sqrt{3}+2\imath}$$

■

8 ليكن a و b عددين مركبين حيث : $a = \dfrac{1+\imath\sqrt{2}}{1-\imath\sqrt{2}}$ و $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}-\imath}$.

أكتب على الشكل الجبري كلاً من : a ، b ، $a+b$ ، $a-b$ ، ab و $\dfrac{a}{b}$

الحلّ. لدينا :

$$a = \frac{1+\imath\sqrt{2}}{1-\imath\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\imath\sqrt{2}\right)\left(1+\imath\sqrt{2}\right)}{\left(1-\imath\sqrt{2}\right)\left(1+\imath\sqrt{2}\right)} = \frac{1+2\imath\sqrt{2}-2}{1+2} = \boxed{-\frac{1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}-\imath} = \frac{\sqrt{2}+\imath}{\left(\sqrt{2}-\imath\right)\left(\sqrt{2}+\imath\right)} = \frac{\sqrt{2}+\imath}{2+1} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\imath}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منه :

$$a+b=-\frac{1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\imath=\boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{3}+\imath\frac{1+2\sqrt{2}}{3}}$$

$$a-b=-\frac{1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\imath=\boxed{-\frac{\sqrt{2}+1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}-1}{3}}$$

$$ab=\left(-\frac{1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\imath\right)=-\frac{\sqrt{2}}{9}-\frac{1}{9}\imath+\frac{4}{9}\imath-\frac{2\sqrt{2}}{9}=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\imath}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{-\frac{1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}-\imath}}=\left(-\frac{1}{3}+\imath\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\sqrt{2}-\imath\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\imath+\frac{4}{3}\imath+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{3}\imath}$$

■

9 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a=2\imath$ ، $b=-\sqrt{3}+\imath$ و $c=-\sqrt{3}-\imath$ على الترتيب.

1• أكتب الأعداد a ، b و c على الشكل الأسي ثمّ علم النقط A ، B و C في المستوي.

2• ليكن $Z=\frac{a-b}{c-b}$.

(ا) أكتب Z على الشكل الجبري ثمّ الأسي.

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

الحلّ. 1• لدينا :

$$a=2\imath=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+\imath\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{\imath\pi/2}$$

$$b=-\sqrt{3}+\imath=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+\imath\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2e^{5\imath\pi/6}$$

$$c=-\sqrt{3}-\imath=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\imath\sin\frac{7\pi}{6}\right)=2e^{7\imath\pi/6}=2e^{-5\imath\pi/6}$$

أنظر الشكل VI.1 .

2• (ا) لدينا :

$$Z=\frac{a-b}{c-b}=\frac{2\imath+\sqrt{3}-\imath}{-\sqrt{3}-\imath+\sqrt{3}-\imath}=\frac{\sqrt{3}+\imath}{-2\imath}=\frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}$$ (الشكل الجبري)

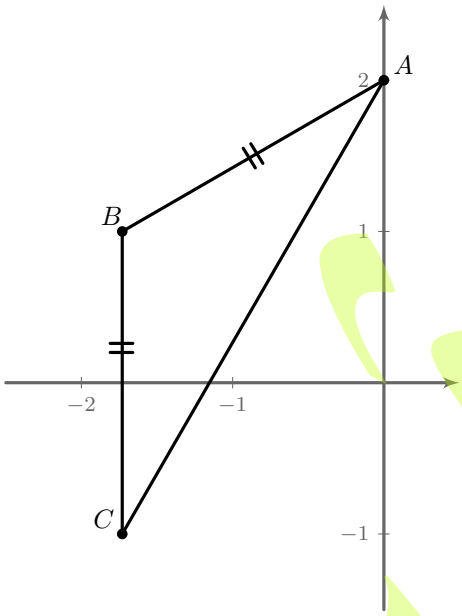
$$=\cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3}=e^{2\imath\pi/3}$$ (الشكل الأسي)

(ب) بما أنّ $|e^{2\imath\pi/3}|=1$ فإنّ $|a-b|=|c-b|$ أي $BA=BC$ و هذا يعني أنّ المثلث ABC متساوي الساقين عند الرأس B .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 1.VI

10 أثبت التكافؤات التالية :

$$\overline{Z} = Z \iff Z \text{ حقيقي}$$
$$Z \in \mathbb{R} \iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(Z) = 0 \pmod{\pi}\right)$$
$$\overline{Z} + Z = 0 \iff Z \text{ تخيلي صرف}$$
$$Z \in \imath\mathbb{R} \iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right)$$

تطبيقات :

1. كيف يجب إختيار العدد z حتى يكون $Z = z^2 + 2z - 3$ عدداً حقيقيا ؟ حدّد المجموعة E للأعداد المركبة z التي يكون من أجلها Z عدداً حقيقيا.
2. لتكن A صورة العدد $\imath$ و B صورة العدد 1. لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن A. نضع $Z = \dfrac{1-z}{\imath - z}$.
   - حدّد المجموعة E للنقط M التي يكون من أجلها Z عدداً حقيقيا.
   - حدّد المجموعة F للنقط M التي يكون من أجلها Z تخيليا صرفا.

الحلّ. لدينا من جهة :

$$Z \text{ حقيقي} \iff \operatorname{Im}(Z) = 0 \iff \frac{1}{2\imath}(Z - \overline{Z}) = 0 \iff Z = \overline{Z}$$
$$Z \text{ تخيلي صرف} \iff \operatorname{Re}(Z) = 0 \iff \frac{1}{2}(Z + \overline{Z}) = 0 \iff Z + \overline{Z} = 0$$

و من جهة أخرى :

$$Z \in \mathbb{R} \iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(z) = 0 \pmod{2\pi} \text{ أو } \arg(z) = \pi \pmod{2\pi}\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$\iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(z) = 0 \pmod{\pi}\right)$$
$$Z \in \imath\mathbb{R} \iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ أو } \arg(z) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}\right)$$
$$\iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right)$$

تطبيقات :

1• حسب ما سبق و حسب خواص المرافق :

$$Z \text{ حقيقي} \iff Z = \overline{Z} \iff z^2 + 2z - 3 = \overline{z}^2 + 2\overline{z} - 3 \iff (z - \overline{z})[(z + \overline{z}) + 2] = 0$$
$$\iff (z = \overline{z} \text{ أو } 2\,\mathrm{Re}(z) = -2) \iff \left(z \text{ حقيقي أو } \mathrm{Re}(z) = -1\right)$$

فالمجموعة E التي نبحث عنها هي اتّحاد المستقيمين $y = 0$ و $x = -1$.

2• • تحديد المجموعة E : نُذكّر أنّ $z \neq \imath$ أي M تختلف عن A :

$$Z \in \mathbb{R} \iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(Z) = 0 \pmod{\pi}\right)$$
$$\iff \left(z = 1 \text{ أو } \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 0 \pmod{\pi}\right)$$
$$\iff \left(M = B \text{ أو } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = 0 \pmod{\pi}\right)$$
$$\iff M \neq A \text{ النقط A ، M و B على استقامة واحدة مع}$$

نستنتج أنّ المجموعة E هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A.

• تحديد المجموعة F : نُذكّر أنّ $z \neq \imath$ أي M تختلف عن A :

$$Z \in \imath\mathbb{R} \iff \left(Z = 0 \text{ أو } \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right)$$
$$\iff \left(z = 1 \text{ أو } \arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right)$$
$$\iff \left(M = B \text{ أو } \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right)$$

نستنتج أنّ المجموعة F هي الدائرة التي قطرها هو $[AB]$ باستثناء النقطة A.

■

11 ☼ حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات الآتية ذات المجهول z و اكتب الحلول على الشكل الجبري :

1• $(1 + 4\imath)z + 3 + 2\imath\sqrt{2} = 0$

2• $2\imath z - 3\imath + (1 + \imath)z = 0$

3• $2z - 2 + \imath z = 8 - 6\imath + (1 + 2\imath)z$

4• $(\imath z + 2)(3z - 1 + \imath) = 0$

5• $\overline{z} + 2\imath z = 1 + \imath$

6• $z + 2(1 + \imath)\overline{z} = \imath$

7• $\imath(z + \overline{z}) + \overline{(z + 2\overline{z})} = 3$

الحلّ. ليكن $z = x + \imath y$ حيث x و y عددان حقيقيان.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 1 لدينا :

$$(1+4\imath)z+3+2\imath\sqrt{2}=0 \iff (1+4\imath)z=-3-2\imath\sqrt{2} \iff z=-\frac{3+2\imath\sqrt{2}}{1+4\imath}$$
$$\iff z=-\frac{\left(3+2\imath\sqrt{2}\right)(1-4\imath)}{1^2+4^2}$$
$$\iff z=-\frac{3-12\imath+2\imath\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{17}=-\frac{3+8\sqrt{2}}{17}+\imath\frac{12-2\sqrt{2}}{17}$$

إذن $z=-\frac{3+8\sqrt{2}}{17}+\imath\frac{12-2\sqrt{2}}{17}$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\left\{-\frac{3+8\sqrt{2}}{17}+\imath\frac{12-2\sqrt{2}}{17}\right\}$.

• 2 لدينا :

$$2\imath z-3\imath+(1+\imath)z=0 \iff (2\imath+1+\imath)z=3\imath \iff (1+3\imath)z=3\imath$$
$$\iff z=\frac{3\imath}{1+3\imath}=\frac{3\imath(1-3\imath)}{1^2+3^2}=\frac{3\imath+9}{10}=\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\imath$$

إذن $z=\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\imath$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\left\{\frac{9}{10}+\frac{3}{10}\imath\right\}$.

• 3 لدينا :

$$2z-2+\imath z=8-6\imath+(1+2\imath)z \iff (2+\imath)z-(1+2\imath)z=8-6\imath+2$$
$$\iff (2+\imath-1-2\imath)z=10-6\imath \iff (1-\imath)z=10-6\imath$$
$$\iff z=\frac{10-6\imath}{1-\imath}=\frac{(10-6\imath)(1+\imath)}{1^2+1^2}$$
$$\iff z=\frac{10+10\imath-6\imath+6}{2}=8+2\imath$$

إذن $z=8+2\imath$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\{8+2\imath\}$.

• 4 لدينا :

$$(\imath z+2)(3z-1+\imath)=0 \iff \imath z+2=0 \quad \text{أو} \quad 3z-1+\imath=0$$
$$\iff \imath z=-2 \quad \text{أو} \quad 3z=1-\imath$$
$$\iff z=-\frac{2}{\imath}=2\imath \quad \text{أو} \quad z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\imath$$

إذن $z=2\imath$ أو $z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\imath$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\left\{2\imath,\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\imath\right\}$.

• 5 لدينا :

$$\bar{z}+2\imath z=1+\imath \iff x-\imath y+2\imath x-2y=1+\imath \iff (x-2y)+(2x-y)\imath=1+\imath$$
$$\iff \begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2(2x-1)=1 \\ y=2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

إذن $z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\imath$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\imath\right\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 6 لدينا :

$$z+2(1+\imath)\bar{z}=\imath \iff x+\imath y+2(1+\imath)(x-\imath y)=\imath \iff (3x+2y)+(2x-y)\imath=\imath$$

$$\iff \begin{cases} 3x+2y=0 \\ 2x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (3x+2y)+2(2x-y)=0+2\times 1 \\ y=2x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{2}{7} \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases}$$

إذن $z=\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\imath$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\left\{\frac{2}{7}-\frac{3}{7}\imath\right\}$.

• 7 لدينا :

$$\imath(z+\bar{z})+\overline{(z+2\bar{z})}=3 \iff 2\imath x+\overline{3x-\imath y}=3 \iff 3x+(2x+y)\imath=3$$

$$\iff \begin{cases} 3x=3 \\ 2x+y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=-2x=-2 \end{cases}$$

إذن $z=1-2\imath$ أي مجموعة الحلول هي $\mathscr{S}=\{1-2\imath\}$.

■

12 ☼ حلّ في مجموعة الأعداد المركبة الجملة : $\begin{cases} \imath z-2z'=-4+3\imath \\ \bar{z}+2\bar{z'}=3 \end{cases}$

الحلّ.

$$\begin{cases} \imath z-2z'=-4+3\imath \\ \bar{z}+2\bar{z'}=3 \end{cases} \iff \begin{cases} \imath z-2z'=-4+3\imath \\ \overline{\bar{z}+2\bar{z'}}=\bar{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \imath z-2z'=-4+3\imath \\ z+2z'=3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (\imath z-2z')+(z+2z')=(-4+3\imath)+3 \\ z'=\frac{1}{2}(3-z) \end{cases} \iff \begin{cases} (1+\imath)z=-1+3\imath \\ z'=\frac{1}{2}(3-z) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=\frac{-1+3\imath}{1+\imath}=\frac{(-1+3\imath)(1-\imath)}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}(2+2\imath)=1+2\imath \\ z'=\frac{1}{2}(3-(1+2\imath))=1-\imath \end{cases}$$

إذن للجملة حل وحيد و هو : $(z,z')=(1+2\imath,1-\imath)$. ■

13 ☼ حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجُمل التالية ذات المجهولين z و z' :

• 1 $\begin{cases} 2\imath z+z'=2\imath \\ 3z-\imath z'=1 \end{cases}$

• 2 $\begin{cases} 2z+2(1+\imath)z'=4-6\imath \\ z+3\imath z'=-3-2\imath \end{cases}$

• 3 $\begin{cases} (1+\imath)z+\imath z'=2-\imath \\ (2-\imath)z+(3-\imath)z'=5+3\imath \end{cases}$

• 4 $\begin{cases} \imath z-2z'=-3(1-\imath) \\ (1-\imath)z-(1-\imath)z'=0 \end{cases}$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• من المعادلة الأولى نجد $z' = 2\imath - 2\imath z$. بالتعويض في المعادلة الثانية ينتج : $3z - \imath(2\imath - 2\imath z) = 1$ أي $3z + 2 - 2z = 1$ منه $z = -1$ و بالتالي $z' = 2\imath - 2\imath(-1) = 4\imath$.

إذن للجملة حلّ وحيد هو : $(-1, 4\imath)$.

2• من المعادلة الثانية نجد $z = -3\imath z' - 3 - 2\imath$. بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج :

$2(1-2\imath)z' = 10-2\imath$ أي $2(-3\imath z' - 3 - 2\imath) + 2(1+\imath)z' = 4-6\imath$ أي $(-6\imath + 2 + 2\imath)z' = 4-6\imath+6+4\imath$ منه :

$$z' = \frac{2(5-\imath)}{2(1-2\imath)} = \frac{(5-\imath)(1+2\imath)}{1^2+2^2} = \frac{5+10\imath-\imath+2}{5} = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}\imath$$

و بالتالي :

$$z = -3\imath\left(\frac{7}{5} + \frac{9}{5}\imath\right) - 3 - 2\imath = \frac{27}{5} - \frac{21}{5}\imath - 3 - 2\imath = \frac{12}{5} - \frac{31}{5}\imath$$

إذن للجملة حلّ وحيد هو : $\left(\frac{12}{5} - \frac{31}{5}\imath, \frac{7}{5} + \frac{9}{5}\imath\right)$.

3• من المعادلة الأولى نجد :

$$z' = \frac{1}{\imath}(2 - \imath - (1+\imath)z) = -\imath(2 - \imath - (1+\imath)z) = -1 - 2\imath + (-1+\imath)z$$

بالتعويض في المعادلة الثانية ينتج : $(2-\imath)z + (3-\imath)(-1-2\imath+(-1+\imath)z) = 5+3\imath$ أي

$(2-\imath+(3-\imath)(-1+\imath))z = 5+3\imath+(3-\imath)(1+2\imath)$ منه $3\imath z = 10+8\imath$ منه $z = \frac{10+8\imath}{3\imath}$ أي

$z = -\frac{10+8\imath}{3} \cdot \imath$ أي $z = \frac{8}{3} - \frac{10}{3}\imath$. و بالتالي :

$$z' = -1 - 2\imath + (-1+\imath)\left(\frac{8}{3} - \frac{10}{3}\imath\right) = -1 - 2\imath + \frac{2}{3} + 6\imath = -\frac{1}{3} + 4\imath$$

إذن للجملة حلّ وحيد هو : $\left(\frac{8}{3} - \frac{10}{3}\imath, -\frac{1}{3} + 4\imath\right)$.

4• المعادلة الثانية تُكافِئ : $z' = (1-\imath)z = (1-\imath)z$ أي $z = z'$. بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج $\imath z - 2z = -3 + 3\imath$ أي

$$z' = z = \frac{-3+3\imath}{\imath - 2} = \frac{(-3+3\imath)(-2-\imath)}{2^2+1^2} = \frac{6+3\imath-6\imath+3}{5} = \frac{9}{5} - \frac{3}{5}\imath$$

إذن للجملة حلّ وحيد هو : $\left(\frac{9}{5} - \frac{3}{5}\imath, \frac{9}{5} - \frac{3}{5}\imath\right)$.

■

14 ☼

لتكن a ، b و c أعدادا مركبة. حلّ في $\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$.

كيف يجب إختيار الأعداد a ، b ، c حتى تكون الحلول حقيقية ؟

الحلّ. 1• نسمي (1) ، (2) و (3) معادلات الجملة على الترتيب. نُذكِّر أنّ $j^3 = 1$ ، $1 + j + j^2 = 0$ و $\bar{j} = j^2$. لدينا :

◊ بجمع (3) + (2) + (1) ينتج $3x + (1+j+j^2)y + (1+j^2+j)z = a+b+c$. و بما أنّ $1+j+j^2 = 0$ فإنّ $3x = a+b+c$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

◦ بجمع $(1)+j^2\times(2)+j\times(3)$ ينتج $(1+j^2+j)x+(1+j^3+j^3)y+(1+j^4+j^2)z=a+bj^2+cj$.
وبما أنّ $j^3=1$، $j^4=j$ و $1+j+j^2=0$ فإنّ $3y=a+bj^2+cj$.

◦ بجمع $(1)+j\times(2)+j^2\times(3)$ ينتج $(1+j+j^2)x+(1+j^2+j^4)y+(1+j^3+j^3)z=a+bj+cj^2$.
وبما أنّ $j^3=1$، $j^4=j$ و $1+j+j^2=0$ فإنّ $3z=a+bj+cj^2$.

إذن $x=\dfrac{a+b+c}{3}$، $y=\dfrac{a+bj^2+cj}{3}$ و $z=\dfrac{a+bj+cj^2}{3}$.

و بالعكس، نتحقق بسهولة من أنّ $x=\dfrac{a+b+c}{3}$، $y=\dfrac{a+bj^2+cj}{3}$ و $z=\dfrac{a+bj+cj^2}{3}$ حلول للجملة.

• 2. إذا كانت الحلول x، y و z حقيقيةً فإنّ $a=x+y+z$ حقيقي و :

$$\overline{b}=\overline{x+j^2y+jz}=\overline{x}+\overline{j^2}\,\overline{y}+\overline{j}\,\overline{z}=x+jy+j^2z=c$$

إذن $a\in\mathbb{R}$ و $c=\overline{b}$.

بالعكس، إذا كان $a\in\mathbb{R}$ و $c=\overline{b}$ فإنّ :

$$\overline{x}=\frac{\overline{a+b+c}}{3}=\frac{\overline{a}+\overline{b}+\overline{\overline{b}}}{3}=\frac{a+\overline{b}+b}{3}=\frac{a+c+b}{3}=x$$

$$\overline{y}=\frac{\overline{a+bj^2+cj}}{3}=\frac{\overline{a}+\overline{b}\,\overline{j^2}+\overline{\overline{b}\,\overline{j}}}{3}=\frac{a+\overline{b}j+bj^2}{3}=\frac{a+cj+bj^2}{3}=y$$

$$\overline{z}=\frac{\overline{a+bj+cj^2}}{3}=\frac{\overline{a}+\overline{b}\,\overline{j}+\overline{\overline{b}\,\overline{j^2}}}{3}=\frac{a+\overline{b}j^2+bj}{3}=\frac{a+cj^2+bj}{3}=z$$

أي أنّ الحلول x، y و z حقيقية.

في الأخير، تكون حلول الجملة حقيقيةً إذا و فقط إذا كان $a\in\mathbb{R}$ و $c=\overline{b}$.

■

15 ☼ حلّ، في المجموعة $\mathbb{C}$، المعادلات التالية حيث z هو المجهول و $\overline{z}$ مرافقه :

• 1. $z^2-\overline{z}+2=0$
• 2. $z=(1+\imath)\overline{z}+3-2\imath$
• 3. $z^2+z\overline{z}-4-6\imath=0$
• 4. $z\overline{z}+z-\overline{z}-5-2\imath=0$
• 5. $(3+\imath)z+(1-2\imath)\overline{z}+2-3\imath=0$
• 6. $(3+\imath)z+(1-3\imath)\overline{z}+12-6\imath=0$

الحلّ. نضع $z=x+\imath y$ مع $x,y\in\mathbb{R}$.

• 1. لدينا :

$$\begin{aligned}z^2-\overline{z}+2=0 &\iff (x+\imath y)^2-(x-\imath y)+2=0\\ &\iff x^2-y^2+2\imath xy-x+\imath y+2=0\\ &\iff (x^2-y^2-x+2)+\imath y(2x+1)=0\\ &\iff \begin{cases}x^2-y^2-x+2=0\\ y(2x+1)=0\end{cases}\end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أنّ $y=0$ أو $x=-\dfrac{1}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $y = 0$ فإنّ المعادلة الأولى تُصبح : $x^2 - x + 2 = 0$. مُميِّزها هو $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$
إذن ليس لها حلول حقيقية (نُذكِّر أنّ x و y عددان حقيقيان) .
- إذا كان $x = -\frac{1}{2}$ فإنّ المعادلة الأولى تُصبح : $\frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} + 2 = 0$ أي $y^2 = \frac{11}{4}$ منه $y = \pm\frac{\sqrt{11}}{2}$.

إذن للمعادلة حلاّن هما $-\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{11}}{2}$ و $-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{11}}{2}$.

2. لدينا :

$$\begin{aligned} z = (1+\imath)\,\bar{z} + 3 - 2\imath &\iff x + \imath y - (1+\imath)(x - \imath y) = 3 - 2\imath \\ &\iff x + \imath y - x - y - \imath x + \imath y = 3 - 2\imath \\ &\iff -y + (2y - x)\,\imath = 3 - 2\imath \\ &\iff \begin{cases} -y = 3 \\ 2y - x = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3 \\ x = 2y + 2 = -6 + 2 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

إذن للمعادلة حلّ وحيد هو $-4 - 3\imath$.

3. لدينا :

$$z^2 + z\bar{z} - 4 - 6\imath = 0 \iff x^2 - y^2 + 2\imath xy + x^2 + y^2 - 4 - 6\imath = 0 \iff 2x^2 + 2\imath xy = 4 + 6\imath$$
$$\iff \begin{cases} 2x^2 = 4 \\ 2xy = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$$

من المعادلة الأولى نستنتج أنّ $x = \pm\sqrt{2}$.

- إذا كان $x = -\sqrt{2}$ فمن المعادلة الثانية نجد أنّ $y = \frac{3}{-\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ أي $z = -\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\imath$ ؛
- و إذا كان $x = \sqrt{2}$ فإنّ $y = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ أي $z = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\imath$.

إذن للمعادلة حلاّن هما : $-\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\imath$ و $\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\imath$.

4. لدينا :

$$z\bar{z} + z - \bar{z} - 5 - 2\imath = 0 \iff x^2 + y^2 + 2\imath y = 5 + 2\imath \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 2y = 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

إذن للمعادلة حلاّن هما : $-2 + \imath$ و $2 + \imath$.

5. لدينا :

$$\begin{aligned} (3+\imath)\,z + (1-2\imath)\,\bar{z} + 2 - 3\imath = 0 &\iff (3+\imath)(x + \imath y) + (1 - 2\imath)(x - \imath y) = -2 + 3\imath \\ &\iff 3x + 3\imath y + \imath x - y + x - \imath y - 2\imath x - 2y = -2 + 3\imath \\ &\iff 4x - 3y + \imath(-x + 2y) = -2 + 3\imath \\ &\iff \begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4(2y - 3) - 3y = -2 \\ x = 2y - 3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5y = 10 \\ x = 2y - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 2y - 3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

إذن للمعادلة حلّ وحيد هو : $1+2\imath$.

• 6 لدينا :

$$\begin{aligned}(3+\imath)z+(1-3\imath)\bar{z}+12-6\imath=0 &\iff (3+\imath)(x+\imath y)+(1-3\imath)(x-\imath y)=-12+6\imath\\ &\iff 4x-4y+\imath(-2x+2y)=-12+6\imath\\ &\iff \begin{cases}4x-4y=-12\\-2x+2y=6\end{cases} \iff \begin{cases}x-y=-3\\x-y=-3\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}y=t\\x=t+3\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

إذن للمعادلة عدد لانهائي من الحلول و هي الأعداد $t+\imath(t+3)$ مع $t\in\mathbb{R}$.

■

16

ليكن $z=x+\imath y$ عدداً مركبا حيث $z\neq 1$. نضع $Z=\dfrac{z^2+z+1}{z-1}$.

• 1 أوجد الأعداد المركبة a ، b و c بحيث يكون : $Z=az+b+\dfrac{c}{z-1}$, $\forall z\neq 1$.

• 2 عبِّر عن $\mathrm{Re}(Z)$ و $\mathrm{Im}(Z)$ بدلالة x و y .

• 3 لتكن M صورة z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

أوجد $\mathscr{E}$ مجموعة النقط M بحيث يكون $Z\in\mathbb{R}$ و $z\notin\mathbb{R}$.

الحلّ. • 1 لدينا :

$$\begin{aligned}Z=az+b+\frac{c}{z-1} &\iff \frac{z^2+z+1}{z-1}=az+b+\frac{c}{z-1}\\ &\iff \frac{z^2+z+1}{z-1}=\frac{az(z-1)+b(z-1)+c}{z-1}\\ &\iff \frac{z^2+z+1}{z-1}=\frac{az^2+(b-a)z+c}{z-1}\\ &\iff \begin{cases}a=1\\b-a=1\\c-b=1\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}\end{aligned}$$

إذن : $Z=z+2+\dfrac{3}{z-1}$, $\forall z\neq 1$.

• 2 لدينا :

$$Z=z+2+\frac{3}{z-1}=x+\imath y+2+\frac{3}{x-1+\imath y}=x+2+\imath y+\frac{3(x-1-\imath y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$=x+2+\frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}+\left(y-\frac{3y}{(x-1)^2+y^2}\right)\imath$$

إذن : $\mathrm{Re}(Z)=x+2+\dfrac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$ و $\mathrm{Im}(Z)=y-\dfrac{3y}{(x-1)^2+y^2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3 لتكن $M(x,y)$ نقطة من $\mathscr{E}$. لدينا :

$$\begin{cases} Z \in \mathbb{R} \\ z \notin \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{Im}(Z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \dfrac{3y}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\left(1 - \dfrac{3}{(x-1)^2 + y^2}\right) = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{(x-1)^2 + y^2} = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 3 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

في المعادلة الأخيرة، إذا كان $y = 0$ فإنّ $(x-1)^2 = 3$ منه $x = 1 \pm \sqrt{3}$. إذن $\mathscr{E}$ هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1,0)$ و نصف قطرها $\sqrt{3}$ باستثناء النقطتين $M_1\left(1-\sqrt{3},0\right)$ و $M_2\left(1+\sqrt{3},0\right)$.

■

17

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

z عدد مركب صورته M . نضع $L = z + \dfrac{4}{z}$.

• عيِّن المجموعة $\mathscr{E}$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L عددًا حقيقيا.

• عيِّن المجموعة $\mathscr{E}'$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صِرفًا.

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$ و $z \neq 0$. لدينا :

$$L = z + \frac{4}{z} = \frac{z^2+4}{z} = \frac{x^2 - y^2 + 2\imath xy + 4}{x + \imath y} = \frac{\left(x^2 - y^2 + 4 + 2\imath xy\right)(x - \imath y)}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^3 - \imath x^2 y - xy^2 + \imath y^3 + 4x - 4\imath y + 2\imath x^2 y + 2xy^2}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x^3 + 4x + xy^2}{x^2 + y^2} + \imath \frac{y^3 - 4y + x^2 y}{x^2 + y^2}$$

و بالتالي :

•

$$M \in \mathscr{E} \iff \mathrm{Im}(L) = 0 \iff \frac{y^3 - 4y + x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 \iff y^3 - 4y + x^2 y = 0$$

$$\iff y\left(x^2 + y^2 - 4\right) = 0 \iff y = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 + y^2 = 2^2$$

إذن مجموعة النقط التي نبحث عنها هي المستقيم Δ الذي معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) باستثناء النقطة $O(0,0)$ و الدائرة $\mathscr{C}(O,2)$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها 2 .

أي : $\mathscr{E} = \mathscr{C} \cup (\Delta \setminus \{O\})$.

•

$$M \in \mathscr{E}' \iff \mathrm{Re}(L) = 0 \iff \frac{x^3 + 4x + xy^2}{x^2 + y^2} = 0 \iff x^3 + 4x + xy^2 = 0$$

$$\iff x\left(x^2 + y^2 + 4\right) = 0 \iff x = 0 \qquad (\text{لأنّ } x^2 + y^2 + 4 > 0)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي $\mathscr{E}'$ هي المستقيم Δ' الذي معادلته $x = 0$ (محور التراتيب) باستثناء النقطة $O(0,0)$.
إذن : $\mathscr{E}' = \Delta' \setminus \{O\}$.

■

18

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.
z عدد مركب صورته M و $\bar{z}$ مرافقه.
عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$.

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = (x + \imath y)(x - \imath y) + 3(x + \imath y + x - \imath y) = x^2 - (\imath y)^2 + 6x = x^2 + y^2 + 6x$$

و بالتالي :

$$z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7 \iff x^2 + y^2 + 6x = 7 \iff (x+3)^2 - 9 + y^2 = 7$$
$$\iff (x+3)^2 + (y-0)^2 = 16 = 4^2$$

و هي معادلة الدائرة $\mathscr{C}(\Omega, 4)$ التي مركزها $\Omega(-3, 0)$ و نصف قطرها 4 .
إذن مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث يكون : $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$ هي الدائرة $\mathscr{C}$.

■

19

1. A ، M ، M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z ، $1 + z^2$.
عيّن مجموعة النقط M بحيث تكون A ، M ، M' على استقامة واحدة.
2. B ، M ، M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $\imath$ ، z ، $\imath z$.
عيّن مجموعة النقط M بحيث تكون B ، M ، M' على استقامة واحدة.
حدّد في هذه الحالة مجموعة النقط M' .

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$.

1. إذا كان $z = 1$ فمن الواضح أنّ النقط $A(1)$ ، $M(1)$ ، $M'(2)$ على استقامة واحدة (لأنّ $M = A$ و من البديهي أنّ أيّ نقطتين من المستوي على استقامة واحدة) . نفرض إذن أنّ $z \neq 1$.

تكون النقط $A(1)$ ، $M(z)$ ، $M'(1 + z^2)$ على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $\widehat{MAM'} = 0 \pmod{\pi}$ أي
إذا و فقط إذا كان $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = 0 \pmod{\pi}$. لكن $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = \arg\left(\dfrac{z^2 + 1 - 1}{z - 1}\right) \pmod{2\pi}$ و
بالتالي النقط $A(1)$ ، $M(z)$ ، $M'(1 + z^2)$ على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $\arg\left(\dfrac{z^2}{z - 1}\right) = 0 \pmod{\pi}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

أي إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im}\left(\frac{z^2}{z-1}\right)=0$. لكن :

$$\frac{z^2}{z-1}=\frac{x^2-y^2+2\imath xy}{x-1+\imath y}=\frac{\left(x^2-y^2+2\imath xy\right)(x-1-\imath y)}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\frac{x^3-x^2-\imath x^2y-xy^2+y^2+\imath y^3+2\imath x^2y-2\imath xy+2xy^2}{(x-1)^2+y^2}$$
$$=\frac{x^3-x^2+xy^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}+\imath\frac{y^3+x^2y-2xy}{(x-1)^2+y^2}$$

منه :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z^2}{z-1}\right)=0\iff\frac{y^3+x^2y-2xy}{(x-1)^2+y^2}=0\iff y^3+x^2y-2xy=0$$
$$\iff y\left(x^2+y^2-2x\right)=0\iff y=0\quad\text{أو}\quad(x-1)^2-1+y^2=0$$
$$\iff y=0\quad\text{أو}\quad(x-1)^2+(y-0)^2=1^2$$

و هي اتحاد المستقيم Δ الذي معادلته $y=0$ (محور الفواصل) باستثناء النقطة $A(1)$ (لأنّ $z\neq 1$) مع الدائرة $\mathscr{C}(\Omega,1)$ التي مركزها $\Omega(1,0)$ (أي $\Omega=A$) و نصف قطرها 1.

في الأخير، مجموعة النقط التي تحقق المطلوب هي اتحاد المستقيم Δ مع الدائرة $\mathscr{C}$ (لا نستثني النقطة $A(1)$ لأنها تحقق المطلوب أيضاً و درسنا الحالة الخاصة $M=A$ في البداية) . أنظر الشكل 2.VI.

• 2 إذا كان $z=\imath$ فإنّ $M=B$ و بالتالي النقط M ، B ، M' على استقامة واحدة. نفرض إذن أنّ $z\neq\imath$.

تكون النقط $B(\imath)$ ، $M(z)$ ، $M'(\imath z)$ على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im}\left(\frac{\imath z-\imath}{z-\imath}\right)=0$ (بنفس الطريقة السابقة) . لكن :

$$\frac{\imath z-\imath}{z-\imath}=\imath\frac{z-1}{z-\imath}=\imath\frac{x-1+\imath y}{x+\imath(y-1)}=\imath\frac{(x-1+\imath y)(x-\imath(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$
$$=\imath\frac{x^2-\imath x(y-1)-x+\imath(y-1)+\imath xy+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$
$$=\frac{-x-y+1}{x^2+(y-1)^2}+\imath\frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2}$$

منه :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\imath z-\imath}{z-\imath}\right)=0\iff\frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2}=0\iff x^2+y^2-x-y=0$$
$$\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

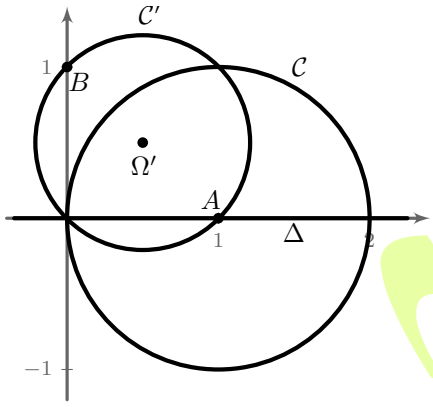
و هي معادلة الدائرة $\mathscr{C}'\left(\Omega',\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ التي مركزها $\Omega'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باستثناء النقطة $B(\imath)$ (لأنّ $z\neq\imath$) .

في الأخير، مجموعة النقط التي تحقق المطلوب هي الدائرة $\mathscr{C}'$ (أنظر الشكل 2.VI) .

مجموعة النقط M' : النقطة M' هي صورة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ (لأنّ $\imath=e^{\imath\pi/2}$) .

صورة $\Omega'\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ بهذا الدوران هي النقطة $\Omega''\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (لأنّ $\imath\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath$) إذن صورة الدائرة $\mathscr{C}'\left(\Omega',\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي الدائرة $\mathscr{C}''\left(\Omega'',\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.2

إذن مجموعة النقط M' هي الدائرة التي مركزها $\Omega''\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

■

20 عيّن الأعداد المركبة z التي من أجلها يكون للأعداد z ، $\frac{1}{z}$ و $z-1$ نفس الطويلة.

الحلّ. لدينا :

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|1-z| \iff \begin{cases} \frac{1}{|z|}=|z| \\ |1-z|=|z| \end{cases} \iff \begin{cases} |z|=1 \\ |1-z|=|z| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=1 \\ \sqrt{(x-1)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ x^2-2x+1+y^2=x^2+y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2=1-x^2 \\ 2x+1=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

إذن يوجد عددان مركبان يحققان المطلوب و هما : $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath=e^{-\imath\pi/3}=-\mathrm{j}$ و $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath=e^{\imath\pi/3}=-\mathrm{j}^2$. هذان العددان يُمثلان نقطتَيْ تقاطع الدائرة التي مركزها $O\,(0)$ و نصف قطرها 1 (أي التي معادلتها $|z|=1$) مع الدائرة التي مركزها $A\,(1)$ و نصف قطرها 1 (و التي معادلتها $|z-1|=1$) .

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}=\left\{-\mathrm{j},-\mathrm{j}^2\right\}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

21 ما هو الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن يحققه العدد المركب z حتى تكون النقط A ، B ، C التي لواحقها z ، z^2 ، z^4 على استقامة واحدة ؟

الحلّ. نُميّز حالتين : إمّا أن تكون النقط A ، B و C مختلفة مثنى مثنى أو أن تكون نقطتان (على الأقل) متطابقتين.

- تكون نقطتان (على الأقل) متطابقتين إذا :
  - كان $A = B$ أي $z = z^2$ أي $z(z-1) = 0$ أي $z \in \{0, 1\}$ ؛
  - أو $A = C$ أي $z = z^4$ أي $z(z^3 - 1) = 0$ أي $z \in \left\{0, 1, j, j^2\right\}$ ؛
  - أو $B = C$ أي $z^2 = z^4$ أي $z^2(z^2 - 1) = 0$ أي $z \in \{0, 1, -1\}$ ؛
  - أو $A = B = C$ أي $z = z^2 = z^4$ أي $z \in \{0, 1\} \cap \{0, 1, -1\}$ أي $z \in \{0, 1\}$ ؛

  أي إذا كان $z \in \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$ و في هذه الحالة فمن البديهي أنها على استقامة واحدة.

- إذا كانت النقط A ، B و C مختلفة مثنى مثنى فإنّ $z \notin \left\{0, 1, -1, j, j^2\right\}$ و حسب المبرهنة 1 صفحة 53 فإنّ :

$$\begin{aligned}
\text{النقط } A \text{ ، } B \text{ و } C \text{ على استقامة واحدة} &\iff \frac{z^4 - z^2}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \iff z^2 + z \in \mathbb{R} \\
&\iff \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \in \mathbb{R} \iff \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 \in \mathbb{R} \\
&\iff z + \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \quad \text{أو} \quad z + \frac{1}{2} \in \imath\mathbb{R} \\
&\iff z \in \mathbb{R} \quad \text{أو} \quad \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff z \in \mathbb{R} \quad \text{أو} \quad \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

في الأخير، تكون النقط A ، B و C على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $z \in \mathbb{R}$ (و هذا يشمل 0 ، 1 و -1) أو $\operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ (و هذا يشمل j و j^2) . ■

22 ليكن p و q عددين مركبين . نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + pz + q = 0 \qquad (1)$$

لتكن α ، β ، γ حلول هذه المعادلة.

1. أثبت أنّ : $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p \\ \alpha\beta\gamma = -q \end{cases}$.

2. ما هو الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تُحققه الأعداد p و q حتى تكون صُوَر حلول المعادلة (1) رؤوس مثلث قائم و متساوي الساقين ؟

الحلّ. 1. حلول المعادلة (1) هي جذور كثير الحدود $z^3 + pz + q$ إذن :

$$z^3 + pz + q = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) = z^3 + (\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)z - \alpha\beta\gamma$$

بالمطابقة نستنتج أنّ $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ، $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ و $\alpha\beta\gamma = -q$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 2 حتى تكون النقط A ، B و C رؤوس مثلث قائم في B و متساوي الساقين يكفي أن يكون $\overrightarrow{BA}$ صورة $\overrightarrow{BC}$ بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن فالحلول α ، β ، γ تُحقق $\gamma-\alpha=\imath(\beta-\alpha)$ أي $\gamma-\alpha=e^{\imath\pi/2}(\beta-\alpha)$ منه : $\gamma=(1-\imath)\alpha+\imath\beta$

$$\begin{cases}\gamma=(1-\imath)\alpha+\imath\beta\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=p\\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=(1-\imath)\alpha+\imath\beta\\ (2-\imath)\alpha+(1+\imath)\beta=0\\ \alpha(\beta+\gamma)+\beta\gamma=p\\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=(1-\imath)\alpha+\imath\beta\\ \beta=-\dfrac{2-\imath}{1+\imath}\alpha=\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\\ -\alpha^2+\beta\gamma=p\\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\gamma=(1-\imath)\alpha+\imath\left(\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\right)=\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\\ \beta=\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\\ -\alpha^2+\beta\gamma=p\\ \alpha\beta\gamma=-q\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\gamma=\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\\ \beta=\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\\ -\alpha^2+\left(\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\right)\left(\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\right)=p\\ \alpha\left(\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\right)\left(\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\right)=-q\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\\ \beta=\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\\ \dfrac{3}{2}\alpha^2=p\\ \dfrac{5}{2}\alpha^3=-q\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\gamma=\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\\ \beta=\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\\ \alpha^2=\dfrac{2}{3}p\\ \alpha^3=-\dfrac{2}{5}q\end{cases}\iff\begin{cases}\gamma=\dfrac{-1-3\imath}{2}\alpha\\ \beta=\dfrac{-1+3\imath}{2}\alpha\\ \alpha^3=-\dfrac{2}{5}q\\ \alpha^6=\left(-\dfrac{2}{5}q\right)^2=\left(\dfrac{2}{3}p\right)^3\end{cases}$$

إذن الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تُحققه الأعداد p و q حتى تكون صور α ، β و γ رؤوس مثلث قائم و متساوي الساقين هو $\left(-\frac{2}{5}q\right)^2=\left(\frac{2}{3}p\right)^3$ أي $50p^3=27q^2$.

■

23 (2)

لتكن a ، b و c ثلاثة أعداد مركبة . نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول $z\in\mathbb{C}$:

$$z^4+az^2+bz+c=0$$

لتكن α ، β ، γ ، δ حلول هذه المعادلة.

• 1 أثبت أنّ : $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$.

• 2 ما هو الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تُحققه الأعداد a ، b و c حتى تكون صُوَر حلول المعادلة (2) رؤوس مربع ؟

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• حلول المعادلة (2) هي جذور كثير الحدود $P(z)=z^4+az^2+bz+c$ إذن :

$$\begin{aligned}z^4+az^2+bz+c&=(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)\\&=z^4-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)z^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)z^2\\&\quad-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)z+\alpha\beta\gamma\delta\end{aligned}$$

بالمطابقة بين معامل z^3 في الطرفين، نستنتج أنّ $-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$ أي $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$.

2• إذا كانت صور الحلول α ، β ، γ ، δ رؤوس مربع فإنّ لاحقة مركز هذا المربع (الذي هو نقطة تقاطع قطريه) هي $\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$ إذن مركز هذا المربع هو O مبدأ المعلم. و بالتالي فإنّ أيّ رأس لهذا المربع هو صورة الرأس المجاور (في الإتجاه المثلثي أي عكس عقارب الساعة) بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن $\beta-0=e^{\imath\pi/2}(\alpha-0)$ أي $\beta=\imath\alpha$. بالمثل، $\gamma=\imath\beta=-\alpha$ و $\delta=\imath\gamma=-\imath\alpha$ إذن الجذور هي α ، $\imath\alpha$ ، $-\alpha$ و $-\imath\alpha$ و بالتالي فإنّ :

$$z^4+az^2+bz+c=(z-\alpha)(z-\imath\alpha)(z+\alpha)(z+\imath\alpha)=(z^2-\alpha^2)(z^2+\alpha^2)=z^4-\alpha^4$$

بالمطابقة، نستنتج أنّ $a=0$ ، $b=0$ و $c=-\alpha^4$.

بالعكس إذا كان $a=0$ و $b=0$ فإنّ $P(z)=z^4+c$ إذن جذور P هي الجذور الرابعة للعدد $-c$ و نعلم أنّ صور الجذور الرابعة لعدد مركب غير معدوم هي رؤوس مربع مركزه O .

في الأخير، الشرط الذي نبحث عنه هو : $a=b=0$.

■

24 ليكن z عدداً مركبا و A ، B ، C ثلاث نقط من المستوي مختلفة مثنى مثنى لواحقها z ، z^2 ، z^3 على الترتيب.

ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى يكون المبدأ O هو نقطة تقاطع أعمدة المثلث ABC ؟

الحلّ. بما أنّ النقط A ، B و C مختلفة مثنى مثنى فإنّ $z\neq z^2$ و $z\neq z^3$ و $z^2\neq z^3$ أي $z\notin\{0,1,-1\}$.
نضع $z=x+\imath y$ مع $x,y\in\mathbb{R}$. حسب اللازمة 1 صفحة 53 :

$$\begin{aligned}\text{O نقطة تقاطع أعمدة ABC}&\iff(OA)\perp(BC)\quad\text{و}\quad(OB)\perp(AC)\\&\iff\frac{z^3-z^2}{z-0}\in\imath\mathbb{R}\quad\text{و}\quad\frac{z^3-z}{z^2}\in\imath\mathbb{R}\\&\iff\operatorname{Re}(z^2-z)=0\quad\text{و}\quad\overline{\left(\frac{z^2-1}{z}\right)}=-\frac{z^2-1}{z}\\&\iff\operatorname{Re}\left[(x^2-x-y^2)+\imath y(2x-1)\right]=0\quad\text{و}\quad\frac{\overline{z}^2-1}{\overline{z}}=-\frac{z^2-1}{z}\\&\iff x^2-x-y^2=0\quad\text{و}\quad z\left(\overline{z}^2-1\right)+\overline{z}\left(z^2-1\right)=0\\&\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}\quad\text{و}\quad\overline{z}|z|^2-z+z|z|^2-\overline{z}=0\\&\iff\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}\quad\text{و}\quad(z+\overline{z})\left(|z|^2-1\right)=0\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad 2\,\mathrm{Re}\,(z)\times\left(|z|^2-1\right)=0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \left(\mathrm{Re}\,(z)=0 \quad \text{أو} \quad |z|=1\right)$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \left(x=0 \quad \text{أو} \quad x^2+y^2=1\right)$$
$$\iff \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}\\ x=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-y^2=\frac{1}{4}\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}y^2=x^2-x\\ x^2+\left(x^2-x\right)=1\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}y^2=x^2-x\\ x=1 \quad \text{أو} \quad x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}\left(x=1 \quad \text{و} \quad y^2=0\right)\\ \left(x=-\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y^2=\frac{3}{4}\right)\end{cases} \quad \text{أو}$$
$$\iff z=0 \quad \text{أو} \quad z=1 \quad \text{أو} \quad z=j \quad \text{أو} \quad z=j^2$$

و بما أنّ $z\notin\{0,1,-1\}$ فإنّ $z=j$ أو $z=j^2$ و في كلتا الحالتين فإنّ $\{z,z^2,z^3\}=\left\{1,j,j^2\right\}$ إذن يوجد مثلث ABC وحيد و هو المثلث الذي لواحق رؤوسه هي 1 ، j^2 و j^3 .

ملاحظة 17 : ◁ كان بالإمكان إضافة الشرط $(AB)\perp(OC)$ لكن ذلك لا يُغيِّر النتيجة لأنّ الأعمدة الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة و هي نقطة تقاطع عمودين كيفيّين.

كان بالإمكان أيضاً اِتباع نفس طريقة الشطر الأوّل من التكافؤ :

$$(OB)\perp(AC) \iff \frac{z^3-z}{z^2}\in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\left(\frac{z^2-1}{z}\right)=0$$
$$\iff \mathrm{Re}\left[\frac{x\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+y^2}+i\frac{y\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2}\right]=0$$
$$\iff x\left(x^2+y^2-1\right)=0$$

▷

■

25 ما هو الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تحققه الأعداد المركبة a ، b ، c حتى تكون النقط A ، B ، C التي لواحقها a ، b ، c على استقامة واحدة ؟

الحلّ. • بدايةً، نفرض أنّ النقط A ، B ، C مختلفة مثنى مثنى أي $a\neq b$ و $a\neq c$ و $b\neq c$. حسب اللازمة 1 صفحة

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

: 53

$$\begin{aligned} A\,،\,B \text{ و } C \text{ على استقامة واحدة} &\iff \frac{c-b}{c-a} \in \mathbb{R} \iff \overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)} = \frac{c-b}{c-a} \\ &\iff \frac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{a}} = \frac{c-b}{c-a} \iff \left(\overline{c}-\overline{b}\right)(c-a) = \left(\overline{c}-\overline{a}\right)(c-b) \\ &\iff \overline{c}c - \overline{c}a - \overline{b}c + \overline{b}a = \overline{c}c - \overline{c}b - \overline{a}c + \overline{a}b \\ &\iff a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = \overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a \end{aligned}$$

لكن $\overline{a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}} = \overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a$ إذن :

$$\begin{aligned} A\,،\,B \text{ و } C \text{ على استقامة واحدة} &\iff a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = \overline{a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}} \\ &\iff a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

و هو الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تحققه الأعداد المركبة $a\,،\,b\,،\,c$ حتى تكون النقط $A\,،\,B\,،\,C$ التي لواحقها $a\,،\,b\,،\,c$ على استقامة واحدة.

- إذا لم تكن النقط $A\,،\,B\,،\,C$ مختلفة مثنى مثنى أي إذا كان $a = b$ أو $a = c$ أو $b = c$ أو $a = b = c$ فإنّ النقط $A\,،\,B\,،\,C$ على استقامة واحدة و في هذه الحالة أيضاً العدد $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}$ حقيقي. مثلاً، إذا كان $a = b$ فإنّ :

$$a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a} = a\overline{a} + a\overline{c} + \overline{a}c = |a|^2 + a\overline{c} + \overline{a\overline{c}} = |a|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(a\overline{c}\right) \in \mathbb{R}$$

إذن، الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تحققه الأعداد المركبة $a\,،\,b\,،\,c$ حتى تكون النقط $A\,،\,B\,،\,C$ التي لواحقها $a\,،\,b\,،\,c$ على استقامة واحدة هو أن يكون العدد $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}$ حقيقياً.

ملاحظة 18 : ◁ هذا الشرط أعمّ من شرط اللازمة 1 صفحة 53 لأنه لا يشترط أن تكون النقط $A\,،\,B\,،\,C$ مختلفة مثنى مثنى. ▷

■

26 ☼

$A\,،\,B$ و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها هي z ، z^2 و z^3 على الترتيب.
أوجد الأعداد المركبة z التي من أجلها يكون المثلث ABC متساوي الساقين.

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$.
المثلث ABC متساوي الساقين إذا كان $AB = AC$ أو $BA = BC$ أو $CA = CB$. إذن نُميِّز 3 حالات :

- الحالة الأولى :

$$\begin{aligned} AB = AC &\iff |z^2 - z| = |z^3 - z| \iff |z| \cdot |z-1| = |z| \cdot |z-1| \cdot |z+1| \\ &\iff |z| \cdot |z-1| \left(|z+1| - 1\right) = 0 \\ &\iff |z| = 0 \quad \text{أو} \quad |z-1| = 0 \quad \text{أو} \quad |z+1| - 1 = 0 \\ &\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad |z+1| = 1 \\ &\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z = 1 \quad \text{أو} \quad |z+1| = 1 \\ &\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z = 1 \quad \text{أو} \quad (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ $z = 0$ يُحقق $|z+1| = 1$. إذن المجموعة التي نبحث عنها هي اتحاد النقطة $M_1\,(-1, 0)$ و الدائرة $\mathscr{C}_1$ التي مركزها $\Omega_1\,(1, 0)$ و نصف قطرها 1 .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- الحالة الثانية :

$$\begin{aligned}
BA = BC &\iff |z - z^2| = |z^3 - z^2| \iff |z| \cdot |z-1| = |z|^2 \cdot |z-1| \\
&\iff |z| \cdot |z-1| (|z| - 1) = 0 \\
&\iff |z| = 0 \quad \text{أو} \quad |z-1| = 0 \quad \text{أو} \quad |z| - 1 = 0 \\
&\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad |z| = 1 \\
&\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z = 1 \quad \text{أو} \quad |z| = 1 \\
&\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z = 1 \quad \text{أو} \quad x^2 + y^2 = 1
\end{aligned}$$

نلاحظ أنّ $z = 1$ يُحقق $|z| = 1$. إذن المجموعة التي نبحث عنها هي اتحاد النقطة $O(0,0)$ و الدائرة $\mathscr{C}_2$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها 1 .

- الحالة الثالثة :

$$\begin{aligned}
CA = CB &\iff |z - z^3| = |z^2 - z^3| \iff |z| \cdot |z-1| \cdot |z+1| = |z|^2 \cdot |z-1| \\
&\iff |z| \cdot |z-1| (|z+1| - |z|) = 0 \\
&\iff |z| = 0 \quad \text{أو} \quad |z-1| = 0 \quad \text{أو} \quad |z+1| - |z| = 0 \\
&\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad |z+1| = |z| \\
&\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z = 1 \quad \text{أو} \quad (x+1)^2 + y^2 |z| = x^2 + y^2 \\
&\iff z = 0 \quad \text{أو} \quad z = 1 \quad \text{أو} \quad x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي اتحاد النقطتين $O(0,0)$ و $M_1(1,0)$ و المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = -\frac{1}{2}$ (أي $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$) .

في الأخير، مجموعة الأعداد المركبة التي تحقق المطلوب هي اتحاد الدائرتين $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ و المستقيم (Δ) (لاحظ أنّ $O \in \mathscr{C}_1$ و $M_1 \in \mathscr{C}_2$) . ■

27

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
z عدد مركب صورته M. نضع :

$$L = \frac{z+1}{z-1}$$

1. عيّن المجموعة $\mathscr{E}$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L عددًا حقيقيا.
2. عيّن المجموعة $\mathscr{E}'$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صِرفًا.
3. نسمي M' صورة L . عيّن مجموعة النقط M' بحيث تكون النقط O ، M ، M' على استقامة واحدة.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. نضع $A(1)$ و M مع $z = x + \imath y$. $x, y \in \mathbb{R}$. حتى يكون L مُعرَفاً يجب أن يكون $z \neq 1$ أي $M \neq A$. لدينا :

$$\begin{aligned} L = \frac{z+1}{z-1} &= \frac{x+1+\imath y}{x-1+\imath y} = \frac{(x+1+\imath y)(x-1-\imath y)}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2-x-\imath xy+x-1-\imath y+\imath xy-\imath y+y^2}{(x-1)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \imath\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \end{aligned}$$

• 1 لتكن $M \neq A$. لدينا :

$$M \in \mathscr{E} \iff \operatorname{Im}(L) = 0 \iff -\frac{2y}{(x-1)^2+y^2} = 0 \iff y = 0$$

و هي المستقيم Δ الذي معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) باستثناء النقطة $A(1)$.

إذن : $\mathscr{E} = \Delta \setminus \{A\}$.

• 2 لتكن $M \neq A$. لدينا :

$$M \in \mathscr{E}' \iff \operatorname{Re}(L) = 0 \iff \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} = 0 \iff x^2+y^2 = 1$$

و هي الدائرة $\mathscr{C}(O, 1)$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة A .

إذن : $\mathscr{E}' = \mathscr{C} \setminus \{A\}$.

• 3 ليكن $z \neq 1$.

إذا كان $z = 0$ فإنّ $M = O$ و بالتالي النقط $O(0)$ ، $M(z)$ ، $M'(L)$ على استقامة واحدة. نفرض إذن أنّ $z \neq 0$.

تكون النقط $O(0)$ ، $M(z)$ ، $M'(L)$ على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $\widehat{MOM'} = 0 \pmod{\pi}$ أي إذا و فقط إذا كان $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = 0 \pmod{\pi}$. لكن $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) = \arg\left(\frac{L-0}{z-0}\right) \pmod{2\pi}$ و بالتالي النقط $O(0)$ ، $M(z)$ ، $M'(L)$ على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان $\arg\left(\frac{L}{z}\right) = 0 \pmod{\pi}$ أي إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Im}\left(\frac{L}{z}\right) = 0$. لكن :

$$\begin{aligned} \frac{L}{z} = \frac{z+1}{z(z-1)} = \frac{z+1}{z^2-z} &= \frac{x+1+\imath y}{x^2-y^2+2\imath xy-x-\imath y} = \frac{x+1+\imath y}{x^2-y^2-x+\imath y(2x-1)} \\ &= \frac{(x+1+\imath y)\left(x^2-y^2-x-\imath y(2x-1)\right)}{\left(x^2-y^2-x\right)^2+y^2(2x-1)^2} \\ &= \frac{x^3-xy^2-x^2-\imath xy(2x-1)+x^2-y^2-x-\imath y(2x-1)+\imath x^2y-\imath y^3-\imath xy+y^2(2x-1)}{\left(x^2-y^2-x\right)^2+y^2(2x-1)^2} \\ &= \frac{x^3+xy^2-x-2y^2}{\left(x^2-y^2-x\right)^2+y^2(2x-1)^2} + \imath\frac{-y^3-x^2y-2xy+y}{\left(x^2-y^2-x\right)^2+y^2(2x-1)^2} \end{aligned}$$

منه :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{L}{z}\right) = 0 &\iff \frac{-y^3-x^2y-2xy+y}{\left(x^2-y^2-x\right)^2+y^2(2x-1)^2} \\ &\iff y\left(x^2+y^2+2x-1\right) = 0 \\ &\iff y = 0 \quad \text{أو} \quad x^2+y^2+2x-1 = 0 \\ &\iff y = 0 \quad \text{أو} \quad (x+1)^2+y^2 = 2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و هي اتحاد المستقيم Δ الذي معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) باستثناء النقطتين $O(0)$ و $A(1)$ (لأنّ $z \neq 0$ و $z \neq 1$) مع الدائرة $\mathscr{C}\left(\Omega, \sqrt{2}\right)$ التي مركزها $\Omega(-1,0)$ و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

في الأخير، مجموعة النقط التي تحقق المطلوب هي اتحاد المستقيم Δ باستثناء النقطة $A(1)$ مع الدائرة $\mathscr{C}$ (لا نستثني النقطة $O(0)$ لأنها تحقق المطلوب أيضاً و درسنا الحالة الخاصة $M = O$ في البداية).

■

28 ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. نضع $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. حدِّد ثم أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث :

1. $|Z| = 1$
2. $|Z| = 2$
3. Z حقيقي (أي $Z \in \mathbb{R}$)
4. Z تخيلي صرف (أي $Z \in i\mathbb{R}$)

الحلّ. نستعرض فيما يلي طريقتين : الأولى بالحساب و الثانية هندسية :
ليكن $z \in \mathbb{C}$ حيث $z \neq 1$. نضع $z = x + iy$ مع $x, y \in \mathbb{R}$ و $(x, y) \neq (1, 0)$.
لتكن A النقطة التي لاحقتها -1 ؛ B النقطة ذات اللاحقة 1 و $\mathscr{E}$ المجموعة التي نبحث عنها.
لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B ، لاحقتها z .

1. **بالحساب** : لدينا

$$|Z| = 1 \iff \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \iff (1+x)^2 + y^2 = (1-x)^2 + y^2 \iff 4x = 0 \iff x = 0$$

إذن مجموعة النقط التي تحقق المطلوب هي المستقيم الذي معادلته $x = 0$ أي (Oy) (محور التراتيب).

هندسياً : لدينا

$$M \in \mathscr{E} \iff |z+1| = |z-1| \iff AM = BM$$

إذن المجموعة $\mathscr{E}$ هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$. نتحقق بسهولة أنّ هذا المحور هو المستقيم (Oy) (عمودي على $[AB]$ أي على (Ox) و يمر من منتصف $[AB]$ أي من O).

2. **بالحساب** : لدينا

$$|Z| = 2 \iff \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 4 \iff (1+x)^2 + y^2 = 4(1-x)^2 + 4y^2$$
$$\iff x^2 + y^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 4y^2 - 8x + 4 \iff 3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$$
$$\iff x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0 \iff \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + (y-0)^2 = \frac{16}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

إذن مجموعة النقط التي تحقق المطلوب هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ و نصف قطرها $\frac{4}{3}$ (النقطة $(1,0)$ لا تنتمي إليها).

هندسياً : لتكن $\Omega(\omega)$ مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A(1), B(-4)\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لدينا : $(\omega-(-1))+(-4)(\omega-1)=0$ منه $\omega=\frac{5}{3}+0\imath$ إذن $\Omega=\left(\frac{5}{3},0\right)$ و بالتالي :

$$M\in\mathscr{E}\iff|z+1|^2=4|z-1|^2\iff AM^2=4BM^2\iff\overrightarrow{AM}^2-4\overrightarrow{BM}^2=0$$
$$\iff\left(\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)^2-4\left(\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{\Omega M}\right)^2=0$$
$$\iff-3\overrightarrow{\Omega M}+2\underbrace{\left(\overrightarrow{A\Omega}-4\overrightarrow{B\Omega}\right)}_{=\vec{0}}\cdot\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{A\Omega}^2-4\overrightarrow{B\Omega}^2=0$$
$$\iff-3\Omega M^2=\Omega A^2-4\Omega B^2\iff\Omega M^2=\frac{1}{3}\left(\Omega A^2-4\Omega B^2\right)$$

لكن $\Omega A^2=\left(\frac{5}{3}+1\right)^2+0^2=\frac{64}{9}$ و $\Omega B^2=\left(\frac{5}{3}-1\right)^2+0^2=\frac{4}{9}$ إذن :

$$\frac{1}{3}\left(\Omega A^2-4\Omega B^2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{64}{9}-\frac{16}{9}\right)=\frac{16}{9}$$

منه : $M\in\mathscr{E}\iff\Omega M^2=\frac{16}{9}\iff\Omega M=\frac{4}{3}$

و نجد الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{5}{3},0\right)$ و نصف قطرها $\frac{4}{3}$.

☜ طريقة هندسية أخرى في التمرين 169 صفحة 253.

• 3. **بالحساب** : لدينا

$$Z\in\mathbb{R}\iff Z=\overline{Z}\iff\frac{1+z}{1-z}=\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\iff(1+z)(1-\overline{z})=(1-z)(1+\overline{z})$$
$$\iff z-\overline{z}=\overline{z}-z\iff z=\overline{z}\iff z\in\mathbb{R}$$

و بما أنّ $z=1\in\mathbb{R}$ فإنّ المجموعة التي نبحث عنها هي $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ أي المستقيم (Ox) باستثناء النقطة $B(1,0)$.

هندسياً : لدينا

$$M\in\mathscr{E}\iff Z=0\quad\text{أو}\quad\arg(Z)=0\pmod{\pi}\iff z=-1\quad\text{أو}\quad\arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=0\pmod{\pi}$$
$$\iff M=A\quad\text{أو}\quad\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}\right)=0\pmod{\pi}\iff M\in(AB)\setminus\{B\}$$

و نجد المستقيم (Ox) باستثناء النقطة $B(1,0)$.

• 4. **بالحساب** : لدينا

$$Z\in\imath\mathbb{R}\iff Z=-\overline{Z}\iff\frac{1+z}{1-z}=-\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\iff(1+z)(1-\overline{z})=-(1-z)(1+\overline{z})$$
$$\iff1-z\overline{z}=-1+z\overline{z}\iff|z|^2=1\iff|z|=1$$

و هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة $(1,0)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

هندسياً : لدينا

$$M \in \mathscr{E} \iff Z = 0 \quad \text{أو} \quad \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff z = -1 \quad \text{أو} \quad \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0 \pmod{\pi}$$

$$\iff M = A \quad \text{أو} \quad \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$$

$$\iff \text{النقطة } M \text{ تنتمي إلى الدائرة التي قطرها } AB \text{ باستثناء النقطة } B$$

$$\iff M \in \mathscr{C}\left(O, \frac{1}{2}AB\right) \setminus \{B\} \iff M \in \mathscr{C}(O,1) \setminus \{B\}$$

و نجد الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 باستثناء النقطة $B(1,0)$.

■

29

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

z عدد مركب صورته M. نضع

$$L = \frac{z-\imath}{z+\imath}$$

1. عيّن المجموعة $\mathscr{E}$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L عددًا حقيقيا.
2. عيّن المجموعة $\mathscr{E}'$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L حقيقيا سالبا.

الحلّ : نضع $A(-\imath)$ و $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. حتى يكون العدد L مُعرَّفاً يجب أن يكون $z \neq -\imath$ أي $M \neq A$. لدينا

$$L = \frac{z-\imath}{z+\imath} = \frac{x+\imath(y-1)}{x+\imath(y+1)} = \frac{(x+\imath(y-1))(x-\imath(y+1))}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - \imath xy - \imath x + \imath xy - \imath x + y^2 - 1}{x^2+(y+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} - \frac{2\imath x}{x^2+(y+1)^2}$$

1. لتكن $M \neq A$. لدينا :

$$M \in \mathscr{E} \iff \operatorname{Im}(L) = 0 \iff -\frac{2x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \iff x = 0$$

و هي المستقيم Δ الذي معادلته $x = 0$ (محور التراتيب) باستثناء النقطة $A(-\imath)$.

إذن : $\mathscr{E} = \Delta \setminus \{A\}$ أو بتعبير آخر : $\mathscr{E} = \imath\mathbb{R} \setminus \{A\}$.

2. لتكن $M \neq A$. لدينا :

$$M \in \mathscr{E}' \iff \begin{cases} \operatorname{Im}(L) = 0 \\ \operatorname{Re}(L) \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{2x}{x^2+(y+1)^2} = 0 \\ \dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y^2 \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و هي القطعة المستقيمة [AB] باستثناء النقطة A حيث B (ι) .

إذن : $\mathscr{E}' =]AB[$.

■

30 ليكن z عدداً مركبا يختلف عن 1. نعتبر النقطة M من المستوي المركب التي لاحقتها z و نضع $Z = \frac{z+\iota}{z-1}$. حدّد :

1. المجموعة E للنقط M بحيث يكون Z عدداً حقيقيا.
2. المجموعة F للنقط M بحيث يكون $|Z| = 1$.
3. المجموعة G للنقط M بحيث يكون $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

الحلّ. نضع $A(-\iota)$ و $B(1)$ منه $Z = \frac{z+\iota}{z-1} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$.

1. $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \pmod{\pi}$ أو $z = z_A$ $\iff$ $(Z = 0$ أو $\arg(Z) = 0 \pmod{\pi})$ $\iff$ Z حقيقي

لكن

M تنتمي إلى المستقيم (AB) باستثناء A و B $\iff$ $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \pmod{\pi}$

منه نستنتج أنّ المجموعة E هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة B.

2. M تنتمي إلى مُنصّف القطعة [AB] $\iff$ $AM = BM$ $\iff$ $|z - z_A| = |z - z_B|$ $\iff$ $|Z| = 1$

فالمجموعة F هي مُنصّف القطعة [AB].

3. $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ $\iff$ $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

فالمجموعة G هي نصف الدائرة التي قطرها [AB]، باستثناء النقطة B، بحيث يكون المثلث AMB مباشراً.

■

31 z عدد مركب صورته M.

1. عيّن $\mathscr{E}$ مجموعة النقط M بحيث يكون $(z - 2\iota)(\bar{z} - 1)$ تخيليا صرفا.
2. عيّن $\mathscr{E}'$ مجموعة النقط M بحيث يكون $(z - 2\iota)(\bar{z} - 1)$ حقيقيا.

الحلّ. نضع $z = x + \iota y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$(z - 2\iota)(\bar{z} - 1) = z\bar{z} - z - 2\iota\bar{z} + 2\iota = (x + \iota y)(x - \iota y) - x - \iota y - 2\iota(x - \iota y) + 2\iota$$
$$= x^2 + y^2 - x - \iota y - 2\iota x - 2y + 2\iota = x^2 + y^2 - x - 2y + \iota(-2x - y + 2)$$

و بالتالي :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 1

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\iff \operatorname{Re}\left((z-2\imath)\left(\overline{z}-1\right)\right)=0 \\ &\iff x^2+y^2-x-2y=0 \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

إذن $\mathscr{E}$ هي الدائرة $\left(\Omega, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ التي مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

• 2

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E}' &\iff \operatorname{Re}\left((z-2\imath)\left(\overline{z}-1\right)\right)=0 \\ &\iff -2x-y+2=0 \\ &\iff y=-2x+2 \end{aligned}$$

إذن $\mathscr{E}'$ هي المستقيم Δ الذي معادلته $y=-2x+2$.

■

32

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
z عدد مركب صورته M. نضع

$$L=\frac{\overline{z}+2}{z+2}$$

• 1 عيّن الجزءين الحقيقي و التخيلي للعدد L.

• 2 عيّن المجموعة $\mathscr{E}$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L عددًا حقيقيا.

• 3 عيّن المجموعة $\mathscr{E}'$ للنقط M من المستوي بحيث يكون L تخيليا صِرفًا.

الحلّ. نضع $A(-2)$ و $z=x+\imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. حتى يكون العدد L مُعرَّفاً يجب أن يكون $z \neq -2$ أي $M \neq A$.

• 1 لدينا :

$$\begin{aligned} L=\frac{\overline{z}+2}{z+2} &= \frac{x+2-\imath y}{x+2+\imath y}=\frac{(x+2-\imath y)^2}{(x+2)^2+y^2} \\ &= \frac{(x+2)^2-2\imath y(x+2)+(\imath y)^2}{(x+2)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+4x+4-2\imath xy-4\imath y-y^2}{(x+2)^2+y^2} \\ &= \frac{x^2-y^2+4x+4}{(x+2)^2+y^2}-\imath\frac{2xy+4y}{(x+2)^2+y^2} \end{aligned}$$

و هو الشكل الجبري للعدد L منه $\operatorname{Re}(L)=\frac{x^2-y^2+4x+4}{(x+2)^2+y^2}$ و $\operatorname{Im}(L)=-\frac{2xy+4y}{(x+2)^2+y^2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 لتكن $M \neq A$. لدينا :

$$M \in \mathscr{E} \iff \text{Im}(L) = 0 \iff -\frac{2xy+4y}{(x+2)^2+y^2} = 0 \iff 2xy+4y = 0$$
$$\iff y(2x+4) = 0 \iff y = 0 \quad \text{أو} \quad 2x+4 = 0$$
$$\iff y = 0 \quad \text{أو} \quad x = -2$$

إذن $\mathscr{E}$ هي اتحاد المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) مع المستقيم Δ_2 الذي معادلته $x = -2$ باستثناء النقطة $A(-2)$.

• 3 لتكن $M \neq A$. لدينا :

$$M \in \mathscr{E}' \iff \text{Re}(L) = 0 \iff \frac{x^2-y^2+4x+4}{(x+2)^2+y^2} = 0 \iff x^2-y^2+4x+4 = 0$$
$$\iff (x+2)^2 - y^2 = 0 \iff y = -(x+2) \quad \text{أو} \quad y = x+2$$

و بالتالي $\mathscr{E}'$ هي اتحاد المستقيم Δ'_1 الذي معادلته $y = -x-2$ باستثناء النقطة $A(-2)$ مع المستقيم Δ'_2 الذي معادلته $y = x+2$ باستثناء النقطة $A(-2)$ (النقطة A هي نقطة تقاطع هذين المستقيمين) .

■

33 ليكن z عدداً مركبا يختلف عن 1 و M صورته في المستوي المركب. نضع $Z = \dfrac{2\imath z+1}{z-1}$.

• 1 حدّد :

(ا) المجموعة E للنقط M بحيث يكون Z عدداً حقيقيا.

(ب) المجموعة F للنقط M بحيث يكون $|Z| = 2$.

• 2 مثّل المجموعتين E و F في معلم متعامد و متجانس.

الحلّ. نضع $z = x+\imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. بما أنّ $z \neq 1$ فإنّ $(x,y) \neq (0,1)$.

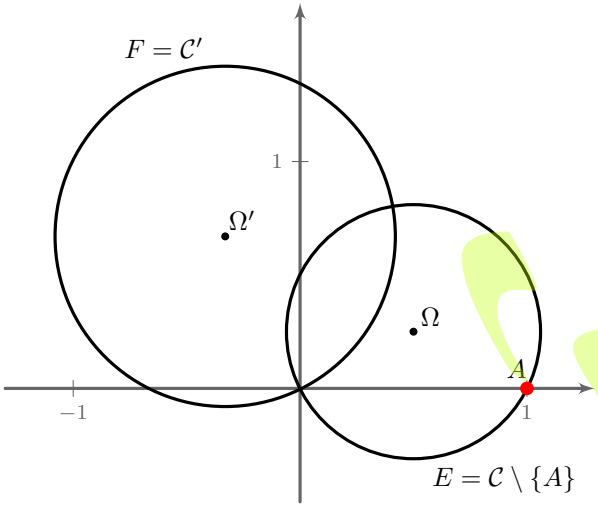
• 1 لدينا :

$$Z = \frac{2\imath z+1}{z-1} = \frac{2\imath(x+\imath y)+1}{x+\imath y-1} = \frac{-2y+2\imath x}{x-1+\imath y} = \frac{(1-2y+2\imath x)(x-1-\imath y)}{(x-1)^2+y^2}$$
$$= \frac{x-1-\imath y-2xy+2y+2\imath y^2+2\imath x^2-2\imath x+2xy}{(x-1)^2+y^2}$$
$$= \frac{x-1+2y}{(x-1)^2+y^2} + \imath\frac{2x^2+2y^2-2x-y}{(x-1)^2+y^2}$$

و هو الشكل الجبري للعدد Z .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.3

(ا) لدينا :

$$Z \in \mathbb{R} \iff \text{Im}(Z) = 0 \iff \frac{2x^2 + 2y^2 - 2x - y}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$
$$\iff 2x^2 + 2y^2 - 2x - y = 0 \iff x^2 + y^2 - x - \frac{1}{2}y = 0$$
$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$$
$$\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

و هي معادلة الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{4}$. لكن النقطة $A(1,0)$ تنتمي إلى هذه الدائرة و بالتالي : $E = \mathscr{C} \setminus \{A(1,0)\}$.

(ب) لدينا :

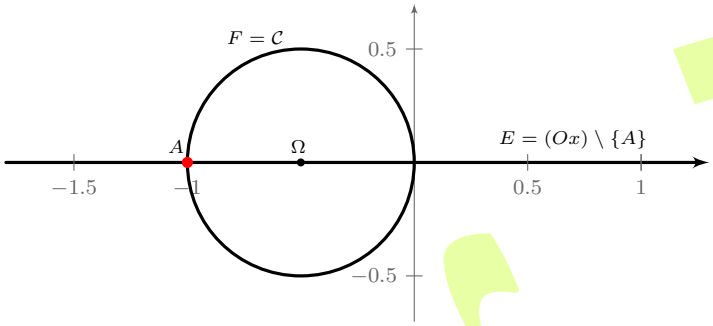
$$|Z| = 2 \iff |2\imath z + 1| = 2|z - 1| \iff |2\imath z + 1|^2 = 4|z - 1|^2$$
$$\iff |1 - 2y + 2\imath x|^2 = 4|x - 1 + \imath y|^2 \iff (1 - 2y)^2 + (2x)^2 = (x-1)^2 + y^2$$
$$\iff 3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y = 0 \iff x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = 0$$
$$\iff \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

و هي معادلة الدائرة $\mathscr{C}'$ التي مركزها $\Omega'\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{3}$. و بما أنّ النقطة $A(1,0)$ لا تنتمي إلى هذه الدائرة فإنّ : $F = \mathscr{C}'$.

• 2. أنظر الشكل VI.3 .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل 4.VI

34 ليكن $z = x + \imath y$ عدداً مركبا يختلف عن -1 (x و y عددان حقيقيان) و لتكن M النقطة التي لاحقتها z.

نضع $Z = \dfrac{\imath z}{z+1}$.

1. عبّر عن الجزئين الحقيقي و التخيلي للعدد Z بدلالة x و y .
2. إستنتج المجموعة E للنقط M بحيث $\mathrm{Re}(Z) = 0$ و المجموعة F للنقط M بحيث $\mathrm{Im}(Z) = 0$.

الحلّ. بما أنّ $z \neq -1$ فإنّ $(x, y) \neq (-1, 0)$.

1. لدينا :

$$Z = \frac{\imath z}{z+1} = \frac{\imath(x+\imath y)}{x+\imath y+1} = \frac{-y+\imath x}{x+1+\imath y} = \frac{(-y+\imath x)(x+1-\imath y)}{(x+1)^2+y^2}$$
$$= \frac{-xy-y+\imath y^2+\imath x^2+\imath x+xy}{(x+1)^2+y^2} = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2} + \imath\frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$$

إذن $\mathrm{Re}(Z) = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$ و $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$.

2. لدينا :

$$\mathrm{Re}(Z) = 0 \iff -\frac{y}{(x+1)^2+y^2} = 0 \iff y = 0$$

إذن E هي مجموعة النقط التي لواحقها تُحقق $\mathrm{Im}(z) = 0$ أي هي المستقيم (Ox) (محور الأعداد الحقيقية) باستثناء النقطة $A(-1, 0)$. من جهة أخرى :

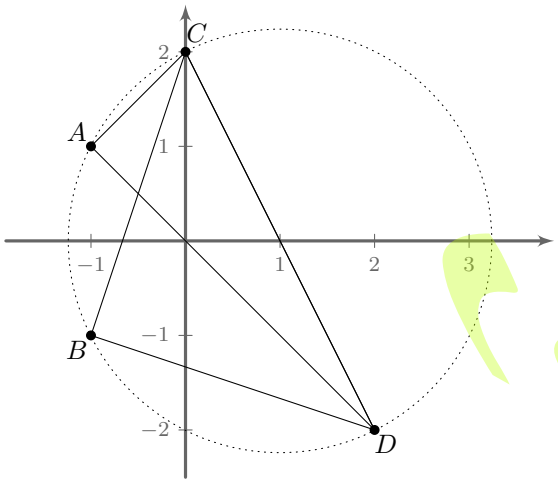
$$\mathrm{Im}(Z) = 0 \iff x^2+y^2+x = 0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

و هي معادلة الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ و نصف قطرها $\dfrac{1}{2}$.

لكن $A(-1, 0)$ تنتمي إلى هذه الدائرة و بالتالي $F = \mathscr{C} \setminus \{A(-1, 0)\}$ (شكل 4.VI).

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.5

35 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها $a=-1+\imath$ ، $b=-1-\imath$ ، $c=2\imath$ و $d=2-2\imath$ على الترتيب.

1. علم النقط A ، B ، C و D .
2. أكتب العددين $\frac{c-a}{d-a}$ و $\frac{c-b}{d-b}$ على الشكل الجبري ثمّ الأسي.
3. إستنتج طبيعة المثلثين ACD و BCD .
4. أثبت أنّ النقط A ، B ، C و D تقع على دائرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

الحلّ. 1. أنظر الشكل VI.5 .

2. لدينا :

$$\frac{c-a}{d-a}=\frac{2\imath+1-\imath}{2-2\imath+1-\imath}=\frac{1+\imath}{3-3\imath}=\frac{(1+\imath)^2}{3\left(1^2+1^2\right)}=\frac{2\imath}{6}=\frac{1}{3}\imath \quad \text{(الشكل الجبري)}$$

$$=\frac{1}{3}e^{\imath\pi/2} \quad \text{(الشكل الأسي)}$$

$$\frac{c-b}{d-b}=\frac{2\imath+1+\imath}{2-2\imath+1+\imath}=\frac{1+3\imath}{3-\imath}=\frac{\imath(3-\imath)}{3-\imath}=\imath \quad \text{(الشكل الجبري)}$$

$$=e^{\imath\pi/2} \quad \text{(الشكل الأسي)}$$

3. بما أنّ $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{d-a}\right)=\frac{\pi}{2}\pmod{2\imath}$ فإنّ المثلث ACD قائم الزاوية عند الرأس A .
بالمثل، $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)=\arg\left(\frac{c-b}{d-b}\right)=\frac{\pi}{2}\pmod{2\imath}$ إذن فالمثلث BCD قائم الزاوية عند الرأس B .

4. لتكن I منتصف القطعة [CD] . لاحقتها هي $z_I=\frac{c+d}{2}=1$ و $ID=|d-z_I|=|1-2\imath|=\sqrt{5}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

القطعة المستقيمة [CD] وتر في المثلث القائم ACD و بالتالي IA = IC = ID أي أنّ النقط A ، C و D تنتمي كلها إلى الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها ID .

بالمثل، [CD] وتر في المثلث القائم BCD منه IB = IC = ID أي أنّ النقط B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها ID .

إذن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها $\sqrt{5}$.

(يمكن أيضاً استخدام الزوايا : $\widehat{CID} = \pi = 2\widehat{CAD} = 2\widehat{CBD}$ إذن فالرباعي ABDC رباعي دائري) .

■

36 ☼ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها هي $Z_A = \sqrt{3} + \imath$ ، $Z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}\imath$ و $Z_C = 1 + \sqrt{3}\imath$ على الترتيب.
أثبت أنّ النقط A ، B و C تقع على دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها R .

الحلّ. حتى نبرهن أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة مركزها O يكفي أن نبرهن أنّ OA = OB = OC . لكن :

$$OA = |Z_A - Z_O| = |\sqrt{3} + \imath| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$$
$$OB = |Z_B - Z_O| = |\sqrt{2} + \imath\sqrt{2}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$$
$$OC = |Z_C - Z_O| = |1 + \imath\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

إذن OA = OB = OC و هذا يعني أنّ النقط A ، B و C تقع على الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها R = 2 . ■

37 ☼ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها هي $Z_A = -\imath$ ، $Z_B = 4 + \imath$ و $Z_C = 2 - 5\imath$ على الترتيب.

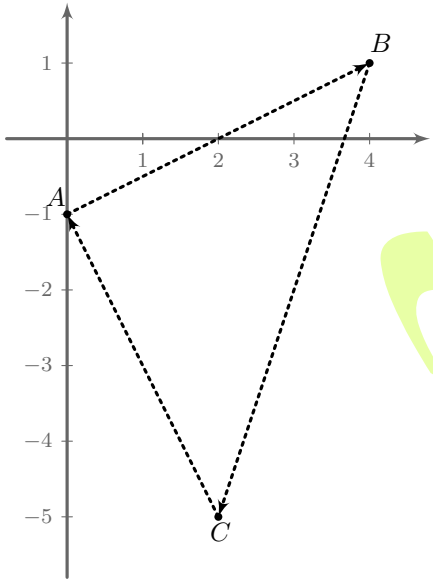
- 1• علم النقط A ، B و C في هذا المعلم.
- 2• أحسب الأعداد Z_1 ، Z_2 و Z_3 لواحق الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CA}$ على الترتيب.
- 3• أحسب طويلة كل من Z_1 ، Z_2 و Z_3 . ماذا يمكن قوله عن المثلث ABC ؟

الحلّ. 1• أنظر الشكل VI.6 .

2• لدينا :

$$Z_1 = Z_B - Z_A = 4 + \imath + \imath = 4 + 2\imath$$
$$Z_2 = Z_C - Z_B = 2 - 5\imath - 4 - \imath = -2 - 6\imath$$
$$Z_3 = Z_A - Z_C = -\imath - 2 + 5\imath = -2 + 4\imath$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.6

• 3 لدينا :

$$|Z_1| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|Z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$|Z_3| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

نلاحظ أنّ $|Z_1| = |Z_3|$ أي $AB = AC$ و بالتالي فالمثلث ABC متساوي الساقين عند الرأس A .

لكن $|Z_2|^2 = |Z_1|^2 + |Z_3|^2$ أي $BC^2 = AC^2 + AB^2$ إذن المثلث ABC قائم الزاوية عند الرأس A .

في الأخير : المثلث ABC قائم و متساوي الساقين عند الرأس A .

■

38

لتكن A ، B و C النقط التي لواحقها $2\imath$ ، 1 و $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$ على الترتيب.

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{C}$ بالعبارة $f(z) = e^{\imath\pi/3}z$ و T التحويل النقطي المرفق بها.

• 1 علم النقط A ، B و C في معلم $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

• 2 ما هي طبيعة التحويل T ؟ و ما هي عناصره المميِّزه ؟

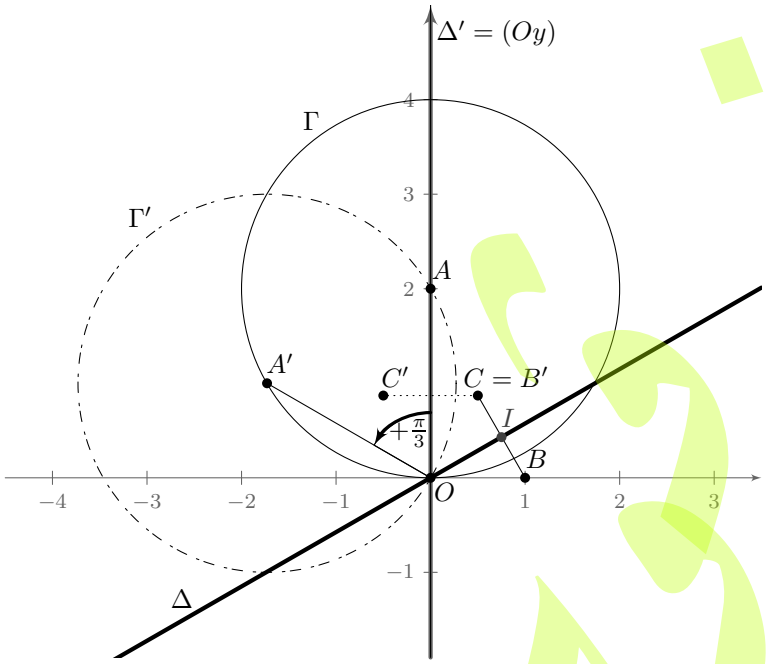
• 3 لتكن Γ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - 2\imath| = 2$.

(ا) حدّد ثمّ أنشئ المجموعة Γ . أكتب معادلتها.

(ب) حدّد ثمّ أنشئ المجموعة Γ' صورة Γ بالتحويل T (لا يُطلب إيجاد معادلتها) .

• 4 لتكن Δ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - 1| = \left|z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right|$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل 7.VI

(ا) حدّد ثمّ أنشئ المجموعة Δ . أكتب معادلتها.

(ب) حدّد ثمّ أنشئ المجموعة Δ' صورة Δ بالتحويل T (لا يُطلب إيجاد معادلتها) .

الحلّ. نُذكِّر أنّ الدوران تساوي قياس و بالتالي فصورة أي شكل هندسي هو شكل هندسي مُمَاثِل (صورة دائرة هي دائرة و صورة مستقيم هي مستقيم ... إلخ) .

1• أنظر الشكل 7.VI .

2• عبارة التحويل T من الشكل $f(z) = az + b$ حيث $a = e^{\imath\pi/3} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ و بالتالي T دوران.

لاحقة مركز هذا الدوران ω تُحقق : $\omega = e^{\imath\pi/3}\omega$ أي $\omega = 0$.

إذن T هو الدوران $\mathscr{R}\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$ الذي مركزه $O(0,0)$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

3• (ا) لتكن M صورة z في المستوي. لدينا :

$$M \in \Gamma \iff MA = 2$$

إذن Γ هي مجموعة النقط التي تبعد بمسافة 2 عن النقطة A أي Γ هي الدائرة $\mathscr{C}(A, 2)$ التي مركزها A و نصف قطرها 2 (شكل 7.VI) .

معادلة Γ هي : $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 2^2$ أي $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

(ب) Γ' هي الدائرة التي مركزها $A' = T(A)$ و نصف قطرها 2 . لاحقة النقطة A' هي :

$$e^{\imath\pi/3} \cdot 2\imath = 2e^{\imath\pi/3} \cdot e^{\imath\pi/2} = 2e^{\imath\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{5\imath\pi/6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right) = -\sqrt{3} + \imath$$

إذن Γ' هي الدائرة $\mathscr{C}'(A', 2)$ التي مركزها $A'\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ و نصف قطرها 2 .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 4 (أ) لتكن M صورة z في المستوي. لدينا :

$$M \in \Delta \iff MB = MC$$

و هي مجموعة النقط المتساوية البعد عن النقطتين B و C إذن Δ هو محور القطعة المستقيمة [BC] .

لتكن I منتصف [BC] . لاحقتها هي $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\imath$.

إذن Δ هو المستقيم الذي يمر من I و يُعامد الشعاع $\overrightarrow{BC}$ الذي لاحقته $z_C - z_B = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$. لدينا :

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\iff \overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{BC} \\ &\iff \left(x - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \\ &\iff x - \sqrt{3}y = 0 \end{aligned}$$

إذن معادلة Δ هي : $x - \sqrt{3}y = 0$.

(ب) Δ' هو محور القطعة $\left[B'C'\right]$ حيث $B' = T(B)$ و $C' = T(C)$. لدينا :

$$z_{B'} = f(z_B) = e^{\imath\pi/3} \cdot 1 = e^{\imath\pi/3} = \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_{C'} = f(z_C) = e^{\imath\pi/3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\imath\pi/3} \cdot e^{\imath\pi/3} = e^{2\imath\pi/3} = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(أنظر الشكل VI.7) .

■

39 المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن A النقطة ذات اللاحقة ι . نرفق بكل نقطة M من المستوي تختلف عن A و التي لاحقتها z ، النقطة M′ ذات اللاحقة z′ بحيث $z' = \frac{z^2}{\imath - z}$.

• 1 أوجد النقط M الصامدة أي بحيث $M' = M$.

• 2 ليكن z عدداً مركبا يختلف عن ι . نضع $z = x + \imath y$ و $z' = x' + \imath y'$ مع x ، y ، x′ و y′ أعداد حقيقية. أثبت أنّ :

$$x' = \frac{-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right)}{x^2 + (1-y)^2}$$

إستنتج المجموعة E للنقط M التي تقع صورها M′ على محور الأعداد التخيلية الصرفة ثمّ أنشئ المجموعة E .

• 3 أوجد علاقة بسيطة تربط بين الأطوال OM ، AM و OM′ .

إستنتج المجموعة F للنقط M بحيث تقع M و M′ على دائرة مركزها O ثمّ أنشئ المجموعة F .

• 4 في هذا السؤال، نعتبر نقطة M لاحقتها z و تقع على الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\frac{1}{2}$.

لتكن M′ النقطة التي لاحقتها z′ و G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، M ، M′.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ا) أحسب z_G ، لاحقة النقطة G ، بدلالة z .

(ب) أثبت أنّ G تقع على دائرة مركزها O يُطلب تعيين نصف قطرها.

(ج) بمقارنة الزاويتين $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OG}\right)$ و $\left(\vec{i}, \overrightarrow{AM}\right)$ ، إقترح إنشاءاً للنقطة G .

(د) إستنتج إنشاءاً للنقطة M' .

الحلّ. 1• لتكن $M(z)$. لدينا : $M = M'$ إذا و فقط إذا كان $z = z'$ أي إذا و فقط إذا كان $z = \frac{z^2}{\imath - z}$ أي $z^2 = \imath z - z^2$ أي $z^2 = \frac{\imath}{2}z$. منه $z = 0$ أو $z = \frac{\imath}{2}$.

إذن توجد نقطتان صامدتان هما $M_1(0)$ و $M_2\left(\frac{1}{2}\imath\right)$.

2• لدينا :

$$z' = \frac{z^2}{\imath - z} = \frac{(x+\imath y)^2}{\imath - x - \imath y} = \frac{x^2 - y^2 + 2\imath xy}{x + \imath(1-y)} = \frac{\left(x^2 - y^2 + 2\imath xy\right)\left(x + \imath(1-y)\right)}{x^2 + (1-y)^2}$$

$$= \frac{2xy - xy^2 - x^3 - \imath\left(y^3 - y^2 + x^2 y + x^2\right)}{x^2 + (1-y)^2} = \frac{-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right)}{x^2 + (1-y)^2} + \imath\frac{-y^3 + y^2 - x^2 y - x^2}{x^2 + (1-y)^2}$$

منه : $x' = \mathrm{Re}(z') = \frac{-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right)}{x^2 + (1-y)^2}$.

النقطة M' تقع على محور الأعداد التخيلية الصرفة إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}(z') = 0$ مع $z \neq \imath$ أي إذا و فقط إذا كان $-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right) = 0$ مع $(x, y) \neq (0, 1)$.

لكن $-x\left(x^2 + y^2 - 2y\right) = 0$ إذا و فقط إذا كان $x = 0$ أو $x^2 + y^2 - 2y = 0$ أي إذا و فقط إذا كان $x = 0$ أو $x^2 + (y-1)^2 = 1$ و بالتالي المجموعة E هي اتّحاد المستقيم الذي معادلته $x = 0$ ، باستثناء النقطة $A(0,1)$ ، مع الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها $A(0,1)$ و نصف قطرها 1 .

3• لدينا : $z' = \frac{z^2}{\imath - z}$ منه $|z' - 0| = \frac{|z-0|^2}{|\imath - z|}$ أي $|z-0|^2 = |\imath - z| \cdot |z' - 0|$ و هذا يعني أنّ :

$$OM^2 = AM \times OM' .$$

حتى تقع M و M' على دائرة مركزها O يجب أن يكون $OM' = OM$ و بالتالي $OM^2 = AM \times OM$ و بما أنّ $OM \neq 0$ فهذا يعني أنّ $OM = AM$ أي أنّ النقطة M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[OA]$ (النقطة A لا تنتمي إليه).

4• (ا) لدينا :

$$z_G = \frac{1}{3}\left(z_A + z + z'\right) = \frac{1}{3}\left(\imath + z + \frac{z^2}{\imath - z}\right) = \frac{(\imath + z)(\imath - z) + z^2}{3(\imath - z)} = \frac{-1}{3(\imath - z)}$$

(ب) بما أنّ M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ فإنّ $|z - \imath| = \frac{1}{2}$

أي $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$ منه :

$$z_G = \frac{-1}{3(\imath - z)} = \frac{-\left(-x - \imath(1-y)\right)}{3\left(x^2 + (1-y)^2\right)} = \frac{x + \imath(1-y)}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}\imath(1-y)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

لكن $x^2+(1-y)^2=\frac{1}{4}$ إذن :

$$\left(\frac{4}{3}x\right)^2+\left(\frac{4}{3}(1-y)\right)^2=\frac{16}{9}x^2+\frac{16}{9}(1-y)^2=\frac{16}{9}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

و هذا يعني بالتحديد أنّ : $x_G^2+y_G^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$ ؛ و هي معادلة الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\frac{2}{3}$.

إذن، النقطة G تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\frac{2}{3}$.

(ج) بما أنّ $3z_G\cdot(z-\imath)=1=e^{2\imath\pi}$ فإنّ $\arg(z_G-0)+\arg(z-z_A)=2\pi \pmod{2\pi}$

أي $\left(\vec{\imath},\overrightarrow{OG}\right)+\left(\vec{\imath},\overrightarrow{AM}\right)=2\pi \pmod{2\pi}$.

و بالتالي فالنقطة G تقع على الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\frac{1}{3}$ و تصنع زاوية قيسها $2\pi-\arg(z-\imath)$ مع محور الفواصل (المستقيم $y=0$) .

(د) لدينا $z'=3z_G-z-z'$ منه $z_G=\frac{1}{3}(z_A+z+z')$ و بالتالي فالنقطة M' هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{G(3),A(-1),M(-1)\}$.

■

40

A ، M ، N ، P أربع نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z ، z^2 ، z^3 (نفرض أنّ $z\neq 1$).

- 1• عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MN}$ متعامدين.
- 2• أوجد النقط M بحيث يكون الرباعي AMNP مربعا.

الحلّ. 1• نستعرض فيما يلي طريقتين :

الطريقة الأولى : حسب اللازمة 1 صفحة 53، يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MN}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان العدد $\frac{z-z^2}{z-1}$ تخيّلياً صِرفاً . لكن :

$$\frac{z-z^2}{z-1}=\frac{z(1-z)}{z-1}=-z=-x-\imath y$$

و بالتالي، يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MN}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان الجزء الحقيقي للعدد $\frac{z-z^2}{z-1}$ معدوماً أي إذا و فقط إذا كان $-x=0$ أي إذا و فقط إذا كان $x=0$.

إذن، المجموعة التي نبحث عنها هي المستقيم الذي معادلته $x=0$ (محور التراتيب) .

الطريقة الثانية : نُطبّق نتيجة المبرهنة 25 صفحة 53.

لاحقة $\overrightarrow{AM}$ هي $z-1$ و لاحقة $\overrightarrow{MN}$ هي z^2-z ، و بالتالي يكون $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MN}$ متعامدين إذا و فقط إذا كان

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MN}=0$ أي إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Re}\left((z-1)\cdot\overline{(z^2-z)}\right)=0$. لكن :

$$\begin{aligned}(z-1)\cdot\overline{(z^2-z)}&=(z-1)\cdot\left(\overline{z}^2-\overline{z}\right)=z\overline{z}^2-z\overline{z}-\overline{z}^2+\overline{z}\\&=(x+\imath y)(x-\imath y)^2-(x+\imath y)(x-\imath y)-(x-\imath y)^2+x-\imath y\\&=(x+\imath y)\left(x^2-2\imath xy-y^2\right)-x^2-y^2-x^2+y^2+2\imath xy+x-\imath y\\&=x^3-2\imath x^2y-xy^2+\imath x^2y+2xy^2-\imath y^3-2x^2+2\imath xy+x-\imath y\\&=x^3-2x^2+x+xy^2+\imath\left(-y^3-x^2y+2xy-y\right)\end{aligned}$$

منه :
$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left((z-1)\cdot\overline{(z^2-z)}\right)=0&\iff x^3-2x^2+x+xy^2=0\iff x\left(x^2+y^2-2x+1\right)=0\\&\iff x=0\quad\text{أو}\quad x^2+y^2-2x+1=0\\&\iff x=0\quad\text{أو}\quad(x-1)^2+y^2=0\\&\iff x=0\quad\text{أو}\quad(x=1\ \ y=0)\\&\iff x=0\quad\text{أو}\quad z=1\\&\iff x=0\qquad(\text{لأنّ } z\neq 1)\end{aligned}$$

و نصل إلى نفس النتيجة.

• 2 حتى يكون الرباعي AMNP مربعا يكفي أن يكون قطراه AN و MP متعامدين و لهما نفس الطول. لكن :

$$\begin{aligned}AN=MP&\iff|z^2-1|=|z^3-z|\iff|(z-1)(z+1)|=|z(z-1)(z+1)|\\&\iff|z-1|\cdot|z+1|-|z|\cdot|z-1|\cdot|z+1|=0\\&\iff|z-1|\cdot|z+1|(1-|z|)=0\\&\iff|z-1|=0\quad\text{أو}\quad|z+1|=0\quad\text{أو}\quad 1-|z|=0\\&\iff z=1\quad\text{أو}\quad z=-1\quad\text{أو}\quad|z|=1\\&\iff|z|=1\qquad(\text{لأنّ } z\neq 1\text{ و }|-1|=1)\end{aligned}$$

و
$$\begin{aligned}(AN)\perp(MP)&\iff\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{MP}=0\iff\operatorname{Re}\left(\left(z^2-1\right)\cdot\overline{\left(z^3-z\right)}\right)=0\\&\iff\operatorname{Re}\left(\left(z^2-1\right)\overline{\left(z^2-1\right)}\cdot\overline{z}\right)=0\iff\operatorname{Re}\left(|z^2-1|\overline{z}\right)=0\\&\iff|z^2-1|\cdot\operatorname{Re}(\overline{z})=0\qquad(\text{لأنّ }|z^2-1|\text{ عدد حقيقي})\\&\iff|z^2-1|=0\quad\text{أو}\quad\operatorname{Re}(\overline{z})=0\\&\iff z^2=1\quad\text{أو}\quad\operatorname{Re}(z)=0\\&\iff z=-1\quad\text{أو}\quad\operatorname{Re}(z)=0\qquad(\text{لأنّ } z\neq 1)\end{aligned}$$

لكن، إذا كان $z=-1$ فإنّ $z^2=1$ و $z^3=z$ أي $N=A$ و $P=M$ و بالتالي ليس لدينا مربع.

إذن، AN و MP متعامدان إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Re}(z)=0$. و بالتالي :

$$\begin{aligned}AMNP\text{ مربع}&\iff\begin{cases}\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{MP}\\AN=MP\end{cases}\iff\begin{cases}|z|=1\\\operatorname{Re}(z)=0\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2=1\\x=0\end{cases}\\&\iff\begin{cases}y^2=1\\x=0\end{cases}\iff\begin{cases}y=\pm1\\x=0\end{cases}\iff z=\pm\imath\end{aligned}$$

إذن توجد نقطتان تُحققان المطلوب و هما النقطتان اللتان لاحقتاهما $-\imath$ و $\imath$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

41 ما هي العلاقة (أو العلاقات) التي تربط بين الأعداد المركبة التي صورها هي :

1. ثلاثة نقط على استقامة واحدة ؟
2. رؤوس مثلث متقايس الأضلاع ؟
3. رؤوس مضلّع منتظم ذي n ضلعاً ؟

الحلّ. ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. لتكن A ، B ، C النقط التي لواحقها a ، b ، c على الترتيب.

النقط A ، B و C على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0 \pmod{\pi}$ أي إذا و فقط إذا كان :
$\arg(b-a) - \arg(c-a) = 0 \pmod{\pi}$.
إذن الشرط اللازم و الكافي حتى تكون النقط A ، B و C على استقامة واحدة هو أن يكون :

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = 0 \pmod{\pi}$$

2. لتكن A ، B ، C النقط التي لواحقها a ، b ، c على الترتيب. المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان :
$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2\pi}{3} \pmod{\pi}$ لكن :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \iff \left|\frac{c-b}{b-a}\right| = 1$$

و

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{2\pi}{3} \pmod{\pi} \iff \arg\left(\frac{c-b}{b-a}\right) = \frac{2\pi}{3} \pmod{\pi}$$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان : $\frac{c-b}{b-a} = e^{2\imath\pi/3}$.

3. لتكن A_0 ، A_1 ، A_2 ، ⋯ ، A_{n-1} النقط التي لواحقها a_0 ، a_1 ، a_2 ، ⋯ ، a_{n-1} على الترتيب.

الشرط اللازم و الكافي حتى تكون النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، ⋯ ، A_{n-1} رؤوس مضلّع منتظم هو أن يكون لأجل $1 \leq k \leq n-2$:

$$\left(\overrightarrow{A_{k-1}A_k}, \overrightarrow{A_kA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{n} \quad \text{و} \quad \|\overrightarrow{A_{k-1}A_k}\| = \|\overrightarrow{A_kA_{k+1}}\|$$

إذن النقط A_0 ، A_1 ، A_2 ، ⋯ ، A_{n-1} هي رؤوس مضلّع منتظم إذا و فقط إذا كان :
$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k-a_{k-1}} = e^{2\imath\pi/n}$ لأجل $1 \leq k \leq n-2$.

■

42 ما هي الأعداد المركبة z التي من أجلها يكون :

$$|z| = |z-2| \quad \text{و} \quad \arg(z) = \arg(z+3+\imath) \pmod{2\pi} \; ؟$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$|z| = |z-2| \iff \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+y^2} \iff x^2+y^2 = x^2-4x+4+y^2$$
$$\iff -4x+4=0 \iff x=1$$

إذن $z = 1 + \imath y$ مع $y \in \mathbb{R}$.

ملاحظة 19 : ◁ نضع $O(0)$ ، $A(2)$ و $M(z)$. الشرط $|z| = |z-2|$ أي $|z-0| = |z-2|$ يعني أنّ النقطة $M(z)$ متساوية المسافة (البُعد) عن النقطتين $O(0)$ و $A(2)$ أي أنها تنتمي إلى محور القطعة $[OA]$. نتحقق بسهولة أنّ معادلة هذا المحور هي $x = 1$. ▷

من جهة أخرى :

$$\arg(z) = \arg(z+3+\imath) \ (\text{mod } 2\pi) \iff \arg(z) - \arg(z+3+\imath) = 0 \ (\text{mod } 2\pi)$$
$$\iff \arg\left(\frac{z}{z+3+\imath}\right) = 0 \ (\text{mod } 2\pi) \iff \frac{z}{z+3+\imath} \in \mathbb{R}_+^*$$
$$\iff z+3+\imath = \lambda z, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

إذن :

$$\begin{cases} |z| = |z-2| \\ \arg(z) = \arg(z+3+\imath) \ (\text{mod } 2\pi) \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1+\imath y, \ y \in \mathbb{R} \\ z+3+\imath = \lambda z, \ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = 1+\imath y, \ y \in \mathbb{R} \\ 1+\imath y+3+\imath = \lambda(1+\imath y), \ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = 1+\imath y, \ y \in \mathbb{R} \\ 4+(1+y)\imath = \lambda+\imath\lambda y, \ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = 1+\imath y, \ y \in \mathbb{R} \\ \lambda = 4 \\ 1+y = 4y, \ \lambda \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = 1+\frac{1}{3}\imath \\ \lambda = 4 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

أي أنه يوجد عدد مركب وحيد يُحقق المطلوب و هو : $z = 1 + \frac{1}{3}\imath$. ■

43 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. a عدد مركب مُعطى.
أوجد مجموعة النقط M التي لاحقتها z تحقق :

1. $(\imath z+1)(\bar{z}+\imath-1) \in \mathbb{R}$
2. $(\imath z+1)(\bar{z}+\imath-1) \in \imath\mathbb{R}$
3. $|z-a| = |2z-a|$
4. $\frac{z-1-\imath}{z+2\imath} \in \mathbb{R}$
5. $\frac{z-1-\imath}{z+2\imath} \in \imath\mathbb{R}$
6. $(\imath z+1)(z+\imath-1) \in \imath\mathbb{R}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{aligned}(\imath z + 1)(\bar{z} + \imath - 1) &= \imath z\bar{z} + \imath(\imath - 1)z + \bar{z} + \imath - 1 = \imath|z|^2 - (1+\imath)z + \bar{z} + \imath - 1 \\ &= \imath|z|^2 - (z - \bar{z}) - \imath z + \imath - 1 = \imath\left(x^2 + y^2\right) - 2\imath y - \imath(x + \imath y) + \imath - 1 \\ &= (y - 1) + \left(x^2 + y^2 - x - 2y + 1\right)\imath\end{aligned}$$

• 1. إذن :

$$\begin{aligned}(\imath z + 1)(\bar{z} + \imath - 1) \in \mathbb{R} &\iff \operatorname{Im}\left((\imath z + 1)(\bar{z} + \imath - 1)\right) = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 + 1 = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

و هي معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ و نصف قطرها $\frac{1}{2}$.

• 2. بالمثل :

$$(\imath z + 1)(\bar{z} + \imath - 1) \in \imath\mathbb{R} \iff y - 1 = 0 \iff y = 1$$

و هي معادلة مستقيم (يوازي حامل محور الفواصل) .

• 3. نضع $a = \alpha + \imath\beta$ منه :

$$\begin{aligned}|z - a| = |2z - a| &\iff |(x - \alpha) + \imath(y - \beta)|^2 = |(2x - \alpha) + \imath(2y - \beta)|^2 \\ &\iff (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (2x - \alpha)^2 + (2y - \beta)^2 \\ &\iff x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = 4x^2 - 4\alpha x + \alpha^2 + 4y^2 - 4\beta y + \beta^2 \\ &\iff 3x^2 - 2\alpha x + 3y^2 - 2\beta y = 0 \iff x^2 - \frac{2}{3}\alpha x + y^2 - \frac{2}{3}\beta y = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{9} + \left(y - \frac{\beta}{3}\right)^2 - \frac{\beta^2}{9} = 0 \\ &\iff \left(x - \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{\beta}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{3}\right)^2\end{aligned}$$

و هي معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$ (أي النقطة ذات اللاحقة $\frac{a}{3}$) و نصف قطرها $\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{3}$ (أي $\frac{|a|}{3}$) .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ليكن $z \neq -2\imath$. لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{z-1-\imath}{z+2\imath} &= \frac{x-1+(y-1)\imath}{x+(y+2)\imath} = \frac{[x-1+(y-1)\imath]\,[x-(y+2)\imath]}{x^2+(y+2)^2}\\ &= \frac{x(x-1)+(y-1)(y+2)-(x-1)(y+2)\imath+x(y-1)\imath}{x^2+(y+2)^2}\\ &= \frac{x^2-x-y^2-y+2}{x^2+(y+2)^2}+\imath\frac{-xy-2x+y+2+xy-x}{x^2+(y+2)^2}\\ &= \frac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y+2)^2}+\imath\frac{-3x+y+2}{x^2+(y+2)^2}\end{aligned}$$

• 4 لأجل $z \neq -2\imath$ ، لدينا :

$$\frac{z-1-\imath}{z+2\imath} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}\left(\frac{z-1-\imath}{z+2\imath}\right)=0 \iff \frac{-3x+y+2}{x^2+(y+2)^2}=0 \iff -3x+y+2=0$$

و هي معادلة مستقيم .

هل النقطة التي لاحقتها $-2\imath$ تنتمي إلى هذا المستقيم ؟ نعم لأنّ $(-3)\times 0+(-2)+2=0$.

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي المستقيم الذي معادلته $y=3x-2$ باستثناء النقطة $(0,-2)$.

• 5 لأجل $z \neq -2\imath$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{z-1-\imath}{z+2\imath} \in \imath\mathbb{R} &\iff \operatorname{Re}\left(\frac{z-1-\imath}{z+2\imath}\right)=0 \iff \frac{x^2-x+y^2+y-2}{x^2+(y+2)^2}=0\\ &\iff x^2-x+y^2-y-2=0\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-2=0\\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

و هي معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

هل النقطة التي لاحقتها $-2\imath$ تنتمي إلى هذه الدائرة ؟ لا لأنّ $\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\neq\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

• 6 لدينا :

$$\begin{aligned}(\imath z+1)(z+\imath-1) &= \imath z^2+\imath(\imath-1)z+z+\imath-1 = \imath z^2-\imath z+\imath-1\\ &= \imath(x+\imath y)^2-\imath(x+\imath y)+\imath-1 = \imath\left(x^2-y^2+2\imath xy\right)-\imath x+y+\imath-1\\ &= y-2xy-1+\imath\left(x^2-y^2-x+1\right)\end{aligned}$$

منه :

$$(\imath z+1)(z+\imath-1) \in \imath\mathbb{R} \iff \operatorname{Re}\left((\imath z+1)(z+\imath-1)\right)=0 \iff y-2xy-1=0 \iff y=\frac{1}{1-2x}$$

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي منحنى الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ بـِ : $f(x)=\frac{1}{1-2x}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

■

44 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $|z+1| = |z| + 1$ ذات المجهول $z \in \mathbb{C}$.

الحلّ. لدينا :

$$|z+1|^2 = (z+1)\left(\overline{z+1}\right) = (z+1)(\bar{z}+1) = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1$$

و $(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$ منه :

$$\begin{aligned} |z+1| = |z| + 1 &\iff |z+1|^2 = (|z|+1)^2 \\ &\iff |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,z + 1 = |z|^2 + 2|z| + 1 \\ &\iff \mathrm{Re}(z) = |z| \\ &\iff z \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

إذن مجموعة الحلول هي : $S = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. ■

2.VI الشكل المثلثي لعدد مركب

45 أكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي :

1. 5
2. -2
3. $\frac{1}{2}\imath$
4. $-\imath$
5. $1+\imath$
6. $3-3\imath$
7. $-\sqrt{5}-\sqrt{15}\imath$
8. $-\sqrt{6}+\imath\sqrt{2}$
9. $\frac{2}{1+\imath\sqrt{3}}$
10. $\frac{\imath}{2\sqrt{3}+2\imath}$
11. $\frac{\sqrt{6}}{1+\imath}$

الحلّ. بدايةً، نكتب كلّ عدد على الشكل الجبري أي على الشكل $z = a + \imath b$ مع $a, b \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$z = a + \imath b = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\imath\right)$$

بطبيعة الحال $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ و إذا كانت θ عمدةً للعدد المركب z فإنّ $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ و $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

و بالتالي نبحث عن زاوية عُلِم جيبها و جيب تمامها.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

1) $5 = 5(\cos 0 + \imath \sin 0) = [5, 0]$

2) $-2 = 2(\cos \pi + \imath \sin \pi) = [2, \pi]$

3) $\frac{1}{2}\imath = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + \imath \sin \frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

4) $-\imath = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$

5) $1 + \imath = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + \imath \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

6) $3 - 3\imath = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath \sin \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$

7) $-\sqrt{5} - \sqrt{15}\imath = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) = 2\sqrt{5}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + \imath \sin \frac{4\pi}{3}\right) = \left[2\sqrt{5}, \frac{4\pi}{3}\right]$

8) $-\sqrt{6} + \imath\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + \imath \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \left[2\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

9) $\frac{2}{1 + \imath\sqrt{3}} = \frac{2\left(1 - \imath\sqrt{3}\right)}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left[1, -\frac{\pi}{3}\right]$

10) $\frac{\imath}{2\sqrt{3} + 2\imath} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\imath\left(\sqrt{3} - \imath\right)}{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \imath\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$= \frac{1}{4}\left(\cos \frac{\pi}{3} + \imath \sin \frac{\pi}{3}\right) = \left[\frac{1}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

11) $\frac{\sqrt{6}}{1 + \imath} = \frac{\sqrt{6}(1 - \imath)}{1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 - \imath) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right)$
$= \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{3}, -\frac{\pi}{4}\right]$

■

46 ☼ أكتب على الشكل الجبري :

1) العدد المركب z_1 الذي طويلته 2 و $\frac{\pi}{3}$ عمدة له.

2) العدد المركب z_2 الذي طويلته 3 و $-\frac{\pi}{8}$ عمدة له.

الحلّ.

لدينا : $z_1 = 2e^{\imath\pi/3} = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + \imath \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \imath\sqrt{3}$

و $z_2 = 3e^{-\imath\pi/8} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + \imath \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = 3\left(\cos \frac{\pi}{8} - \imath \sin \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - \imath\frac{3\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

حيث لإيجاد $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$ اتّبعنا الطريقة التالية[1] :

لدينا $e^{\imath\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}$. من الواضح أنّ جذرَيْه التربيعيين هما $\pm e^{\imath\pi/8}$.

ليكن $z = x + \imath y$ جذراً تربيعياً لـِ $e^{\imath\pi/4}$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا $(x+\imath y)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}$

أي $x^2 - y^2 + 2\imath xy = \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}$ و بالتالي $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 + y^2 = |e^{\imath\pi/4}| = 1 \end{cases}$.

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي $x^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ منه $x = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

نحتار مثلاً $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. بطرح المعادلة الأولى من الثالثة ينتج $2y^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي $y^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ منه $y = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

بما أننا اخترنا $x > 0$ فمن المعادلة الثانية نستنتج أنّ $y > 0$ أي $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ و بالتالي فالجذرين التربيعيين للعدد $e^{\imath\pi/4}$ هما $\pm\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. لكن $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ منه $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ و $\sin\frac{\pi}{8} > 0$ إذن :

$$\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}} \qquad \text{و} \qquad \boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

■

47 ☼ أكتب على الشكل المثلثي ثم الجبري العدد $\left(1+\imath\sqrt{3}\right)^{11}$.

الحلّ.

لدينا : $1 + \imath\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \imath\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\imath\pi/3}$

منه : $\left(1+\imath\sqrt{3}\right)^{11} = \left(2e^{\imath\pi/3}\right)^{11} = 2^{11}e^{11\imath\pi/3} = 2048e^{(12\pi-\pi)/3} = 2048e^{4\imath\pi-\imath\pi/3}$

(الشكل المثلثي) $= 2048e^{-\imath\pi/3} = 2048\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

(الشكل الجبري) $= 2048\left(\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1024\left(1-\imath\sqrt{3}\right)$

■ نُذكِّر أنّ **الشكل الجبري أنسب للجمع و الطرح** و أنّ **الشكل المثلثي** (أو **الأسي**) **أنسب للضرب و القسمة**.

[1] هناك عدة طرق مثلاً استعمال العلاقتين $\cos\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ و $\sin\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ ، لكن اخترنا هذه الطريقة لأنها تعتمد على الأعداد المركبة. يمكن أيضاً تطبيق نتيجة التمرين 69 صفحة 136.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

48 ما هو الشكل الجبري للعدد $z = \left(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath}\right)^{20}$ ؟

الحلّ. لدينا :

$$1+\imath\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\imath\pi/3}$$

و

$$1-\imath = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{-\imath\pi/4}$$

منه :

$$z = \left(\frac{2e^{\imath\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-\imath\pi/4}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(e^{\imath\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}\right)^{20} = 2^{10}e^{20\imath\pi\left(\frac{7}{12}\right)} = 1024e^{35\imath\pi/3}$$
$$= 1024e^{12\imath\pi-\imath\frac{\pi}{3}} = 1024e^{-\imath\pi/3} = 1024\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 1024\left(\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512+512\imath\sqrt{3}$$

و هو الشكل الجبري للعدد z . ■

49 $A = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1+\imath}$. أكتب على الشكل الجبري العدد A^{101} .

الحلّ. لدينا : $1+\imath\sqrt{3} = 2e^{\imath\pi/3}$ و $1+\imath = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$ إذن :

$$A = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1+\imath} = \frac{2e^{\imath\pi/3}}{\sqrt{2}e^{\imath\pi/4}} = \sqrt{2}e^{\imath\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{\imath\pi/12}$$

منه $A^{101} = \sqrt{2}^{101}e^{\imath\frac{101}{12}}$.

لكن $\frac{101}{12} = 4+\frac{5}{12}$ إذن $A^{101} = e^{5\pi/12}$. و بما أنّ $\frac{5}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{1}{2}-\frac{1}{12}$ فإنّ :

$$A^{101} = \sqrt{2}^{101}e^{\imath\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}^{101}e^{\imath\pi/2}\times e^{-\imath\pi/12} = \imath\sqrt{2}^{101}e^{-\imath\pi/12}$$

لكن :

$$\sqrt{2}e^{\imath\pi/12} = A = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1+\imath} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

إذن $e^{-\imath\pi/12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ و بالتالي :

$$A^{101} = \imath\left[\sqrt{2}^{101}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right] = 2^{49}\left(\sqrt{3}-1\right)+2^{49}\left(\sqrt{3}+1\right)\imath$$

و هو الشكل الجبري للعدد A^{101} . ■

50 أكتب العدد $z = \left(1+\imath\sqrt{3}\right)^n+\left(1-\imath\sqrt{3}\right)^n$ على أبسط شكل.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. نضع $a = 1 + \imath\sqrt{3}$. لدينا : $z = a^n + \overline{a}^n$ و :

$$a = 1 + \imath\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \imath\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\imath\pi/3}$$

منه : $z = a^n + \overline{a}^n = 2\,\mathrm{Re}\,(a^n) = 2\,\mathrm{Re}\,(2^n e^{\imath n\pi/3}) = 2\left(2^n \cos\frac{n\pi}{3}\right) = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

نعتبر القسمة الإقليدية للعدد n على 6 و نكتب $n = 6q + r$ مع $0 \leq r \leq 5$ فيكون :

$$z = 2^{n+1}\cos\left(2q\pi + \frac{r\pi}{3}\right) = 2^{n+1}\cos\frac{r\pi}{3}$$

■

51 أثبت أنّ : $\forall\theta \in \mathbb{R} : \left|e^{\imath\theta} - 1\right|^2 = 2 - 2\cos\theta$.

الحلّ. ليكن $\theta \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{aligned}\left|e^{\imath\theta} - 1\right|^2 &= \left(e^{\imath\theta} - 1\right)\overline{\left(e^{\imath\theta} - 1\right)} = \left(e^{\imath\theta} - 1\right)\left(\overline{e^{\imath\theta}} - 1\right) = \left(e^{\imath\theta} - 1\right)\left(e^{-\imath\theta} - 1\right)\\ &= e^{\imath\theta}e^{-\imath\theta} - e^{\imath\theta} - e^{-\imath\theta} + 1 = 1 - \left(e^{\imath\theta} + e^{-\imath\theta}\right) + 1 = 2 - 2\cos\theta\end{aligned}$$

ملاحظة 20 : ◁ $2 - 2\cos\theta \geq 0$ لكل $\theta \in \mathbb{R}$ لأنّ $\cos\theta \leq 1$ لكل $\theta \in \mathbb{R}$. ▷

■

52 ليكن z و w عددين مركبين حيث $z = 3 + 4\imath$ و $w = 2 - \imath$. مثّل هندسياً كلاًّ من :

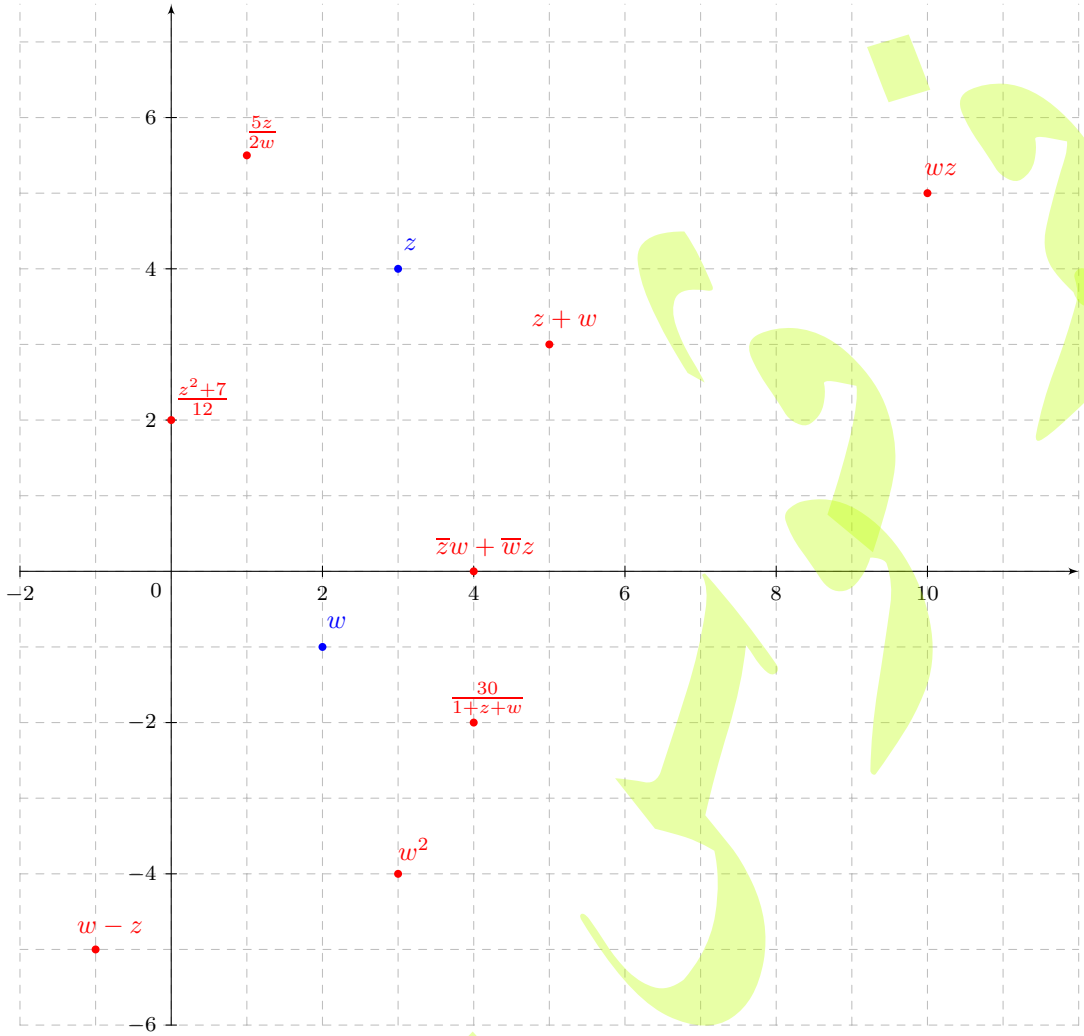
1. $z + w$
2. $w - z$
3. wz
4. $\frac{5z}{2w}$
5. $\overline{z}w + \overline{w}z$
6. $\frac{z^2 + 7}{12}$
7. w^2
8. $\frac{30}{1 + z + w}$

الحلّ. لدينا :

1. $z + w = 3 + 4\imath + 2 - \imath = 5 + 3\imath$.
2. $w - z = 2 - \imath - 3 - 4\imath = -1 - 5\imath$.
3. $wz = (2 - \imath)(3 + 4\imath) = 6 + 8\imath - 3\imath - 4\imath^2 = 6 + 5\imath + 4 = 10 + 5\imath$.
4. $\frac{5z}{2w} = \frac{5}{2}\cdot\frac{3 + 4\imath}{2 - \imath} = \frac{5}{2}\cdot\frac{(3 + 4\imath)(2 + \imath)}{(2 - \imath)(2 + \imath)} = \frac{5}{2}\cdot\frac{6 + 8\imath + 3\imath + 4\imath^2}{2^2 - \imath^2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{2 + 11\imath}{5} = \frac{2 + 11\imath}{2}$.
5. $\overline{z}w + \overline{w}z = (3 - 4\imath)(2 - \imath) + (2 + \imath)(3 + 4\imath) = 2 - 11\imath + 2 + 11\imath = 4$.
6. $\frac{z^2 + 7}{12} = \frac{(3 + 4\imath)^2 + 7}{12} = \frac{3^2 + 2\times 3\times 4\imath + (4\imath)^2 + 7}{12} = \frac{-7 + 24\imath + 7}{12} = 2\imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 8.VI

7• $w^2=(2-\imath)^2=2^2-2\times2\times\imath+\imath^2=4-4\imath-1=3-4\imath$.

8• $\dfrac{30}{1+z+w}=\dfrac{30}{6+3\imath}=\dfrac{30\,(6-3\imath)}{6^2+3^2}=\dfrac{30\times3\,(2-\imath)}{45}=4-2\imath$

و منه التمثيل النقطي التالي (شكل 8.VI) :

■

53 ☼ z_1 و z_2 عددان مركبان حيث : $z_1=4+4\imath$ و $z_2=1-\imath\sqrt{3}$.
عيّن الطويلة و عمدة لكل من الأعداد المركبة التالية :

1• z_1^2 2• $z_1\cdot z_2$ 3• z_1^3 4• $\dfrac{z_1}{z_2}$ 5• $\dfrac{z_2}{z_1}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. لدينا :

$$z_1 = 4 + 4\imath = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = 1 - \imath\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$$

و هو الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 .

• 1 لدينا :

$$z_1^2 = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]^2 = \left[\left(4\sqrt{2}\right)^2, 2\times\frac{\pi}{4}\right] = \left[32, \frac{\pi}{2}\right]$$

و بالتالي : $\boxed{|z_1^2| = 32}$ و $\boxed{\arg\left(z_1^2\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}}$.

• 2 لدينا :

$$z_1 \cdot z_2 = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left[2, -\frac{\pi}{3}\right] = \left[4\sqrt{2}\times 2, \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right] = \left[8\sqrt{2}, -\frac{\pi}{12}\right]$$

منه : $\boxed{|z_1 \cdot z_2| = 8\sqrt{2}}$ و $\boxed{\arg\left(z_1 \cdot z_2\right) = -\frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}}$.

• 3 لدينا :

$$z_1^3 = \left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]^3 = \left[\left(4\sqrt{2}\right)^3, 3\times\frac{\pi}{4}\right] = \left[128\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$$

إذن : $\boxed{|z_1^3| = 128\sqrt{2}}$ و $\boxed{\arg\left(z_1^3\right) = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}}$.

• 4 لدينا :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2, -\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{4\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right] = \left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]$$

و بالتالي : $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2\sqrt{2}}$ و $\boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}}$.

• 5 لدينا :

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left[2, -\frac{\pi}{3}\right]}{\left[4\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]} = \left[\frac{2}{4\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$\left(\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{1}{\left[2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{7\pi}{12}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{7\pi}{12}\right] \quad \text{أو بطريقة أخرى :}\right)$$

إذن : $\boxed{\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{\sqrt{2}}{4}}$ و $\boxed{\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = -\frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

54

عيّن الطويلة و عمدة للعدد المركب :

$$z = \frac{5 + 11\imath\sqrt{3}}{7 - 4\imath\sqrt{3}}$$

الحلّ. لدينا :

$$z = \frac{5 + 11\imath\sqrt{3}}{7 - 4\imath\sqrt{3}} = \frac{\left(5 + 11\imath\sqrt{3}\right)\left(7 + 4\imath\sqrt{3}\right)}{7^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \frac{35 + 20\imath\sqrt{3} + 77\imath\sqrt{3} - 44 \times 3}{97}$$

$$= \frac{-97 + 97\imath\sqrt{3}}{97} = -1 + \imath\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \imath\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{|z| = 2}$ و $\boxed{\arg(z) = \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}}$. ■

55

الكتابات المختلفة للأعداد المركبة

1. أكمل الجدول الآتي :

العدد	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
Z_A			$4e^{\imath\pi/2}$
Z_B		$4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \imath\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$	
Z_C	$2\sqrt{3} - 2\imath$		

2. علم النقط A ، B و C صور الأعداد Z_A ، Z_B و Z_C على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

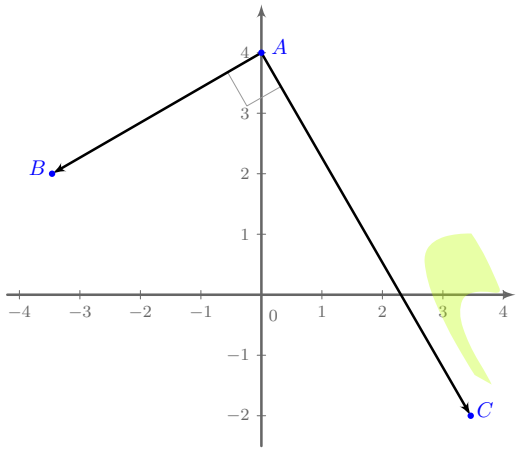
3. أحسب Z و Z' ، لاحقتَيّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، ثم أكتبهما على الشكلين الجبري و الأسي.

4. أثبت أنّ $Z' = \sqrt{3}e^{\imath\pi/2}Z$.

الحلّ. 1. كلّ الزوايا شهيرة و بالتالي :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.9

العدد	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
Z_A	$4\imath$	$4\left(\cos\frac{\pi}{2}+\imath\sin\frac{\pi}{2}\right)$	$4e^{\imath\pi/2}$
Z_B	$-2\sqrt{3}+2\imath$	$4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$	$4e^{5\imath\pi/6}$
Z_C	$2\sqrt{3}-2\imath$	$4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$4e^{-\imath\pi/6}$

• 2. أنظر الشكل VI.9 .

• 3. لدينا :

$$Z = Z_B - Z_A = -2\sqrt{3}+2\imath-4\imath = -2\sqrt{3}-2\imath \quad \text{(الشكل الجبري)}$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath\right) = 4\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\imath\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 4e^{7\imath\pi/6} \quad \text{(الشكل الأسي)}$$

$$Z' = Z_C - Z_A = 2\sqrt{3}-2\imath-4\imath = 2\sqrt{3}-6\imath \quad \text{(الشكل الجبري)}$$

$$= 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\sqrt{3}e^{-\imath\pi/3} \quad \text{(الشكل الأسي)}$$

• 4. لدينا :

$$\sqrt{3}e^{\imath\pi/2}Z = \sqrt{3}e^{\imath\pi/2}\cdot 4e^{7\imath\pi/6} = 4\sqrt{3}e^{\imath\left(\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}e^{5\imath\pi/3}$$
$$= 4\sqrt{3}e^{5\imath\pi/3-2\imath\pi} = 4\sqrt{3}e^{-\imath\pi/3} = Z'$$

إذن الزاوية بين الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هي $\frac{\pi}{2}$ و هذا يعني أنهما متعامدان (شكل VI.9) .

■

56 أحسب الطويلة و عمدة للعددين $u = \frac{\sqrt{6}-\imath\sqrt{2}}{2}$ و $v = 1-\imath$. إستنتج الطويلة و عمدة للعدد $w = \frac{u}{v}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. لدينا :

$$u = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \imath\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-\imath\pi/6}$$

$$v = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \imath\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\imath\pi/4} \quad \text{و}$$

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-\imath\pi/6}}{\sqrt{2}e^{-\imath\pi/4}} = e^{\imath(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = e^{\imath\pi/12} \quad \text{منه :}$$

و بالتالي $|w| = 1$ و $\arg(w) = \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}$. ■

57 أثبت أنّ :

1. $\left(\cos\frac{\pi}{7} + \imath\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)(1+\imath) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + \imath\sin\frac{5\pi}{84}\right)$
2. $(1-\imath)\left(\cos\frac{\pi}{5} + \imath\sin\frac{\pi}{5}\right)\left(\sqrt{3}-\imath\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{60} - \imath\sin\frac{13\pi}{60}\right)$
3. $\frac{1}{1+\imath}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \imath\sin\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-\imath}{2}$

الحلّ. نُطبّق صيغة **موافر** : $e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta$ و العلاقتين $e^{\imath a}e^{\imath b} = e^{\imath(a+b)}$ و $\frac{e^{\imath a}}{e^{\imath b}} = e^{\imath(a-b)}$.

1. لدينا :

$$\begin{aligned}\left(\cos\frac{\pi}{7} + \imath\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\frac{1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)(1+\imath) &= e^{\imath\pi/7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\cdot\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \sqrt{2}e^{\imath\pi/7}e^{-\imath\pi/3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}e^{\imath\pi/7}e^{-\imath\pi/3}e^{\imath\pi/4} = \sqrt{2}e^{\imath(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}\\ &= \sqrt{2}e^{5\imath\pi/84} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{84} + \imath\sin\frac{5\pi}{84}\right)\end{aligned}$$

2. لدينا :

$$\begin{aligned}(1-\imath)\left(\cos\frac{\pi}{5} + \imath\sin\frac{\pi}{5}\right)\left(\sqrt{3}-\imath\right) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\imath\pi/5}\cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right)\\ &= 2\sqrt{2}e^{\imath\pi/5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}e^{\imath\pi/5}e^{-\imath\pi/4}e^{-\imath\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{\imath(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}\\ &= 2\sqrt{2}e^{-13\imath\pi/60} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{60}\right) + \imath\sin\left(-\frac{13\pi}{60}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{60} - \imath\sin\frac{13\pi}{60}\right)\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3. لدينا :

$$\frac{1}{1+\imath}\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\imath\sin\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}e^{\imath\pi/12}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{e^{\imath\pi/12}}{\cos\frac{\pi}{4}+\imath\sin\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{e^{\imath\pi/12}}{e^{\imath\pi/4}}=e^{\imath\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)}=e^{-\imath\pi/6}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{6}-\imath\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath=\frac{\sqrt{3}-\imath}{2}$$

■

58 ليكن θ عدداً حقيقيا حيث $\theta\in[0,2\pi[$. نضع $u=\cos\theta+\imath\sin\theta$.
أوجد حسب قِيَم θ الطويلة و عمدةً للعدد $z=ue^{\imath\pi/4}+\overline{u}e^{\imath\pi/6}$.

الحلّ. لدينا[2] :

$$z=e^{\imath\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}+e^{\imath\left(-\theta+\frac{\pi}{6}\right)}=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\imath\left[\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$=2\cos\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{4}+\theta-\frac{\pi}{6}\right)+2\imath\sin\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\theta+\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\pi}{4}+\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=2\cos\frac{5\pi}{24}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)+2\imath\sin\frac{5\pi}{24}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)\left[\cos\frac{5\pi}{24}+\imath\sin\frac{5\pi}{24}\right]$$
$$=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)e^{5\imath\pi/24}$$

و حسب المبرهنة 8 صفحة 20 ، نُميِّز ثلاث حالات :

• إذا كان $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)>0$ فإنّ $|z|=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)$ و $\arg(z)=\frac{5\pi}{24}\pmod{2\pi}$.
لكن، و بما أنّ $\theta\in[0,2\pi[$ ، فإنّ :

$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)>0\iff 0\le\theta-\frac{\pi}{24}<\frac{\pi}{2}\quad\text{أو}\quad\frac{3\pi}{2}<\theta-\frac{\pi}{24}<2\pi$$
$$\iff\frac{\pi}{24}\le\theta<\frac{13\pi}{24}\quad\text{أو}\quad\frac{37\pi}{24}<\theta<2\pi+\frac{\pi}{24}$$
$$\iff\frac{\pi}{24}\le\theta<\frac{13\pi}{24}\quad\text{أو}\quad\frac{37\pi}{24}<\theta<2\pi$$

إذن، لأجل $\theta\in\left[\frac{\pi}{24},\frac{13\pi}{24}\right[\cup\left]\frac{37\pi}{24},2\pi\right[$ فإنّ :

$$|z|=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)\quad\text{و}\quad\arg(z)=\frac{5\pi}{24}\pmod{2\pi}$$

• إذا كان $\cos\left(\theta-\frac{13\pi}{24}\right)=0$ أي إذا كان $\theta=\frac{\pi}{24}$ أو $\theta=\frac{37\pi}{24}$ فإنّ $z=0$ (و العدد المركب المعدوم لا عمدة له).

• إذا كان $\cos\left(\theta-\frac{13\pi}{24}\right)<0$ أي إذا كان $\frac{13\pi}{24}<\theta<\frac{37\pi}{24}$ فإنّ :

$$|z|=-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{24}\right)\quad\text{و}\quad\arg(z)=\frac{5\pi}{24}+\pi=\frac{29\pi}{24}\pmod{2\pi}$$

[2] نُذكِّر أنّ $\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ و $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

■

59

1• أكتب على الشكل المثلثي العدد $1+e^{\imath\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi,\pi[$. أعطِ تفسيراً هندسيا لهذه النتيجة.

2• أحسب الطويلة و عمدة للعدد $e^{\imath\theta}-1$ مع $\theta \in]-\pi,\pi[$.

3• بسّط العبارة $\dfrac{e^{\imath\theta}-1}{e^{\imath\theta}+1}$ لأجل $\theta \in]-\pi,\pi[$.

الحلّ. 1• لدينا :

$$1+e^{\imath\theta}=e^{\imath\theta/2}\left(e^{-\imath\theta/2}+e^{\imath\theta/2}\right)=2e^{\imath\theta/2}\cos\frac{\theta}{2}$$

بما أنّ $\theta \in]-\pi,\pi[$ فإنّ $\cos\dfrac{\theta}{2}>0$ و حسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنّ الكتابة السابقة هي الشكل الأسي للعدد $1+e^{\imath\theta}$ و بالتالي شكله المثلثي هو $1+e^{\imath\theta}=\left[2\cos\dfrac{\theta}{2},\dfrac{\theta}{2}\right]$.

التفسير الهندسي : نعتبر النقط $O(0)$ ، $A(1)$ ، $B\left(1+e^{\imath\theta}\right)$ و $C(2)$ ؛ و الدائرة التي مركزها $(1,0)$ و نصف قطرها 1 (شكل VI.10) .

النتيجة السابقة تعني أنّ $\widehat{CAB}=2\widehat{COB}$ (أي أن الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطة) و هي نتيجة هندسية معروفة .

2• لدينا :

$$e^{\imath\theta}-1=e^{\imath\theta/2}\left(e^{\imath\theta/2}-e^{-\imath\theta/2}\right)=2\imath e^{\imath\theta/2}\sin\frac{\theta}{2}=2e^{\imath(\theta+\pi)/2}\sin\frac{\theta}{2}$$

حسب المبرهنة 8 صفحة 20 :

- إذا كان $\sin\dfrac{\theta}{2}=0$ أي إذا كان $\theta=0$ فإنّ $z=0$.
- إذا كان $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$ أي إذا كان $0<\theta<\pi$ فإنّ $|z|=2\sin\dfrac{\theta}{2}$ و $\arg(z)=\dfrac{\theta+\pi}{2}\pmod{2\pi}$.
- إذا كان $\sin\dfrac{\theta}{2}<0$ أي إذا كان $-\pi<\theta<0$ فإنّ $|z|=-2\sin\dfrac{\theta}{2}$ و $\arg(z)=\dfrac{\theta+\pi}{2}+\pi\pmod{2\pi}$.

3• لدينا :

$$\frac{e^{\imath\theta}-1}{e^{\imath\theta}+1}=\frac{2\imath e^{\imath\theta/2}\sin\frac{\theta}{2}}{2e^{\imath\theta/2}\cos\frac{\theta}{2}}=\imath\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\imath\tan\frac{\theta}{2}$$

■

60

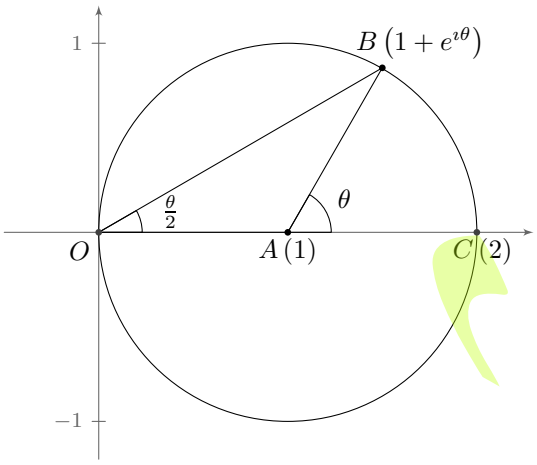
ليكن $z=\sqrt{3}-\imath$ و $w=-2+2\imath$. أوجد الجزء الحقيقي، الجزء التخيلي، الطويلة و عمدة للأعداد التالية ثم اكتبها على الشكل الجبري، الشكل المثلثي و الشكل الأسي :

- z
- w
- zw
- $\dfrac{z}{w}$

مثّل الأعداد أعلاه في المستوي المركب.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.10

الحلّ.

العدد	جزؤه الحقيقي	جزؤه التخيلي	طويلته	عمدته θ $(\text{mod } 2\pi)$
$z=\sqrt{3}-\imath$	$\sqrt{3}$	-1	2	$-\frac{\pi}{6}$
$w=-2+2\imath$	-2	2	$2\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$z\cdot w$	$-2\left(\sqrt{3}-1\right)$	$2\left(\sqrt{3}+1\right)$	$4\sqrt{2}$	$\frac{7\pi}{12}$
$\frac{z}{w}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{11\pi}{12}$

فيما يلي بعض التفاصيل :

- $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2$

$$\theta=\arg(z) \iff \cos\theta=\frac{\text{Re}(z)}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \sin\theta=\frac{\text{Im}(z)}{|z|}=-\frac{1}{2}$$
$$\iff \theta=-\frac{\pi}{6} \ (\text{mod } 2\pi)$$

$$z=\sqrt{3}-\imath=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\left[2,-\frac{\pi}{6}\right]=2e^{-\pi/6} \quad \text{أي}$$

- $|w|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$\theta=\arg(w) \iff \cos\theta=\frac{\text{Re}(z)}{|z|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin\theta=\frac{\text{Im}(z)}{|z|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \theta=\frac{3\pi}{4} \ (\text{mod } 2\pi)$$

$$w=-2+2\imath=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[2\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]=2\sqrt{2}e^{3\pi/4} \quad \text{أي}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• لدينا :

$$z\cdot w=\left(\sqrt{3}-\imath\right)(-2+2\imath)=-2\sqrt{3}+2\imath\sqrt{3}+2\imath-2\imath^2$$
$$=-2\sqrt{3}+2\imath\sqrt{3}+2\imath+2=2\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\imath\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$$

منه : $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|=2\times 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$ و

$$\arg(z\cdot w)\ =\ \arg(z)+\arg(w)\ (\text{mod } 2\pi)=-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\ (\text{mod } 2\pi)=\frac{7\pi}{12}\ (\text{mod } 2\pi)$$

أي

$$z\cdot w=2\left[\left(1-\sqrt{3}\right)+\imath\left(1+\sqrt{3}\right)\right]=4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\imath\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]=\left[4\sqrt{2},\frac{7\pi}{12}\right]=4\sqrt{2}e^{7\pi/12}$$

• $$\frac{z}{w}=\frac{\sqrt{3}-\imath}{2(-1+\imath)}=\frac{\left(\sqrt{3}-\imath\right)(-1-\imath)}{2(-1+\imath)(-1-\imath)}=-\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\imath$$

$$\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right)\ =\ \arg(z)-\arg(w)\ (\text{mod } 2\pi)=-\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\ (\text{mod } 2\pi)=-\frac{11\pi}{12}\ (\text{mod } 2\pi)$$

أي

$$\frac{z}{w}=-\frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{1-\sqrt{3}}{4}\imath=\left[\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{11\pi}{12}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right)+\imath\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-11\pi/12}$$

⛔ لا تنس أنّ الجزء التخيلي للعدد المركب $z=a+\imath b$ هو b (و هو عدد حقيقي) و ليس $b\imath$.

تمثيل النقط الأربعة في المستوي المركب يكون كما في الشكل VI.11 .

■

61 α عدد حقيقي حيث $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. z_1 و z_2 عددان مركبان حيث

$$z_2=\frac{1}{1+\imath\tan\alpha}\qquad\text{و}\qquad z_1=\frac{1}{1-\imath\tan\alpha}$$

1• أكتب z_1 على شكله المثلثي.

2• أحسب الجداء $z_1\cdot z_2$ ثمّ استنتج الشكل المثلثي للعدد z_2 .

الحلّ. 1• لدينا :

$$z_1=\frac{1}{1-\imath\tan\alpha}=\frac{1+\imath\tan\alpha}{1^2+(\tan\alpha)^2}=\frac{1+\imath\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\left(\cos^2\alpha\right)(1+\imath\tan\alpha)$$
$$=(\cos\alpha)(\cos\alpha+\imath\cos\alpha\tan\alpha)=(\cos\alpha)(\cos\alpha+\imath\sin\alpha)$$

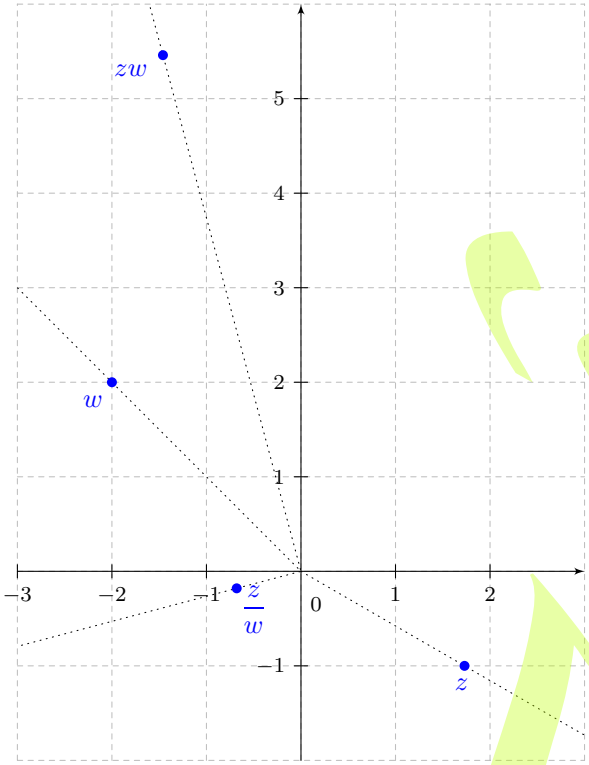
و بما أنّ $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ $\cos\alpha>0$ و بالتالي فالكتابة السابقة هي الشكل المثلثي للعدد z_1 أي : $\boxed{|z_1|=\cos\alpha}$

و $\boxed{\arg(z_1)=\alpha\ (\text{mod } 2\pi)}$.

في الأخير، الشكل المثلثي للعدد z_1 هو : $\boxed{z_1=[\cos\alpha,\alpha]}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.11

2• لدينا :

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{1-\imath\tan\alpha}\right)\left(\frac{1}{1+\imath\tan\alpha}\right) = \frac{1}{1^2-(\imath\tan\alpha)^2} = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \cos^2\alpha$$

منه $z_2 = \dfrac{\cos^2\alpha}{z_1}$ و بالتالي :

$$|z_2| = \left|\frac{\cos^2\alpha}{z_1}\right| = \frac{|\cos^2\alpha|}{|z_1|} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$$

و $\arg(z_2) = \arg(\cos^2\alpha) - \arg(z_1) = 0 - \alpha = -\alpha \pmod{2\pi}$

إذن فالشكل المثلثي للعدد z_2 هو $\boxed{z_2 = [\cos\alpha, -\alpha]}$.

ملاحظة 21 : ◁ يمكن ملاحظة أنّ $z_2 = \bar{z}_1$ و بالتالي : $|z_2| = |z_1|$ و $\arg(z_2) = -\arg(z_1) \pmod{2\pi}$. ▷

■

62 أحسب الطويلة و عمدة للأعداد التالية (مع $\alpha, u, v \in \mathbb{R}$) :

1• $e^{e^{\imath\alpha}}$ 2• $e^{\imath u} + e^{\imath v}$ 3• $e^{\imath u} + e^{2\imath u}$

الحلّ. 1• لدينا :

$$e^{e^{\imath\alpha}} = e^{\cos\alpha + \imath\sin\alpha} = e^{\cos\alpha} \cdot e^{\imath\sin\alpha}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بما أنّ $e^{\cos\alpha} > 0$ فحسب المبرهنة 8 صفحة 20 ، الكتابة السابقة هي الشكل الأسي للعدد $e^{e^{\imath\alpha}}$ منه :

$$\left|e^{e^{\imath\alpha}}\right| = e^{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad \arg\left(e^{e^{\imath\alpha}}\right) = \sin\alpha \pmod{2\pi} .$$

• 2. عند البحث عن الشكل الأسي للعدد $e^{\imath u} + e^{\imath v}$ نضع عامةً $e^{\imath\left(\frac{u+v}{2}\right)}$ كعامل مشترك . بالتحديد :

$$e^{\imath u} + e^{\imath v} = e^{\imath\left(\frac{u+v}{2}\right)}\left(e^{\imath\left(\frac{u-v}{2}\right)} + e^{-\imath\left(\frac{u-v}{2}\right)}\right) = 2e^{\imath\left(\frac{u+v}{2}\right)}\cos\frac{u-v}{2}$$

و حسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنه :

- إذا كان $\cos\frac{u-v}{2} = 0$ أي إذا كان $\frac{u-v}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ أي $u - v = \pi \pmod{2\pi}$ فإنّ : $e^{\imath u} + e^{\imath v} = 0$.
- إذا كان $\cos\frac{u-v}{2} > 0$ أي إذا كان $\frac{u-v}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ أي $u - v \in \left]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإنّ :

$$\left|e^{\imath u} + e^{\imath v}\right| = 2\cos\frac{u-v}{2} \quad \text{و} \quad \arg\left(e^{\imath u} + e^{\imath v}\right) = \frac{u+v}{2} \pmod{2\pi} .$$

- إذا كان $\cos\frac{u-v}{2} < 0$ أي إذا كان $\frac{u-v}{2} \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ أي $u - v \in \left]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإنّ :

$$\left|e^{\imath u} + e^{\imath v}\right| = -2\cos\frac{u-v}{2} \quad \text{و} \quad \arg\left(e^{\imath u} + e^{\imath v}\right) = \frac{u+v}{2} + \pi \pmod{2\pi} .$$

• 3. هذا المثال حالة خاصة من السابق مع $v = 2u$ منه :

$$e^{\imath u} + e^{2\imath u} = 2e^{\imath\left(\frac{u+2u}{2}\right)}\cos\frac{u-2u}{2} = 2e^{3\imath u/2}\cos\frac{u}{2}$$

و حسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنه :

- إذا كان $\cos\frac{u}{2} = 0$ أي إذا كان $u = \pi \pmod{2\pi}$ فإنّ : $e^{\imath u} + e^{2\imath u} = 0$.
- إذا كان $\cos\frac{u}{2} > 0$ أي إذا كان $u \in \left]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإنّ :

$$\left|e^{\imath u} + e^{2\imath u}\right| = 2\cos\frac{u}{2} \quad \text{و} \quad \arg\left(e^{\imath u} + e^{2\imath u}\right) = \frac{3u}{2} \pmod{2\pi} .$$

- إذا كان $\cos\frac{u}{2} < 0$ أي إذا كان $u \in \left]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi\right[$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإنّ :

$$\left|e^{\imath u} + e^{2\imath u}\right| = -2\cos\frac{u}{2} \quad \text{و} \quad \arg\left(e^{\imath u} + e^{2\imath u}\right) = \frac{3u}{2} + \pi \pmod{2\pi} .$$

■

63 أكتب على شكله المثلثي العدد z حيث :

$$z = \frac{1 + \imath\tan\alpha}{1 - \imath\tan\alpha} , \qquad \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

الحلّ. لدينا :

$$z = \frac{1 + \imath\tan\alpha}{1 - \imath\tan\alpha} = \frac{1 + \imath\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \imath\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha + \imath\sin\alpha}{\cos\alpha - \imath\sin\alpha} = \frac{1\cdot(\cos\alpha + \imath\sin\alpha)}{1\cdot(\cos(-\alpha) + \imath\sin(-\alpha))}$$
$$= \frac{[1,\alpha]}{[1,-\alpha]} = \left[\frac{1}{1}, \alpha - (-\alpha)\right] = [1, 2\alpha]$$

و هو الشكل المثلثي للعدد z .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

64

α عدد حقيقي. z_1 و z_2 عددان مركبان حيث :

$$z_2 = \frac{1}{1-z_1} \quad , \quad z_1 = 1 + \imath \tan\alpha$$

1• عيّن قِيَم العدد α بحيث يكون z_1 و z_2 معرّفين.

2• عيّن الطويلة و عمدة لكل من z_1 و z_2 في الحالتين :

• $\alpha = \frac{\pi}{3}$ • $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

3• أحسب بدلالة α الطويلة و عمدة لكل من z_1 و z_2 .

الحلّ. 1• يكون z_1 مُعرّفاً إذا و فقط إذا كان $\tan\alpha$ مُعرّفاً أي إذا و فقط إذا كان $\cos\alpha \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

يكون z_2 مُعرّفاً إذا و فقط إذا كان z_1 مُعرّفاً و $z_1 \neq 1$ أي إذا و فقط إذا كان $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ و $\alpha \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ و $\sin\alpha \neq 0$ أي إذا و فقط إذا كان $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ و $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ أي إذا و فقط إذا كان $\alpha \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

في الأخير، يكون z_1 و z_2 معرّفين إذا و فقط إذا كان $\alpha \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$.

2• • لأجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$ يكون :

$$z_1 = 1 + \imath \tan\frac{\pi}{3} = 1 + \imath\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \imath\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = \frac{1}{1-z_1} = \frac{1}{1-1-\imath\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}\imath} = \frac{\sqrt{3}}{3}\imath = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

أي : $|z_1| = 2$ ؛ $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$ ؛ $|z_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$.

• إذا كان $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ فإنّ :

$$z_1 = 1 + \imath \tan\frac{\pi}{3} = 1 - \imath\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$$

$$z_2 = \frac{1}{1-z_1} = \frac{1}{1-1+\imath\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}\imath} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\imath = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

أي : $|z_1| = 2$ ؛ $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{3}$ ؛ $|z_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{2}$.

3• ليكن $\alpha \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$. لدينا :

$$z_1 = 1 + \imath \tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha + \imath\sin\alpha)$$

و بالتالي :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- إذا كان $\cos\alpha > 0$ فإنّ $|z_1| = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ و $\arg(z_1) = \alpha \pmod{2\pi}$ ؛
- أمّا إذا كان $\cos\alpha < 0$ فإنّ $|z_1| = -\dfrac{1}{\cos\alpha}$ و $\arg(z_1) = \alpha + \pi \pmod{2\pi}$.

بالمثل :

$$z_2 = \frac{1}{1-z_1} = \frac{1}{-\imath\tan\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}\imath = \imath\operatorname{cotan}\alpha$$

و بالتالي :

- إذا كان $\operatorname{cotan}\alpha > 0$ فإنّ $|z_2| = \operatorname{cotan}\alpha$ و $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ ؛
- و إذا كان $\operatorname{cotan}\alpha < 0$ فإنّ $|z_2| = -\operatorname{cotan}\alpha$ و $\arg(z_2) = -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

■

65 ليكن φ عدداً حقيقيا بحيث $-\pi < \varphi \leq \pi$. أوجد الطويلة و عمدة للأعداد المركبة الآتية :

1. $a = 1 + \cos\varphi + \imath\sin\varphi$
2. $b = \sin\varphi + \imath(1 + \cos\varphi)$
3. $c = \cos\varphi + \imath(1 + \sin\varphi)$

الحلّ. 1. **الطريقة الأولى** : لدينا :

$$a = 1 + \cos\varphi + \imath\sin\varphi = 1 + e^{\imath\varphi} = e^{\imath\varphi/2}\left(e^{-\imath\varphi/2} + e^{\imath\varphi/2}\right) = 2e^{\imath\varphi/2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

بما أنّ $-\pi < \varphi \leq \pi$ فإنّ $-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\varphi}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$ منه :

- إذا كان $\cos\dfrac{\varphi}{2} = 0$ أي إذا كان $\varphi = \pi$ فإنّ $a = 0$.
- إذا كان $\cos\dfrac{\varphi}{2} \neq 0$ أي إذا كان $\varphi \in]-\pi, \pi[$ فإنّ $\cos\dfrac{\varphi}{2} > 0$ و حسب المبرهنة 𝕀 صفحة 𝕀 ، الكتابة $2e^{\imath\varphi/2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$ هي الشكل الأسي للعدد a و بالتالي $|a| = 2\cos\dfrac{\varphi}{2}$ و $\arg(a) = \dfrac{\varphi}{2} \pmod{2\pi}$.

الطريقة الثانية : بما أنّ $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ فإنّ :

$$a = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 2\imath\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \imath\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 2e^{\imath\varphi/2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

و من ثمّ نتمم الحل بنفس الطريقة السابقة.

2. **الطريقة الأولى** : بما أنّ $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}$ ؛ و بما أنّ $\cos(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ و $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ فإنّ :

$$b = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + 2\imath\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \imath\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) + \imath\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)\right] = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,e^{\imath(\pi-\varphi)/2}$$

ثمّ نتمم الحل بنفس طريقة السؤال الأول.

الطريقة الثانية : نلاحظ أنّ $b = \imath\overline{a}$ منه :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $\varphi = \pi$ فإنّ $b = 0$.
- إذا كان $\varphi \in]-\pi, \pi[$ فإنّ :

$$|b| = |\imath\overline{a}| = |\imath| \cdot |\overline{a}| = 1 \times |a| = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\arg(b) = \arg(\imath\overline{a}) = \arg(\imath) + \arg(\overline{a}) = \frac{\pi}{2} - \arg(a) = \frac{\pi - \varphi}{2} \pmod{2\pi} \quad \text{و}$$

• 3. **الطريقة الأولى** لدينا :

$$c = \cos\varphi + \imath(1 + \sin\varphi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \imath\left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = \sin\psi + \imath(1 + \cos\psi)$$

مع $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. نُطبّق نتيجة السؤال الثاني فيكون :

- إذا كان $\psi = \pi$ أي إذا كان $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ فإنّ $c = 0$.
- و إلاّ، فإنّ $c = 2\cos\frac{\psi}{2}\, e^{\imath(\pi-\psi)/2}$ أي $c = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) e^{\imath(\pi/4+\varphi/2)}$ و هنا نُميِّز حالتين :

← إذا كان $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) > 0$ أي إذا كان $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$ أي $-\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ أي $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$
(لأنّ $-\pi < \varphi < \pi$) فحسب المبرهنة 8 صفحة 20 :

$$|c| = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{و} \quad \arg(c) = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi} .$$

← إذا كان $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) < 0$ أي إذا كان $-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$ فإنّ :

$$|c| = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{و} \quad \arg(c) = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi} = \frac{5\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi} .$$

الطريقة الثانية : نضع $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$ فيكون :

$$c = \cos\varphi + \imath(1 + \sin\varphi) = \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + \imath\left[1 + \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\psi + \imath(1 - \cos\psi)$$

$$= 2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2} + 2\imath\sin^2\frac{\psi}{2} = 2\sin\frac{\psi}{2}\left(\cos\frac{\psi}{2} + \imath\sin\frac{\psi}{2}\right) = 2\sin\frac{\psi}{2}\, e^{\imath\psi/2}$$

- إذا كان $\psi = 0$ أي إذا كان $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ فإنّ $c = 0$.
- و إلاّ، فإنّ $c = 2\sin\frac{\psi}{2}\, e^{\imath\psi/2}$ أي $c = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) e^{\imath(\pi/4+\varphi/2)}$ و هنا نُميِّز حالتين :

← إذا كان $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) > 0$ أي إذا كان $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$ أي $-\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ أي $-\pi < \varphi < \frac{\pi}{2}$
(لأنّ $-\pi < \varphi < \pi$) فحسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنّ :

$$|c| = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{و} \quad \arg(c) = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi} .$$

← إذا كان $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) < 0$ أي إذا كان $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ فإنّ :

$$|c| = -2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{و} \quad \arg(c) = \pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi} = \frac{5\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pmod{2\pi} .$$

■

66 ☼ أوجد الطويلة و عمدة للأعداد المركبة الآتية (كلما كانت معرفة) :

• $a = \dfrac{(1 + \imath\tan\theta)^2}{1 + \tan^2\theta}$ • $b = \dfrac{1 - \cos\theta + \imath\sin\theta}{1 + \cos\theta - \imath\sin\theta}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. 1• نعلم أنّ $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ منه :

$$a=\frac{(1+\imath\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta\left(1+\imath\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=(\cos\theta+\imath\sin\theta)^2=e^{2\imath\theta}$$

و بالتالي : $|a|=1$ و $\arg(a)=2\theta \pmod{2\pi}$.

2• لدينا :

$$b=\frac{1-\cos\theta+\imath\sin\theta}{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\imath\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\imath\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}+\imath\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\imath\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\tan\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cancel{\cos\frac{\theta}{2}\left(\imath\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\imath\sin\frac{\theta}{2}\right)}}=\imath\tan\frac{\theta}{2}$$

إذن، إذا كان $\tan\dfrac{\theta}{2}=0$ فإنّ $b=0$ ؛ و إلاّ فحسب المبرهنة ▯ صفحة ▯ :

$$|b|=\left|\tan\frac{\theta}{2}\right| \quad \text{و} \quad \arg(b)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi} & ;\ \text{إذا كان } \tan\dfrac{\theta}{2}>0\\ -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi} & ;\ \text{إذا كان } \tan\dfrac{\theta}{2}<0\end{cases}.$$

■

67 أكتب على الشكل المثلثي الأعداد $\dfrac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}$ و $\dfrac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}$.

الحلّ. بما أنّ $1-\cos\theta-\imath\sin\theta=1-e^{\imath\theta}$ فإنّ :

$$1-\cos\theta-\imath\sin\theta=0 \iff 1-e^{\imath\theta}=0 \iff e^{\imath\theta}=1 \iff \theta=0 \pmod{2\pi}$$

إذن العددان $\dfrac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}$ و $\dfrac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}$ مُعرّفان إذا و فقط إذا كان $\theta\neq 0 \pmod{2\pi}$.

نفرض إذن أنّ $\theta\neq 0 \pmod{2\pi}$.

1• لدينا :

$$\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}=\frac{1+e^{-\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}=\frac{e^{-\imath\theta/2}\left(e^{\imath\theta/2}+e^{-\imath\theta/2}\right)}{e^{\imath\theta/2}\left(e^{-\imath\theta/2}-e^{\imath\theta/2}\right)}$$

$$=\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2\imath\sin\frac{\theta}{2}}e^{-\imath\theta}=\imath e^{-\imath\theta}\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}=e^{\imath\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$$

منه نُميِّز ثلاثة حالات :

- إذا كان $\operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{2}=0$ أي إذا كان $\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ أي $\theta=\pi \pmod{2\pi}$ (و بالتالي $\theta\neq 0 \pmod{2\pi}$) فإنّ :
$$\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}=0\times e^{\imath\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=0$$
- إذا كان $\operatorname{cotan}\dfrac{\theta}{2}>0$ أي إذا كان $\dfrac{\theta}{2}\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ أي فإنّ الشكل $\theta\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,\pi+2k\pi[$ المثلثي للعدد $\dfrac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}$ (مبرهنة 8 صفحة 20) هو :
$$\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}=\left[\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2},\frac{\pi}{2}-\theta\right]$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} < 0$ أي إذا كان $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$ أي $\frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi[$

فإنّ الشكل المثلثي للعدد $\frac{1+\cos\theta - \imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}$ (مبرهنة 8 صفحة 20) هو :

$$\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta} = \left[-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right] = \left[-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \frac{3\pi}{2}-\theta\right]$$

2• لدينا :

$$\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}} == \frac{e^{\imath\theta/2}\left(e^{-\imath\theta/2}+e^{\imath\theta/2}\right)}{e^{\imath\theta/2}\left(e^{-\imath\theta/2}-e^{\imath\theta/2}\right)} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2\imath\sin\frac{\theta}{2}} = \imath\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = e^{\imath\frac{\pi}{2}}\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$$

منه نُميِّز ثلاثة حالات :

- إذا كان $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} = 0$ أي إذا كان $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ أي $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ (و بالتالي $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$)

فإنّ :

$$\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}} = 0\times\imath = 0$$

- إذا كان $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} > 0$ أي إذا كان $\frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ أي فإنّ الشكل $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$

المثلثي للعدد $\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}$ (مبرهنة 8 صفحة 20) هو :

$$\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}} = \left[\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- إذا كان $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} < 0$ أي إذا كان $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$ أي $\frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi[$

فإنّ الشكل المثلثي للعدد $\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}$ (مبرهنة 8 صفحة 20) هو :

$$\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}} = \left[-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \pi+\frac{\pi}{2}\right] = \left[-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = \left[-\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$$

ملاحظة 22 : ◁‖ كان بإمكاننا أن نستنتج الشكل المثلثي للعدد $\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}$ من الشكل المثلثي للعدد $\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}$ و ذلك لأنّ :

$$\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}} = \frac{e^{i\theta}\left(e^{-\imath\theta}+1\right)}{1-e^{\imath\theta}} = e^{\imath\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}$$

و بالتالي :

$$\left|\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}\right| = \left|e^{\imath\theta}\right|\cdot\left|\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}\right| = \left|\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}\right|$$

و

$$\arg\left(\frac{1+e^{\imath\theta}}{1-e^{\imath\theta}}\right) = \arg\left(e^{\imath\theta}\right) + \arg\left(\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}\right) \pmod{2\pi}$$

$$= \theta + \arg\left(\frac{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}{1-\cos\theta-\imath\sin\theta}\right) \pmod{2\pi}$$

‖▷

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

68 α عدد حقيقي حيث $\alpha \in]-\pi, \pi]$ و z ، z' عددان مركبان حيث :

$$z = \cos\alpha + \imath \sin\alpha \quad , \quad z' = 1 + z + z^2$$

عيّن، حسب قِيَم العدد α ، الشكل المثلثي للعدد المركب z' .

الحلّ. لدينا :

$$\begin{aligned} z' = 1 + z + z^2 &= 1 + \cos\alpha + \imath\sin\alpha + (\cos\alpha + \imath\sin\alpha)^2 \\ &= 1 + \cos\alpha + \imath\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\imath\cos\alpha\sin\alpha = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \imath(\sin\alpha + \sin 2\alpha) \\ &= 1 + \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 + \imath(\sin\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha) = (1 + 2\cos\alpha)\cos\alpha + \imath(1 + 2\cos\alpha)\sin\alpha \\ &= (1 + 2\cos\alpha)(\cos\alpha + \imath\sin\alpha) \end{aligned}$$

و بالتالي :

- إذا كان $1 + 2\cos\alpha = 0$ أي إذا كان $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ أي إذا كان $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3}$ فإنّ $z' = 0$ (الشكل المثلثي غير مُعرّف)؛
- إذا كان $1 + 2\cos\alpha > 0$ أي إذا كان $\cos\alpha > -\frac{1}{2}$ أي إذا كان $-\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ فإنّ $z' = [1 + 2\cos\alpha, \alpha]$ ؛
- و إذا كان $1 + 2\cos\alpha < 0$ أي إذا كان $\cos\alpha < -\frac{1}{2}$ أي إذا كان $\alpha \in \left]-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ فإنّ:

$z' = [-1 - 2\cos\alpha, \pi + \alpha]$.

■

69 أحسب بطريقتين مختلفتين الجذرين التربيعيين للعدد $1 + \imath$. إستنتج قيمة كلاًّ من $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

الحلّ. بدايةً، نستعمل الشكل الأسي :

لدينا : $1 + \imath = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$ و إذا كان $u = \rho e^{\imath\theta}$ جذراً تربيعياً للعدد $1 + \imath$ فإنّ $u^2 = 1 + \imath$ أي $\rho^2 e^{2\imath\theta} = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$ منه $\rho^2 = \sqrt{2}$ و $2\theta = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ أي $\rho = \sqrt[4]{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{8} \pmod{\pi}$ إذن الجذرين التربيعيين للعدد $1 + \imath$ هما $u = \sqrt[4]{2}e^{\imath\pi/8}$ و $-u = -\sqrt[4]{2}e^{\imath\pi/8} = \sqrt[4]{2}e^{\imath(\pi+\frac{\pi}{8})}$.

من جهة أخرى (نستعمل الشكل الجبري)، إذا كان $x + \imath y$ جذراً تربيعياً للعدد $1 + \imath$ فإنّ $(x + \imath y)^2 = 1 + \imath$ أي $x^2 - y^2 + 2\imath xy = 1 + \imath$ منه :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} .$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2 = 1 + \sqrt{2}$ منه $x = \pm\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}}$.

من المعادلة الثالثة نستنتج أنّ $y^2 = \sqrt{2} - x^2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ منه $y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}}$.

من المعادلة الثانية نجد أنّ x و y لهما نفس الإشارة إذن فالجذرين التربيعيين للعدد $1 + \imath$ هما $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \imath\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ و $-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - \imath\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بما أنّ $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ ، $\operatorname{Re}\left(e^{\imath\pi/8}\right) = \cos\frac{\pi}{8}$ ، نستخلص ممّا سبق أنّ :

$$\sqrt[4]{2}e^{\imath\pi/8} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \imath\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

منه :

$$e^{\imath\pi/8} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \frac{\imath}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

أي :

$$e^{\imath\pi/8} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} + \imath\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

في الأخير : $\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ و $\boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$. ■

70 ☼ أكتب العدد $z = (1+\imath)\left(\sqrt{3}+\imath\right)$ على شكليّه الجبري و المثلثي ثمّ استنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحلّ.

• **الشكل الجبري :**

$$z = (1+\imath)\left(\sqrt{3}+\imath\right) = \sqrt{3}+\imath+\imath\sqrt{3}+\imath^2 = \sqrt{3}-1+\imath\left(\sqrt{3}+1\right)$$

• **الشكل المثلثي :**

$$1+\imath = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\imath\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$$

و

$$\sqrt{3}+\imath = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\imath\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\imath\pi/6}$$

منه :

$$z = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}\times 2e^{\imath\pi/6} = 2\sqrt{2}e^{\imath(\pi/4+\pi/6)} = 2\sqrt{2}e^{5\imath/12} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\imath\frac{5\pi}{12}\right)$$

إذن $\sqrt{3}-1+\imath\left(\sqrt{3}+1\right) = 2\sqrt{2}e^{5\imath/12}$ منه :

$$\cos\frac{5\pi}{12}+\imath\frac{5\pi}{12} = e^{5\imath/12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\imath\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

و بالتالي :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

و

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

لكن $\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ منه :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos\frac{\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

71 نعتبر العددين المركبين $z_1 = e^{\imath\pi/3}$ و $z_2 = e^{-\imath\pi/4}$.

1. أكتب z_1 و z_2 على الشكل الجبري.
2. أكتب العدد $z_1 z_2$ على الشكل الجبري، الأسي و المثلثي.
3. إستنتج قيمة كل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحلّ.

1. $z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \imath\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. الشكل الجبري للعدد $z_1 z_2$: $z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \imath\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

الشكل الأسي للعدد $z_1 z_2$: $z_1 z_2 = e^{\imath\pi/3} \cdot e^{-\imath\pi/4} = e^{\imath\pi/12}$

الشكل المثلثي للعدد $z_1 z_2$: $z_1 z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + \imath\sin\frac{\pi}{12}$

3. بالمطابقة بين الشكل الجبري و الشكل المثلثي للعدد $z_1 z_2$، نستنتج أنّ :

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

■

72

1. عيّن الطويلة و عمدة للعدد z_0 حيث $z_0 = 3 + 3\imath$.
2. نعتبر العدد المركب z_1 المعرف كما يلي :

$$z_0 \cdot z_1 = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \imath\sin\frac{17\pi}{12}\right)$$

عيّن الشكل المثلثي ثم الشكل الجبري للعدد z_1 ثمّ استنتج قيمتي $\cos\frac{17\pi}{12}$ و $\sin\frac{17\pi}{12}$.

الحلّ.

1. لدينا :

$$z_0 = 3 + 3\imath = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

و بالتالي : $\boxed{|z_0| = 3\sqrt{2}}$ و $\boxed{\arg(z_0) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 نضع $z = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \imath\sin\frac{17\pi}{12}\right)$. لدينا $z = z_0 \cdot z_1$ منه :

$$z_1 = \frac{z}{z_0} = \frac{6\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + \imath\sin\frac{17\pi}{12}\right)}{3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\left[6\sqrt{2}, \frac{17\pi}{12}\right]}{\left[3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}$$
$$= \left[\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \frac{17\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right] = \left[2, \frac{7\pi}{6}\right] = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \imath\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

و هو الشكل المثلثي للعدد z_1 . لكن $z_1 = -\sqrt{3} - \imath$ منه :

$$\cos\frac{17\pi}{12} + \imath\sin\frac{17\pi}{12} = \frac{z_0 \cdot z_1}{6\sqrt{2}} = \frac{(3+3\imath)\left(-\sqrt{3}-\imath\right)}{6\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{3} - 3\imath - 3\imath\sqrt{3} + 3}{6\sqrt{2}}$$
$$= \frac{3 - 3\sqrt{3} - 3\left(1+\sqrt{3}\right)\imath}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\imath$$

منه نستنتج أنّ : $\boxed{\cos\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}}$ و $\boxed{\sin\frac{17\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}}$.

■

73

z عدد مركب صورته M .
عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $z + \bar{z} = |z|$.

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$z + \bar{z} = |z| \iff x + \imath y + x - \imath y = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\iff 2x = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\iff x \geq 0 \quad \text{و} \quad 4x^2 = x^2 + y^2$$
$$\iff x \geq 0 \quad \text{و} \quad y^2 = 3x^2$$
$$\iff x \geq 0 \quad \text{و} \quad y = \pm\sqrt{3}x$$

إذن مجموعة النقط M التي تُحقق المطلوب هي اتحاد نِصفَيّ المستقيمين ذَوَيّ المعادلتين $y = -\sqrt{3}x$ و $y = \sqrt{3}x$ مع $x \geq 0$ و مع $x \geq 0$.
■

74

يُعطى عدد مركب α ، و z عدد مركب صورته M .
عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = 4\alpha\bar{\alpha}$.

الحلّ. لدينا :

$$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha}) = 4\alpha\bar{\alpha} \iff (z-\alpha)\overline{(z-\alpha)} = 4\alpha\bar{\alpha}$$
$$\iff |z-\alpha|^2 = 4|\alpha|^2$$
$$\iff |z-\alpha| = 2|\alpha|$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تبعد عن النقطة Ω ذات اللاحقة α بمسافة ثابتة تساوي $2|\alpha|$ أي هي الدائرة $\mathscr{C}(\Omega, 2|\alpha|)$ التي مركزها $\Omega(\alpha)$ و نصف قطرها $2|\alpha|$. ■

75 z عدد مركب حيث : $z = \cos\alpha + \imath\sin\alpha$.

1. ما هي مجموعة صور الأعداد z عندما يتغيّر α ؟
2. x عدد حقيقي . أحسب طويلة العدد المركب $\dfrac{1+\imath x}{1-\imath x}$. ماذا تستنتج ؟ أثبت أنّ : $\dfrac{1+\imath x}{1-\imath x} \neq -1$.
3. بيّن أنه إذا كان $z \neq -1$ فإنه يمكن كتابة z على الشكل $\dfrac{1+\imath x}{1-\imath x}$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

الحلّ. 1. لدينا :

$$|z-0| = \sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{1} = 1$$

إذن، مهما يكن العدد الحقيقي α فإنّ النقطة التي لاحقتها z تنتمي إلى الدائرة التي مركزها $O(0,0)$ (مبدأ المعلم) و نصف قطرها 1 .
إذن، مجموعة صور الأعداد z عندما يتغيّر α هي الدائرة $\mathscr{C}(O,1)$.

2. ليكن x عدداً حقيقياً. من الواضح أنّ $1-\imath x \neq 0$ إذن فالعدد $\dfrac{1+\imath x}{1-\imath x}$ مُعرّف. علاوةً على ذلك، لدينا :

$$\left|\frac{1+\imath x}{1-\imath x}\right| = \frac{|1+\imath x|}{|1-\imath x|} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(-x)^2}} = 1$$

نستنتج أنه يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث : $\dfrac{1+\imath x}{1-\imath x} = \cos\alpha + \imath\sin\alpha$.
من جهة أخرى، لدينا :

$$\frac{1+\imath x}{1-\imath x} = \frac{-1+\imath x+2}{1-\imath x} = \frac{-(1-\imath x)+2}{1-\imath x} = -1 + \frac{2}{1-\imath x} \neq -1$$

إذن، مهما يكن العدد الحقيقي x فإنّ : $\dfrac{1+\imath x}{1-\imath x} \neq -1$.

3. ليكن $z = \cos\alpha + \imath\sin\alpha = e^{\imath\alpha}$. بما أنّ $z \neq -1$ فإنّ $\alpha \neq \pi \pmod{2\pi}$ منه $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$ و بالتالي :

$$z = e^{\imath\alpha} = \frac{e^{\imath\alpha/2}}{e^{-\imath\alpha/2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \imath\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - \imath\sin\frac{\alpha}{2}} \overset{\text{grâce}}{=} \frac{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1+\imath\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\imath\tan\frac{\alpha}{2}}$$

نضع $x = \tan\frac{\alpha}{2}$ فيكون : $x \in \mathbb{R}$ و $z = \dfrac{1+\imath x}{1-\imath x}$.

الخلاصة : إذا كانت $\mathbb{U}$ مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 و كان $z \in \mathbb{C}$ فإنّ :

$$z \in \mathbb{U}\setminus\{-1\} \iff \exists x \in \mathbb{R} \mid z = \frac{1+\imath x}{1-\imath x}$$

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

76 z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $z_1 = \dfrac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}}$ و $z_2 = \dfrac{\imath}{2\imath\sqrt{3}-2}$.

أحسب كلا من الأعداد التالية و اكتبها على الشكل الجبري :

1. $z_1 + z_2$
2. $z_1 \cdot z_2$
3. $\dfrac{z_1}{z_2}$
4. $z_1^6 \cdot z_2^{12}$
5. $\dfrac{z_1^8}{z_2^3}$
6. $\dfrac{z_1^{13}+1}{z_1^{13}-1}$

الحلّ. لدينا :

$$z_1 = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}} = \frac{\left(1+\imath\sqrt{3}\right)^2}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1+2\imath\sqrt{3}-3}{4} = -\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3} = \mathrm{j} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$$
$$z_2 = \frac{\imath}{2\imath\sqrt{3}-2} = \frac{\imath\left(-2\imath\sqrt{3}-2\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2} = \frac{2\sqrt{3}-2\imath}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}\imath$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]$$

و بالتالي :

1. $z_1 + z_2 = -\dfrac{1}{2}+\imath\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{1}{8}\imath = \dfrac{\sqrt{3}-4}{8}+\dfrac{4\sqrt{3}-1}{8}\imath$
2. $z_1 \cdot z_2 = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right]\cdot\left[\dfrac{1}{4}, -\dfrac{\pi}{6}\right] = \left[1\times\dfrac{1}{4}, \dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right] = \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right] = \dfrac{1}{4}\imath$
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\left[1, \frac{2\pi}{3}\right]}{\left[\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]} = \left[\dfrac{1}{\frac{1}{4}}, \dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right] = \left[4, \dfrac{5\pi}{6}\right] = 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\imath\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$
$= 4\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\imath\right) = -2\sqrt{3}+2\imath$
4. $z_1^6 \cdot z_2^{12} = \left[1, \dfrac{2\pi}{3}\right]^6\cdot\left[\dfrac{1}{4}, -\dfrac{\pi}{6}\right]^{12} = \left[1^6, 6\times\dfrac{2\pi}{3}\right]\cdot\left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{12}, 12\times\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$
$= [1, 4\pi]\cdot\left[\dfrac{1}{2^{24}}, -2\pi\right] = \left[1\times\dfrac{1}{2^{24}}, 4\pi-2\pi\right] = \left[\dfrac{1}{2^{24}}, 2\pi\right] = \dfrac{1}{2^{24}}$
5. $\dfrac{z_1^8}{z_2^3} = \dfrac{\left[1, \frac{2\pi}{3}\right]^8}{\left[\frac{1}{4}, -\frac{\pi}{6}\right]^3} = \dfrac{\left[1^8, 8\times\frac{2\pi}{3}\right]}{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3, 3\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]} = \dfrac{\left[1, \frac{16\pi}{3}\right]}{\left[\frac{1}{64}, -\frac{\pi}{2}\right]} = \dfrac{\left[1, \frac{4\pi}{3}\right]}{\left[\frac{1}{64}, -\frac{\pi}{2}\right]}$
$= \dfrac{\cos\frac{4\pi}{3}+\imath\sin\frac{4\pi}{3}}{-\frac{1}{64}\imath} = 64\imath\left(-\dfrac{1}{2}-\imath\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 32\sqrt{3}-32\imath$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 6

$$\frac{z_1^{13}+1}{z_1^{13}-1}=\frac{\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]^{13}+1}{\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]^{13}-1}=\frac{\left[1,\frac{26\pi}{3}\right]+1}{\left[1,\frac{26\pi}{3}\right]-1}=\frac{\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]+1}{\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]-1}=\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3}+1}{\cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3}-1}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=\frac{1+\imath\sqrt{3}}{-3+\imath\sqrt{3}}=\frac{\left(1+\imath\sqrt{3}\right)\left(-3-\imath\sqrt{3}\right)}{3^2+\sqrt{3}^2}$$

$$=\frac{-3-\imath\sqrt{3}-3\imath\sqrt{3}+3}{12}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\imath$$

■

77 z عدد مركب حيث : $z=\dfrac{\sqrt{2}+\imath\sqrt{6}}{2(1-\imath)}$.

• 1 أحسب كلا من الأعداد : z^6 ، z^{12} ، z^{1990} و z^{2016} . أكتب كل النتائج على الشكل الجبري.

• 2 عيّن قيم العدد الطبيعي (غير المعدوم) n حتى يكون z^n عدداً حقيقيا.
أحسب z^n من أجل أصغر قيمة للعدد n المتحصل عليها.

• 3 عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون z^n تخيلياً صرفا.

الحلّ. لدينا :

$$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath}=\frac{\frac{1+\imath\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}}{2}}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{e^{\imath\pi/3}}{e^{-\imath\pi/4}}=e^{\imath\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{7\imath\pi/12}$$

• 1 منه :

$$z^6=\left(e^{7\imath\pi/12}\right)^6=e^{6\times7\imath\pi/12}=e^{7\imath\pi/2}=e^{-\imath\pi/2}=-\imath$$

$$z^{12}=\left(e^{7\imath\pi/12}\right)^{12}=e^{7\imath\pi}=e^{\imath\pi}=-1$$

$$z^{1990}=\left(e^{7\imath\pi/12}\right)^{1990}=e^{1990\times7\imath\pi/12}=e^{166\imath\pi-\imath\frac{14\pi}{12}}=e^{-7\imath\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath$$

$$z^{2016}=\left(e^{7\imath\pi/12}\right)^{2016}=e^{2016\times7\imath\pi/12}=e^{168\imath\pi}=e^{2\imath\pi}=1$$

• 2 بما أنّ $z^n=e^{7n\imath\pi/12}$ فإنّ :

$$z^n\in\mathbb{R}\iff\operatorname{Im}(z^n)=0\iff\sin\left(\frac{7n\pi}{12}\right)=0\iff\frac{7n\pi}{12}=0\pmod{\pi}$$

$$\iff 7n=0\pmod{12}\iff n=0\pmod{12}\qquad(\text{لأنّ }\gcd(7,12)=1)$$

إذن، حتى يكون z^n عدداً حقيقيا يجب أن يكون n من مضاعفات 12 .
لأجل $n=12$ وجدنا أنّ $z^{12}=-1$.

• 3 بالمثل :

$$z^n\in\imath\mathbb{R}\iff\operatorname{Re}(z^n)=0\iff\cos\left(\frac{7n\pi}{12}\right)=0\iff\frac{7n\pi}{12}=\frac{\pi}{2}\pmod{\pi}$$

$$\iff 7n=6\pmod{12}\iff 7\times7n=7\times6\pmod{12}$$

$$\iff 49n=42\pmod{12}\iff n=6\pmod{12}\iff n=12k+6=6(2k+1)\ ,\quad k\in\mathbb{N}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي، ليكون z^n تخيلياً صرفا يجب أن يكون n من المضاعفات الفردية للعدد 6 (أي من مضاعفات 6 و ليس من مضاعفات 12) .

■

78

1• عيِّن، حسب قيم العدد الحقيقي x ، الطويلة و عمدة للعدد المركب : $z = (x-2)\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

2• بيَّن أنّ العدد z^{1980} حقيقي ثمّ حدِّد إشارته.

الحلّ. 1• لدينا : $z = (x-2)\,e^{\imath\pi/4}$ ؛ و حسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنّ :

- إذا كان $x = 2$ فإنّ $z = 0$ ؛
- إذا كان $x > 2$ فإنّ : $|z| = x-2$ و $\arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ ؛
- و إذا كان $x < 2$ فإنّ : $|z| = 2-x$ و $\arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

2• بما أنّ $1980 = 4 \times 495$ فإنّ :

$$z^{1980} = (x-2)^{1980}\,e^{1980\imath\pi/4} = (x-2)^{1980}\,e^{495\imath\pi} = (x-2)^{1980}\,e^{\imath\pi} = -(x-2)^{1980}$$

و هو عدد حقيقي. لكن 1980 عدد زوجي إذن $-(x-2)^{1980} \leq 0$.

في الأخير، العدد z^{1980} عدد حقيقي سالب.

■

79

α و θ عددان حقيقيان . أوجد الطويلة و عمدة للعدد المركب : $z = \dfrac{\alpha\,(1+\imath\tan\theta)^{10}}{1+\tan^2\theta}$.

الحلّ. لدينا :

$$z = \frac{\alpha\,(1+\imath\tan\theta)^{10}}{1+\tan^2\theta} = \frac{\alpha\,(\cos\theta+\imath\sin\theta)^{10}}{\cos^{10}\theta} \times \cos^2\theta = \left(e^{\imath\theta}\right)^{10}\alpha\cos^8\theta = e^{10\imath\theta}\alpha\cos^8\theta$$

و بما أنّ $\cos^8\theta \geq 0$ فحسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنّ :

- إذا كان $\alpha\cos^8\theta = 0$ أي إذا كان $\alpha = 0$ أو $\cos\theta = 0$ فإنّ : $z = 0$ ؛
- إذا كان $\alpha\cos^8\theta > 0$ أي إذا كان $\alpha > 0$ و $\cos\theta \neq 0$ فإنّ :
$\arg(z) = 10\theta \pmod{2\pi}$ و $|z| = \alpha\cos^8\theta$
- و إذا كان $\alpha\cos^8\theta < 0$ أي إذا كان $\alpha < 0$ و $\cos\theta \neq 0$ فإنّ :
$\arg(z) = \pi + 10\theta \pmod{2\pi}$ و $|z| = -\alpha\cos^8\theta$

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

80 z_1 و z_2 عددان مركبان حيث $|z_1| = |z_2| = 1$ و $z_1 z_2 + 1 \neq 0$.
برهن أنّ العدد $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ حقيقي.

الحلّ. بما أنّ $|z_1| = 1$ فإنّ $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$، و بما أنّ $|z_2| = 1$ فإنّ $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ منه :

$$\overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \frac{\bar{z}_1 + z_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}}{1 + \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}} = \frac{\frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2}}{\frac{z_1 z_2 + 1}{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$$

و بالتالي فالعدد $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ حقيقي. ■

81 ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. أثبت أنّ العدد $A = \dfrac{1 + z}{1 - z}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان $|z| = 1$ أي :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) = 0 \iff |z| = 1$$

الحلّ. **الطريقة الأولى** : نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$ فيكون :

$$A = \frac{1 + x + \imath y}{1 - x - \imath y} = \frac{(1 + x + \imath y)(1 - x + \imath y)}{(1 - x)^2 + y^2}$$
$$= \frac{(1 + x)(1 - x) - y^2 + \imath(1 + x + 1 - x)}{(1 - x)^2 + y^2}$$
$$= \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 - x)^2 + y^2} + \frac{2\imath}{(1 - x)^2 + y^2}$$

إذن :

$$\operatorname{Re}(A) = 0 \iff \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 - x)^2 + y^2} = 0$$
$$\iff x^2 + y^2 = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1$$

الطريقة الثانية :

$$A \in \imath\mathbb{R} \iff \overline{A} = -A \iff \overline{\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)} = -\frac{1 + z}{1 - z}$$
$$\iff \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}} = -\frac{1 + z}{1 - z} \iff (1 + \bar{z})(1 - z) = -(1 - \bar{z})(1 + z)$$
$$\iff 2 - 2z\bar{z} = 0 \iff z\bar{z} = 1 \iff |z|^2 = 1 \iff |z| = 1$$

■

82 u ، v ، w أعداد مركبة حيث $|u| = |v| = |w| = 1$. أثبت أنّ : $|uv + vw + wu| = |u + v + w|$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. نُذكِّر أنه إذا كان $|z|=1$ فإنّ $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ منه :

$$|u+v+w|=\overline{|u+v+w|}=|\overline{u+v+w}|=|\overline{u}+\overline{v}+\overline{w}|=\left|\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right|$$
$$=\left|\frac{uv+uw+vw}{uvw}\right|=\frac{|uv+uw+vw|}{|uvw|}=\frac{|uv+uw+vw|}{|u|\cdot|v|\cdot|w|}$$
$$=\frac{|uv+uw+vw|}{1\cdot1\cdot1}=|uv+uw+vw|$$

و هو المطلوب. ■

83 ما هي قِيَم العدد المركب z التي تجعل العدد $Z=z^2+z+1$ حقيقياً ؟ تخيليا صرفا ؟

الحلّ. نضع $z=x+\imath y$ مع $x,y\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$Z=(x+\imath y)^2+(x+\imath y)+1=x^2-y^2+2\imath xy+x+\imath y+1=\left(x^2-y^2+x+1\right)+\imath y\,(2x+1)$$

منه :

$$Z \text{ حقيقي} \iff \operatorname{Im}(Z)=0 \iff y\,(2x+1)=0 \iff y=0 \quad \text{أو} \quad 2x+1=0$$

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي اتحاد المستقيمين ذوَيْ المعادلتين $x=-\dfrac{1}{2}$ و $y=0$.

$$Z \text{ تخيلي صرف} \iff \operatorname{Re}(Z)=0 \iff x^2-y^2+x+1=0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-y^2+1=0$$
$$\iff (y-0)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي القطع الزائد الذي مركزه $\Omega\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ ، محوره المستقيم ذو المعادلة $x=-\dfrac{1}{2}$ و معادلتا مستقيمَيْه المقاربَيْن هما $y=\pm\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

■

84 لتكن $\mathbb{U}$ مجموعة الجذور النونية للوحدة. أثبت أنّ :

$$\forall u\in\mathbb{U}\,,\quad \forall z\in\mathbb{C}^*\,,\quad \left|u-\frac{1}{\overline{z}}\right|=\frac{|u-z|}{|z|}$$

الحلّ. بما أنّ $u\in\mathbb{U}$ فإنّ $|u|=1$ منه $\overline{u}=\dfrac{1}{u}$ و بالتالي إذا كان $z\in\mathbb{C}^*$ فإنّ :

$$\left|u-\frac{1}{\overline{z}}\right|=\left|\frac{1}{\overline{u}}-\frac{1}{\overline{z}}\right|=\left|\frac{\overline{z}-\overline{u}}{\overline{u}\,\overline{z}}\right|=\frac{|-(\overline{u}-\overline{z})|}{|\overline{u}|\cdot|\overline{z}|}=\frac{|\overline{u}-\overline{z}|}{1\times|\overline{z}|}=\frac{|u-z|}{|z|}$$

لأنّ $|v|=|-v|$ و $|\overline{v}|=|v|$ لكل عدد مركب $v\in\mathbb{C}$. ■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

85 ليكن $a, b, c \in \mathbb{U}$ بحيث $b \neq c$. نضع $A = \dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2}$. أثبت أنّ $A \in \mathbb{R}_+$.

الحلّ. نُذكّر أنّ $\mathbb{U}$ هي مجموعة كلّ جذور الوحدة أي مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها تساوي 1 .

بما أنّ $a \in \mathbb{U}$ فإنّ $a \neq 0$ و بما أنّ $b \neq c$ فالمقدار $A = \dfrac{b(c-a)^2}{a(c-b)^2}$ مُعَرَّف.

نضع $u = \dfrac{c-a}{c-b}$. لدينا :

$$\overline{u} = \overline{\frac{c-a}{c-b}} = \frac{\overline{c}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{b}} = \frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}} = \frac{\frac{a-c}{ac}}{\frac{b-c}{bc}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}u$$

منه :

$$A = \frac{b}{a}\left(\frac{c-a}{c-b}\right)^2 = \frac{b}{a}u^2 = \left(\frac{b}{a}u\right)u = \overline{u}u = |u|^2 \in \mathbb{R}_+$$

■

86 α عدد مركب حيث : $\alpha = 2 - 2\imath\sqrt{3}$.

- 1. أكتب α على شكله المثلثي ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^4 = \alpha$.
- 2. باستعمال الطريقة الجبرية، عيّن الأعداد المركبة u التي تحقق $u^2 = \alpha$ ، ثمّ الأعداد المركبة z التي تحقق : $z^4 = \alpha$.
- 3. إستنتج قيمتَيْ $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

الحلّ. 1. لدينا :

$$\alpha = 2 - 2\imath\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left[4, -\frac{\pi}{3}\right]$$

و هو الشكل المثلثي للعدد α .

حلول المعادلة $z^4 = \alpha$ هي الجذور الرابعة للعدد α . لكن :

$$\alpha = \left[4, -\frac{\pi}{3}\right] = 4e^{-\imath\pi/3} = \left(\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}\right)^4$$

و بالتالي فحلول المعادلة $z^4 = \alpha$ هي الأعداد $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ ، $-\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ ، $\imath\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ و $-\imath\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ أي الأعداد $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ ، $\sqrt{2}e^{11\imath\pi/12}$ ، $\sqrt{2}e^{5\imath\pi/12}$ و $\sqrt{2}e^{-7\imath\pi/12}$.

- 2. نضع $u = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$u^2 = \alpha \iff x^2 - y^2 + 2\imath xy = 2 - 2\imath\sqrt{3} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -2\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4 \end{cases}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2 = 6$ أي $x = \pm\sqrt{3}$. نختار $x = \sqrt{3}$ و نُعوّض في المعادلة الثانية لنجد $y = -1$.

في الأخير، للمعادلة $u^2 = \alpha$ حلاّن هما $\sqrt{3} - \imath$ و $-\sqrt{3} + \imath$. من جهة أخرى لدينا :

$$z^4 = \alpha \iff \left(z^2\right)^2 = \alpha \iff z^2 = \pm\left(\sqrt{3} - \imath\right)$$

و بالتالي يجب البحث عن الجذور التربيعية للعددين $\pm\left(\sqrt{3} - \imath\right)$.

ليكن $v = a + \imath b$ جذراً تربيعياً للعدد $\sqrt{3} - \imath$. لدينا :

$$v^2 = \sqrt{3} - \imath \iff a^2 - b^2 + 2\imath ab = \sqrt{3} - \imath \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{3} \\ 2ab = -1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2a^2 = 2 + \sqrt{3}$ منه $a = \pm\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$ أي $a = \pm\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$.

بطرح المعادلة الأولى من الثالثة ينتج $2b^2 = 2 - \sqrt{3}$ أي $b = \pm\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$.

من المعادلة الثانية نستنتج أنّ a و b مختلفان في الإشارة.

في الأخير، حلول المعادلة $z^2 = \sqrt{3} - \imath$ هي $\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} - \imath\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$ و $-\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}$.

لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد $-\sqrt{3} + \imath$ يمكن اتّباع نفس الطريقة، أو كما يلي :

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} + \imath = -\left(\sqrt{3} - \imath\right) &= \imath^2\left[\pm\left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} - \imath\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}\right)\right]^2 \\ &= \left[\pm\imath\left(\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} - \imath\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}\right)\right]^2 \\ &= \left[\pm\left(\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} + \imath\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

إذن، الجذران التربيعيان للعدد $-\sqrt{3} + \imath$ هما $\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$ و $-\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} - \imath\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$.

يمكن أن نلاحظ أنّ $\left(\sqrt{3}+1\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$ و $\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ و بالتالي فحلول المعادلة $z^4 = \alpha$ هي: $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - \imath\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ، $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ ، $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} + \imath\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ و $-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} - \imath\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

• 3 الدالة cos زوجية إذن $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{7\pi}{12}$ و هي أيضاً متناقصة على $[0, \pi]$ و بالتالي :

$$\cos\frac{\pi}{12} \geq \cos\frac{5\pi}{12} \geq \cos\frac{7\pi}{12} \geq \cos\frac{11\pi}{12}$$

لكن :

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \geq -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \geq -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منه نستنتج أنّ :

$$e^{5\imath\pi/12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad , \quad e^{-\imath\pi/12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$e^{11\imath\pi/12} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad , \quad e^{-7\imath\pi/12} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

و منه الجدول التالي :

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
$\boldsymbol{\frac{11\pi}{12}}$	$\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

■

87

1. ليكن θ عدداً حقيقيا. أثبت أنّ : $(x-e^{\imath\theta})(x-e^{-\imath\theta}) = x^2 - 2x\cos\theta + 1$
2. لتكن f دالة كثير الحدود المعرفة كما يلي : $f(x) = x^4 + 1$.

أوجد الجذور الرابعة للعدد 1− ثمّ استنتج تحليلاً للدالة f على شكل جداء كثيرَيْ حدود من الدرجة الثانية بمعاملات حقيقية.

3. ليكن z عدداً مركبا بحيث $1 + z^4 + z^8 = 0$.

أثبت أنّ z يُحقق $z^{12} = 1$ (أي أنّ z جذر إثنا عَشَري للوحدة)

الحلّ.

1. بالنشر و التبسيط نصل إلى النتيجة :

$$(x-e^{\imath\theta})(x-e^{-\imath\theta}) = x^2 - (e^{\imath\theta}+e^{-\imath\theta})x + e^{\imath\theta}e^{-\imath\theta} = x^2 - 2x\cos\theta + 1$$

2. لدينا :

$$z^4 = 1 \iff z^2 = 1 \text{ أو } z^2 = -1 \iff z = \pm 1 \text{ أو } z = \pm\imath$$

إذن، الجذور الرابعة للوحدة هي : $1, -1, \imath, -\imath$.

لإيجاد الجذور الرابعة للعدد 1− ، يكفي معرفة إحداها و ضربها بالجذور الرابعة للوحدة.

لكن $e^{\imath\pi} = e^{-\imath\pi} = -1$ إذن إحدى الجذور الرابعة للعدد 1− هي $e^{\imath\pi/4}$ منه نستنتج أنّ الجذور الرابعة للعدد 1− هي $\imath$ أي $e^{\imath\pi/4}\times 1, e^{\imath\pi/4}\times -1, e^{\imath\pi/4}\times \imath, e^{\imath\pi/4}\times -\imath$ و بما أنّ $e^{\imath\pi/4}, -e^{\imath\pi/4}, \imath e^{\imath\pi/4}, -\imath e^{\imath\pi/4} = e^{\imath\pi/2}$ و $-\imath = e^{-\imath\pi/2}$ فإنّ هذه الجذور تُكتب : $e^{\imath\pi/4}, e^{\imath(\pi/4-\pi)}, e^{\imath(\pi/4+\pi/2)}, e^{\imath(\pi/4-\pi/2)}$ و بعد التبسيط نجد : $e^{\imath\pi/4}, e^{-3\imath\pi/4}, e^{3\imath\pi/4}, e^{-\imath\pi/4}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

جذور كثير الحدود f هي بالتحديد الجذور الرابعة للعدد 1− و بالتالي نستنتج التحليل الآتي له على شكل جداء عوامل من الدرجة الأولى : $f(x)=x^4+1=\left(x-e^{\imath\pi/4}\right)\left(x-e^{-\imath\pi/4}\right)\left(x-e^{3\imath\pi/4}\right)\left(x-e^{-3\imath\pi/4}\right)$

و بتطبيق نتيجة السؤال الأوّل (مرّتين) نجد : $f(x)=\left(x^2-2x\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\right)\left(x^2-2x\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+1\right)$

أي $f(x)=x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$

ملاحظة 23 : ◁ يمكن الحصول على هذه النتيجة باتّباع طريقة إتمام المربع :

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)$$

▷

ملاحظة 24 : ◁ في مجموعة الأعداد المركبة، كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل هي كثيرات الحدود الثابتة و كثيرات الحدود من الدرجة الأولى، و في مجموعة الأعداد الحقيقية، كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل هي كثيرات الحدود الثابتة ، كثيرات الحدود من الدرجة الأولى و كثيرات الحدود من الدرجة الثانية التي مميّزها سالب تماماً (حتى و لم يكن لها أيّ جذر حقيقي و مثال ذلك الدالة f التي جذورها كلها مركبة لكنها قابلة للتحليل إلى جداء عوامل من الدرجة الثانية).

▷

• 3 نلاحظ أوّلاً أنّ $z\neq 1$ (لأنّ : $z=1 \implies 1+z^4+z^8=1+1+1=3\neq 0$).

نعلم أنّ : $1+z^4+z^8=0$

بضرب طرفي المساواة بالعدد z : $z+z^5+z^9=0$

بضرب طرفي المساواة بالعدد z مرة ثانية : $z^2+z^6+z^{10}=0$

و مرة ثالثة : $z^3+z^7+z^{11}=0$

الآن، نجمع هذه المساويات طرفاً إلى طرف لنجد : $\sum_{k=0}^{11}z^k=0$.

و بما أنّ $z\neq 1$ ، فبإمكاننا تطبيق الصيغة العامة للمجموع الجزئي لمتتالية هندسية : $\sum_{k=0}^{11}z^k=\frac{1-z^{12}}{1-z}=0$ منه $z^{12}=1$.

ملاحظة 25 : ◁ أثبتنا هنا أنه إذا كان z جذراً لكثير الحدود X^8+X^4+1 فإنّ z جذر لكثير الحدود $X^{12}-1$ و هذا يعني أنّ X^8+X^4+1 يقسم $X^{12}-1$ ، و بالتحديد لدينا :

$$X^{12}-1=\left(X^8+X^4+1\right)\left(X^4-1\right)$$

و نحصل عليه بالتعويض $t=X^4$ في المتطابقة $t^3-1=(t-1)\left(t^2+t+1\right)$، كما يمكن تعميم هذه النتيجة :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ X^{3n}-1=\left(X^{2n}+X^n+1\right)\left(X^n-1\right)$$

▷

■

3.VI تطبيقات الأعداد المركبة

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

88 ☼ أحسب الجذور التربيعية للأعداد التالية :

1) 1 2) $\imath$ 3) $3+4\imath$ 4) $8-6\imath$ 5) $7+24\imath$ 6) $3-4\imath$ 7) $24-10\imath$ 8) $48+14\imath$

الحلّ. بما أننا نكرر نفس العملية عدة مرات، فمن الأفضل البحث عن صيغة عامة للجذور التربيعية ثم تطبيق هذه الصيغة على الحالات المدروسة.

ليكن $z=a+\imath b$ عدداً مركباً مع $a,b\in\mathbb{R}$ و ليكن $\zeta=x+\imath y$ جذراً تربيعياً له مع $x,y\in\mathbb{R}$.

لدينا $\zeta^2=z$ و $|\zeta|^2=|z|$ أي $\sqrt{a^2+b^2}$ و $(x+\imath y)^2=a+\imath b$ منه $x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}$ و $x^2-y^2+2\imath xy=a+\imath b$

و بالتالي : $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=2b \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$.

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}$ أي $x=\pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.

بطرح المعادلة الأولى من الثالثة ينتج $2y^2=-a+\sqrt{a^2+b^2}$ أي $y=\pm\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.

نختار x و y مع مراعاة الشرط : xy و b لهما نفس الإشارة.

1) لدينا $z=1$ أي $a=1$ و $b=0$ منه $x=\pm1$ و $y=\pm0$ و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $z=1$ هما $\zeta_1=-1$ و $\zeta_2=1$.

2) $z=\imath$ أي $a=0$ و $b=1$ منه $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ و $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. بما أنّ $b>0$ فإنّ x و y من نفس الإشارة و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد $\imath$ هما $\zeta_1=\dfrac{1+\imath}{\sqrt{2}}$ و $\zeta_2=\dfrac{-1-\imath}{\sqrt{2}}$.

3) $z=3+4\imath$ أي $a=3$ و $b=4$ منه $x=\pm2$ و $y=\pm1$. لكن $b>0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $3+4\imath$ هما $\zeta_1=2+\imath$ و $\zeta_2=-2-\imath$.

4) $z=8-6\imath$ أي $a=8$ و $b=-6$ منه $x=\pm3$ و $y=\pm1$ و بما أنّ $b<0$ فإنّ x و y من نفس الإشارة إذن فالجذران التربيعيان للعدد $8-6\imath$ هما $\zeta_1=3-\imath$ و $\zeta_2=-3+\imath$.

5) $z=7+24\imath$ أي $a=7$ و $b=24$ منه $x=\pm4$ و $y=\pm3$ و بما أنّ $b>0$ فإنّ x و y من نفس الإشارة و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $7+24\imath$ هما $\zeta_1=4+3\imath$ و $\zeta_2=-4-3\imath$.

6) $z=3-4\imath$ أي $a=3$ و $b=-4$ منه $x=\pm2$ و $y=\pm1$. لكن $b<0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $3-4\imath$ هما $\zeta_1=2-\imath$ و $\zeta_2=-2+\imath$.

يمكن أيضاً ملاحظة أنّ $\overline{3+4\imath}=3-4\imath$ و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $3-4\imath$ هما مرافقا الجذرين التربيعيين للعدد $3+4\imath$.

7) $z=24-10\imath$ أي $a=24$ و $b=-10$ منه $x=\pm5$ و $y=\pm1$ و بما أنّ $b<0$ فإنّ x و y من نفس الإشارة و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $24-10\imath$ هما $\zeta_1=5-\imath$ و $\zeta_2=-5+\imath$.

8) $z=48+14\imath$ أي $a=48$ و $b=14$ منه $x=\pm7$ و $y=\pm1$. لكن $b>0$ إذن x و y لهما نفس الإشارة و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $48+14\imath$ هما $\zeta_1=7+\imath$ و $\zeta_2=-7-\imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

تمرين تدريبي : أعد التمرين دون استعمال الصيغ السابقة للعددين x و y أي مع اتباع الطريقة العامة في كل مرة. ■

89 عيِّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد التالية :

1• $8-6\imath$ 2• $1+\imath\sqrt{3}$ 3• $20-21\imath$ 4• $\dfrac{2\imath-1}{2+\imath}$

الحلّ. 1• لدينا :

$$8-6\imath=9-1-2\times 3\imath=3^2-2\times 3\times\imath+\imath^2=(3-\imath)^2$$

و بالتالي، فالجذران التربيعيان للعدد $8-6\imath$ هما $3-\imath$ و $-3+\imath$.

2• لدينا :

$$1+\imath\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\imath\pi/3}=\left(\sqrt{2}e^{\imath\pi/6}\right)^2=\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath\right)\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $1+\imath\sqrt{3}$ هما $\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3• لدينا :

$$20-21\imath=\frac{1}{2}(40-42\imath)=\frac{1}{2}\left(7^3-2\times 7\times 3\imath+(3\imath)^2\right)=\frac{1}{2}(7-3\imath)^2=\left(\frac{7-3\imath}{\sqrt{2}}\right)^2$$

و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $20-21\imath$ هما $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}-\imath\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ و $-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}+\imath\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

4• لدينا :

$$\frac{2\imath-1}{2+\imath}=\frac{(2\imath-1)(2-\imath)}{2^2+1^2}=\frac{4\imath+2-2+\imath}{5}=\imath=e^{\imath\pi/2}=\left(e^{\imath\pi/4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $\dfrac{2\imath-1}{2+\imath}$ هما $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\imath\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

■

90 z عدد مركب حيث : $z=\dfrac{4}{1+\imath\sqrt{3}}$.

1• عيِّن الطويلة و عمدة للعدد z .

2• أحسب بطريقتين مختلفتين الجذرين التربيعيين للعدد z .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• لدينا :

$$z=\frac{4}{1+\imath\sqrt{3}}=\frac{4\left(1-\imath\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2}=\frac{4-4\imath\sqrt{3}}{4}=1-\imath\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-\imath\pi/3}$$

و بالتالي : $|z|=2$ و $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}\pmod{2\pi}$.

2• **باستخدام الشكل المثلثي** : لدينا $z=\left(\sqrt{2}e^{-\imath\pi/6}\right)^2$ و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد z هما $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/6}$ و $-\sqrt{2}e^{-\imath\pi/6}$ أي $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\imath$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\imath$.

باستخدام الشكل الجبري : ليكن $x+\imath y$ جذراً تربيعيا للعدد z مع $x,y\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$(x+\imath y)^2=z\iff x^2-y^2+2\imath xy=1-\imath\sqrt{3}\iff\begin{cases}x^2-y^2=1\\2xy=-\sqrt{3}\\x^2+y^2=2\end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج : $2x^2=3$ أي $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

نختار $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ مثلاً و نُعوّض في المعادلة الثانية لنجد $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

في الأخير، الجذران التربيعيان للعدد z هما $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\imath$ و $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\imath$.

■

91 θ عدد حقيقي حيث $\theta\in]\pi,2\pi[$ و z عدد مركب حيث : $z=\frac{1-\cos\theta+\imath\sin\theta}{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}$.

1• عيِّن الطويلة و عمدة للعدد z .

2• أحسب الجذرين التربيعيين للعدد z .

الحلّ. 1• لدينا :

$$z=\frac{1-\cos\theta+\imath\sin\theta}{1+\cos\theta-\imath\sin\theta}=\frac{1-e^{-\imath\theta}}{1+e^{-\imath\theta}}=\frac{e^{-\imath\theta/2}\left(e^{\imath\theta/2}-e^{-\imath\theta/2}\right)}{e^{-\imath\theta/2}\left(e^{\imath\theta/2}+e^{-\imath\theta/2}\right)}=\frac{2\imath\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}=\imath\tan\frac{\theta}{2}=e^{\imath\pi/2}\tan\frac{\theta}{2}$$

بما أنّ $\theta\in]\pi,2\pi[$ فإنّ $\frac{\theta}{2}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ و بالتالي $\tan\frac{\theta}{2}<0$ ؛ فحسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنّ :

$$|z|=-\tan\frac{\theta}{2}\quad\text{و}\quad\arg(z)=\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}\pmod{2\pi}\ .$$

2• لدينا :

$$z=-\tan\frac{\theta}{2}e^{3\imath\pi/2}=\left(\sqrt{-\tan\frac{\theta}{2}}e^{3\imath\pi/4}\right)^2=\left(\sqrt{-\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}}\,(-1+\imath)\right)^2$$

إذن فالجذران التربيعيان للعدد z هما $(-1+\imath)\sqrt{-\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}}$ و $(1-\imath)\sqrt{-\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

92 أوجد الجذور التربيعية للعددين التاليين :

1. $7+24\imath$
2. $4ab+2\left(a^2-b^2\right)\imath \quad (a,b\in\mathbb{R})$

الحلّ.

1. ليكن $z=x+\imath y$ جذراً تربيعيا للعدد $7+24\imath$. لدينا :

$$z^2=x^2-y^2+2\imath xy=7+24\imath \iff \begin{cases} x^2+y^2=|7+24\imath|=\sqrt{7^2+24^2}=25 \\ x^2-y^2=7 \\ 2xy=24 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثانية ينتج $2x^2=25+7$ منه $x=\pm 4$. نأخذ مثلاً $x=4$ فيكون من المعادلة الثالثة $y=3$.

إذن الجذرين التربيعيين للعدد $7+24\imath$ هما $4+3\imath$ و $-(4+3\imath)$.

ملاحظة 26 : ◁ من الممكن، في بعض الأحيان، إيجاد جذر تربيعي لعدد مركب دون القيام بكل هذه الحسابات و ذلك بالنظر إلى الجزء التخيلي لهذا العدد. مثلاً : لإيجاد جذر تربيعي للعدد $7+24\imath$، ننظر إلى جزئه التخيلي 24 و نحاول كتابته على شكل ضعف جداء عددين صحيحين (و هذا يُكافئ المعادلة الثالثة السابقة) مع مراعاة الشروط التالية:

- الجزء التخيلي موجب، إذن للعددين نفس الإشارة و بالتالي نختارهما موجبين (أو سالبين) .
- الجزء الحقيقي 7 فردي إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي.
- الجزء الحقيقي 7 موجب إذن الجزء الحقيقي للجذر التربيعي أكبر (بالقيمة المطلقة) من جزئه التخيلي.

في الأخير، نبحث عن عددين موجبين (أو سالبين) x و y بحيث $xy=12$ ، $|x|>|y|$ و أحدهما فردي و الآخر زوجي. لكن $4\times 3=12$ منه $x=4$ و $y=3$. نتحقق بسهولة أنّ $(4+3\imath)^2=7+24\imath$ إذن الجذرين التربيعيين للعدد هما $4+3\imath$ و $-4-3\imath$.

▷

2. **الطريقة الأولى** : ليكن $z=x+\imath y$ جذراً تربيعيا للعدد $4ab+2\imath\left(a^2-b^2\right)$. لدينا :

$$z^2=4ab+2\imath\left(a^2-b^2\right) \iff \begin{cases} x^2+y^2=\left|4ab+2\imath\left(a^2-b^2\right)\right|=2\left(a^2+b^2\right) \\ x^2-y^2=4ab \\ 2xy=2\left(a^2-b^2\right) \end{cases}$$

مع $\left(\left|4ab+2\imath\left(a^2-b^2\right)\right|=\sqrt{16a^2b^2+4\left(a^2-b^2\right)^2}=\sqrt{4a^4+8a^2b^2+4b^4}\right.$

$\left.=2\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}=2\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}=2\left(a^2+b^2\right)\right)$

بجمع المعادلتين الأولى و الثانية ينتج $2x^2=2\left(a^2+b^2\right)+4ab=2(a+b)^2$ منه $x=\pm(a+b)$.

بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى ينتج $2y^2=2\left(a^2+b^2\right)-4ab=2(a-b)^2$ منه $y=\pm(a-b)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

المعادلة الثالثة تُكتب :

$$xy = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = [-(a+b)][-(a-b)]$$

و بالتالي نختار نفس الإشارة (موجبة أو سالبة) بالنسبة للعددين x و y .

إذن الجذرين التربيعيين للعدد $4ab + 2\left(a^2 - b^2\right)\imath$ هما :

$$-(a+b) - \imath(a-b) \qquad \text{و} \qquad (a+b) + \imath(a-b)$$

الطريقة الثانية : لدينا :

$$Z = 4ab + 2\imath\left(a^2 - b^2\right) = 2\imath\left[a^2 - b^2 - 2\imath ab\right] = 2\imath(a - \imath b)^2 = 2\imath\omega^2$$

مع $\omega = a - \imath b$. إذن لإيجاد جذر تربيعي للعدد Z يكفي إيجاد جذر تربيعي للعدد $u = 2\imath = 0 + 2\imath$: نبحث عن عددين صحيحين x و y موجبين — أو سالبين — (لأنّ $\text{Im}(u) > 0$) متساويين (لأنّ $\text{Re}(u) = 0 = x^2 - y^2$) و حاصل ضربهما 1 . نتحقق بسهولة أنّ $x = y = 1$ حل للمسألة منه $2\imath = (1+\imath)^2$ إذن :

$$\begin{aligned} Z &= 4ab + 2\left(a^2 - b^2\right)\imath = 2\imath(a - \imath b)^2 \\ &= (1+\imath)^2(a - \imath b)^2 = ((1+\imath)(a - \imath b))^2 \\ &= ((a+b) + \imath(a-b))^2 \end{aligned}$$

و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد Z هما

$$-(a+b) - \imath(a-b) \qquad \text{و} \qquad (a+b) + \imath(a-b)$$

■

93

- 1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z + |z| = 0$.
- 2. ليكن z عدداً مركبا بحيث $z \notin \mathbb{R}_-$. أثبت أنّ : $2\arg(z + |z|) = \arg(z) \pmod{2\pi}$.
- 3. ليكن z_1 و z_2 عددين مركبين بحيث $z_1 + z_2 \neq 0$ و $|z_1| = |z_2|$.
أثبت أنّ : $\arg(z_1) + \arg(z_2) = 2\arg(z_1 + z_2) \pmod{2\pi}$.

الحلّ. 1. نضع $z = x + \imath y$ حيث $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$z + |z| = 0 \iff x + \imath y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \sqrt{x^2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |x| = -x \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R}_- \\ y = 0 \end{cases} \iff z \in \mathbb{R}_-$$

إذن مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

- 2. حسب السؤال السابق، إذا كان $z \notin \mathbb{R}_-$ فإنّ $z + |z| \neq 0$ ؛ و حسب خواص العمدة، لدينا :

$$2\arg(z + |z|) = \arg(z) \pmod{2\pi} \iff \arg\left((z + |z|)^2\right) = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$\iff \arg\left(\frac{(z + |z|)^2}{z}\right) = 0 \pmod{2\pi} \iff \frac{(z + |z|)^2}{z} \in \mathbb{R}_+^*$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

إذن يكفي إثبات أنّ : $\frac{(z+|z|)^2}{z} \in \mathbb{R}_+^*$. لكن :

$$\frac{(z+|z|)^2}{z} = \frac{z^2+2z|z|+|z|^2}{z} = z+2|z|+\frac{|z|^2}{z} = z+2|z|+\frac{z\bar{z}}{z}$$
$$= z+\bar{z}+2|z| = 2\operatorname{Re}(z)+2|z| = 2(\operatorname{Re}(z)+|z|)$$

و هو عدد حقيقي. لكن $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ لكل $z \in \mathbb{C}$ ، إذن $\frac{(z+|z|)^2}{z} \geq 0$ أي $\frac{(z+|z|)^2}{z} \in \mathbb{R}_+$ و بما أنّ $z \neq 0$

فإنّ $\operatorname{Re}(z)+|z| > 0$ منه $\frac{(z+|z|)^2}{z} > 0$ و هو المطلوب.

• 3 بما أنّ $z_1 z_2 \neq 0$ فإنّ :

$$\arg(z_1)+\arg(z_2) = 2\arg(z_1+z_2) \pmod{2\pi} \iff \arg(z_1 z_2) = \arg\left((z_1+z_2)^2\right) \pmod{2\pi}$$
$$\iff \arg\left(\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}\right) = 0 \pmod{2\pi}$$
$$\iff \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+^*$$

إذن يكفي إثبات أنّ : $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}_+^*$. لكن :

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1^2+2z_1 z_2+z_2^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_2}+2+\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2}+2+\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

و بما أنّ $|z_1| = |z_2|$ فإنّ $|z_1|^2 = |z_1|\cdot|z_2| = |z_1|\cdot|\bar{z}_2|$ منه :

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2}+2 = \frac{z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}}{|z_1|^2}+2$$
$$= \frac{2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+2|z_1|^2}{|z_1|^2} = 2\left[\frac{\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_1||\bar{z}_2|}{|z_1|^2}\right]$$
$$= 2\left[\frac{\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_1\bar{z}_2|}{|z_1|^2}\right]$$

و هو عدد حقيقي.

لكن $-\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ لكل $z \in \mathbb{C}$ ، إذن $\frac{\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_1\bar{z}_2|}{|z_1|^2} \geq 0$ أي $\frac{\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_1\bar{z}_2|}{|z_1|^2} \in \mathbb{R}_+$. و بما أنّ

$z_1+z_2 \neq 0$ فرضاً فإنّ $\frac{\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_1\bar{z}_2|}{|z_1|^2} > 0$ و هو المطلوب.

■

94

• 1 لتكن z_1 ، z_2 ، z_3 الجذور التكعيبية لعدد مركب مُعطى. عبِّر عن z_2 و z_3 بدلالة z_1 .

• 2 أوجد حلول المعادلة $z^6+(7-\imath)z^3-8-8\imath = 0$ ثم أكتبها على الشكل المثلثي و الشكل الأسي.

(إرشاد : ضع $Z = z^3$ و احسب $(9+\imath)^2$).

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• لتكن z_1 ، z_2 و z_3 جذوراً تكعيبية لعدد مركب، **مختلفة مثنى مثنى** . إذن $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3$.

إذا كان $z_1 = 0$ فإنّ $z_2 = z_3 = 0$ و بالتالي فهذه الجذور ليست مختلفة و هذا تناقض ! إذن $z_1 \neq 0$ منه $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^3 = \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^3 = 1$.

الأعداد 1 ، $\frac{z_2}{z_1}$ و $\frac{z_3}{z_1}$ مختلفة مثنى مثنى و مكعباتها تساوي 1 إذن فهي الجذور التكعيبية للوحدة أي الأعداد 1 ، j و j^2 و بالتالي $\frac{z_2}{z_1} = j$ و $\frac{z_3}{z_1} = j^2$ (أو $\frac{z_2}{z_1} = j^2$ و $\frac{z_3}{z_1} = j$ لكن ذلك لا يُغيّر شيئاً) أي $z_2 = jz_1$ و $z_3 = j^2 z_1$.

هذا يعني أنه بمعرفة أحد الجذور التكعيبية لعدد مركب، فإننا نعرف الجذور الأخرى.

2• نتبع الإرشاد : نحسب $(9+\imath)^2 = 81 + 18\imath - 1 = 80 + 18\imath$ و نضع $Z = z^3$ فتصبح المعادلة $Z^2 + (7-\imath)z - 8 - 8\imath = 0$.

مميّز هذه المعادلة هو $\Delta = (7-\imath) - 4(-8-8\imath) = 80 + 18\imath = (9+\imath)^2$ و بالتالي لها حلاّن : $Z_1 = \frac{-7+\imath+9+\imath}{2} = 1+\imath$ و $Z_1 = \frac{-7+\imath-9-\imath}{2} = -8$.

لإتمام الحل، يجب البحث عن الجذور التكعيبية للعددين -8 و $1+\imath$.

لكن $-8 = (-2)^3$ و $1+\imath = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4} = \left(\sqrt[6]{2}e^{\imath\pi/12}\right)^3$ فحسب السؤال السابق، الجذور التكعيبية للعدد -8 هي -2 ، $-2j$ و $-2j^2$ أي -2 ، $-2e^{2\imath\pi/3}$ و $-2e^{4\imath\pi/3}$ و بما أنّ $-1 = e^{\imath\pi}$ فإنّ هذه الجذور هي -2 ، $2e^{5\pi/3}$ و $2e^{7\pi/3}$ أي -2 ، $2e^{-\pi/3}$ و $2e^{\pi/3}$.

الجذور التكعيبية للعدد $1+\imath$ هي $\sqrt[6]{2}e^{\imath\pi/12}$ ، $\sqrt[6]{2}e^{\imath\pi/12}j$ و $\sqrt[6]{2}e^{\imath\pi/12}j^2$ أي $\sqrt[6]{2}e^{\imath\pi/12}$ ، $\sqrt[6]{2}e^{3\imath\pi/4}$ و $\sqrt[6]{2}e^{17\imath\pi/12}$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة هي : $\mathscr{S} = \left\{-2, 2e^{-\pi/3}, 2e^{\pi/3}, \sqrt[6]{2}e^{\imath\pi/12}, \sqrt[6]{2}e^{3\imath\pi/4}, \sqrt[6]{2}e^{17\imath\pi/12}\right\}$.

■

95 أحسب الجذور التكعيبية للعدد $Z = \frac{-1+\imath}{4}$.

الحلّ. نضع $j = e^{2\imath\pi/3}$ و نذكّر أنّ $j^3 = 1$.

نُطبّق نتيجة التمرين السابق (تمرين 94) . لدينا :

$$\frac{1}{4}(-1+\imath) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{-3/2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \imath\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\imath\pi/4}\right)^3$$

إذن الجذور التكعيبية للعدد Z هي :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\imath\pi/4} \quad , \quad z_2 = j\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\imath\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{11\imath\pi/12} \quad , \quad z_3 = j^2\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\imath\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{19\imath\pi/12}$$

■

96 أحسب الجذور التكعيبية للعددين $2-2\imath$ و $11+2\imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. لدينا :

$$2-2\imath=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\imath\sin\frac{\pi}{4}\right)=2^{3/2}e^{-\imath\pi/4}=\left(\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}\right)^3$$

و بالتالي فالجذور التكعيبية للعدد $2-2\imath$ هي $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ ، $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}\mathrm{j}$ و $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}\mathrm{j}^2$ حيث $\mathrm{j}=e^{2\imath\pi/3}$ أي هي الأعداد $\sqrt{2}e^{-\imath\pi/12}$ ، $\sqrt{2}e^{7\imath\pi/12}$ و $-1-\imath=\sqrt{2}e^{5\imath\pi/4}$.

لدينا $|11+2\imath|=5\sqrt{5}$ منه $11+2\imath=5\sqrt{5}\left(\frac{11\sqrt{5}}{25}+\imath\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)$ إذن $\arg(11+2\imath)$ ليست زاوية شهيرة و بالتالي لا نستطيع استعمال الشكل الأسي.

ليكن $x+\imath y$ جذراً تكعيبياً للعدد $11+2\imath$ مع $x,y\in\mathbb{R}$.

لدينا $(x+\imath y)^3=11+2\imath$ أي $x^3-3xy^2+\imath\left(3x^2y-y^3\right)=11+2\imath$ و $|x+\imath y|^3=|11+2\imath|=5\sqrt{5}$ أي $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=5\sqrt{5}=\sqrt{5^3}=\left(\sqrt{5}\right)^3$ و بأخذ الجذر التكعيبي (الحقيقي) للطرفين ينتج $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5}$ أي $x^2+y^2=5$. إذن :

$$\begin{cases} x\left(x^2-3y^2\right)=11\\ y\left(3x^2-y^2\right)=2\\ x^2+y^2=5\end{cases}.$$

من المعادلة الأخيرة نجد $y^2=5-x^2$.

نُعوّض في المعادلة الأولى لنجد $x\left(4x^2-15\right)=11$ أي $4x^3-15x-11=0$.

من المعادلة الأخيرة نجد $x^2=5-y^2$. نُعوّض في المعادلة الثانية لنجد $y\left(15-4y^2\right)=2$ أي $4y^3-15y+2=0$.

نلاحظ أنّ $x=-1$ حلّ للمعادلة $4x^3-15x-11=0$ و أنّ $y=-2$ حلّ للمعادلة $4y^3-15y+2=0$ (أو نستعمل المعادلة الأخيرة مع $x=-1$) و بالتالي $-1-2\imath$ جذر تكعيبي للعدد $11+2\imath$. الجذرين التكعيبيين الآخرين هما :

$$(-1-2\imath)\,\mathrm{j}=\frac{1+2\sqrt{3}}{2}+\imath\frac{2-\sqrt{3}}{2}\qquad\text{و}\qquad(-1-2\imath)\,\mathrm{j}^2=\frac{1-2\sqrt{3}}{2}+\imath\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

مع $\mathrm{j}=e^{2\imath\pi/3}$ (جذر تكعيبي للوحدة).

■

97 عيِّن الجذور التكعيبية للأعداد التالية :

1. $\frac{\imath+\sqrt{3}}{\imath-\sqrt{3}}$
2. $\frac{1+\imath\tan\theta}{1-\imath\tan\theta}$
3. $4\sqrt{2}\,(1+\imath)$

الحلّ. نضع $\mathrm{j}=e^{2\imath\pi/3}$ و نذكّر أنّ $\mathrm{j}^3=1$.

نُطبّق نتيجة التمرين السابق (تمرين 94) .

1. لدينا :

$$\frac{\imath+\sqrt{3}}{\imath-\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath}=\frac{e^{\imath\pi/6}}{e^{5\imath\pi/6}}=e^{\imath\left(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)}=e^{-2\imath\pi/3}=e^{4\imath\pi/3}=\left(e^{4\imath\pi/9}\right)^3$$

و بالتالي فالجذور التكعيبية للعدد $\frac{\imath+\sqrt{3}}{\imath-\sqrt{3}}$ هي الأعداد $e^{4\imath\pi/9}$ ، $\mathrm{j}e^{4\imath\pi/9}$ و $\mathrm{j}^2e^{4\imath\pi/9}$.

2. لدينا :

$$\frac{1+\imath\tan\theta}{1-\imath\tan\theta}=\frac{\cos\theta+\imath\sin\theta}{\cos\theta-\imath\sin\theta}=\frac{e^{\imath\theta}}{e^{-\imath\theta}}=e^{2\imath\theta}=\left(e^{2\imath\theta/3}\right)^3$$

و بالتالي فالجذور التكعيبية للعدد $\frac{1+\imath\tan\theta}{1-\imath\tan\theta}$ هي الأعداد $e^{2\imath\theta/3}$ ، $\mathrm{j}e^{2\imath\theta/3}$ و $\mathrm{j}^2e^{2\imath\theta/3}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3 لدينا :

$$4\sqrt{2}\,(1+\imath)=8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8e^{\imath\pi/4}=\left(2e^{\imath\pi/12}\right)^3$$

و بالتالي فالجذور التكعيبية للعدد $4\sqrt{2}\,(1+\imath)$ هي الأعداد $2e^{\imath\pi/12}$ ، $2je^{\imath\pi/12}$ و $2j^2e^{\imath\pi/12}$. لدينا :

$$2je^{\imath\pi/12}=2e^{\imath\pi/12}e^{2\imath\pi/3}=2e^{\imath\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{3\imath\pi/4}$$
$$2j^2e^{\imath\pi/12}=2e^{\imath\pi/12}e^{4\imath\pi/3}=2e^{\imath\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{17\imath\pi/12}$$

■

98 أحسب الجذور الرابعة للعدد $Z=-119+120\imath$.

الحلّ. نضع $Z=[r,\theta]$. لدينا : $r=\sqrt{(-119)^2+120^2}=\sqrt{28561}=169$ منه $\cos\theta=-\frac{119}{169}$ و $\sin\theta=\frac{120}{169}$ إذن الزاوية θ ليست شهيرة و هذا يعني أنه لا يمكن إستعمال الشكل الأسي للعدد Z لإيجاد جذوره الرابعة لذلك نبحث عن طريقة أخرى. لكن، الجذور الرابعة للعدد Z هي الجذور التربيعية لجذوره التربيعية إذن نبحث أوّلاً عن جذوره التربيعية.

ليكن $z=x+\imath y$ جذراً تربيعياً للعدد Z مع $x,y\in\mathbb{R}$. لدينا : $z^2=Z\iff\begin{cases}x^2-y^2=-119\\2xy=120\\x^2+y^2=169\end{cases}$.

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2=50$ منه $x=\pm25$. لأجل $x=5$ يكون (من المعادلة الثانية) $y=12$ أي $z_1=5+12\imath$ و لأجل $x=-5$ يكون $z_2=-5-12\imath$. لإتمام الحل، يجب البحث عن الجذور التربيعية للعددين z_1 و z_2 ؛ أو يكفي ضرب أحد الجذور التربيعية لهما بالجذور الرابعة للوحدة إذا لاحظنا أنّ $5+12\imath=(3+2\imath)^2$.
الجذور الرابعة للوحدة هي 1 ، -1 ، $\imath$ و $-\imath$. إذن الجذور الرابعة للعدد Z هي $3+2\imath$ ، $-(3+2\imath)$ ، $\imath(3+2\imath)$ و $-\imath(3+2\imath)$ أي الأعداد $3+2\imath$ ، $-3-2\imath$ ، $-2+3\imath$ و $2-3\imath$. ■

99 عيّن الجذور النونية للعدد z في كل حالة من الحالات التالية :

1. $n=4$ و $z=-7-24\imath$
2. $n=4$ و $z=8-8\imath\sqrt{3}$
3. $n=5$ و $z=32\imath$
4. $n=5$ و $z=\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1-\imath\sqrt{3}\right)$
5. $n=6$ و $z=32\left(\imath-\sqrt{3}\right)$
6. $n=6$ و $z=-\imath$

الحلّ. لإيجاد الجذور النونية لعدد مركب يكفي معرفة أحد هذه الجذور النونية و ضربه في الجذور النونية للوحدة.

• 1 نلاحظ أنّ $-24\imath=2\times3\times(-4\imath)$ و $-7=9-16=3^2+(-4\imath)^2$ و بالتالي :

$$-7-24\imath=3^2+2\times3\times(-4\imath)+(-4\imath)^2=(3-4\imath)^2$$

بالمثل، $-4\imath=2\times2\times(-\imath)$ و $3=2^2+(-\imath)^2$ إذن :

$$3-4\imath=2^2+2\times2\times(-\imath)+(-\imath)^2=(2-\imath)^2$$

منه $-7-24\imath=(2-\imath)^4$ و بالتالي فالجذور الرابعة للعدد $-7-24\imath$ هي الأعداد $2-\imath$ ، $-(2-\imath)$ ، $\imath(2-\imath)$ و $-\imath(2-\imath)$ أي الأعداد $2-\imath$ ، $-2+\imath$ ، $1+2\imath$ و $-1-2\imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 2 لدينا :

$$8-8\imath\sqrt{3}=16\left(\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16e^{-\imath\pi/3}=\left(2e^{-\imath\pi/12}\right)^4$$

و بالتالي فالجذور الرابعة للعدد $8-8\imath\sqrt{3}$ هي الأعداد $2e^{-\imath\pi/12}$ ، $-2e^{-\imath\pi/12}$ ، $2\imath e^{-\imath\pi/12}$ و $-2\imath e^{-\imath\pi/12}$ أي الأعداد $2e^{-\imath\pi/12}$ ، $2e^{11\imath\pi/12}$ ، $2e^{5\imath\pi/12}$ و $2e^{-13\imath\pi/12}$.

• 3 نلاحظ أنّ $32\imath=(2\imath)^5$ و بالتالي فالجذور الخامسة للعدد $32\imath$ هي الأعداد $2\imath$ ، $2\imath e^{2\imath\pi/5}$ ، $2\imath e^{4\imath\pi/5}$ ، $2\imath e^{6\imath\pi/5}$ و $2\imath e^{8\imath\pi/5}$ أي الأعداد $2\imath$ ، $2e^{9\imath\pi/10}$ ، $2e^{13\imath\pi/10}$ ، $2e^{17\imath\pi/10}$ و $2e^{21\imath\pi/10}$.

• 4 لدينا :

$$\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1-\imath\sqrt{3}\right)=3^{7/2}e^{-\imath\pi/3}=\left(3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}\right)^5$$

و بالتالي فالجذور الخامسة للعدد $\frac{9\sqrt{3}}{2}\left(1-\imath\sqrt{3}\right)$ هي الأعداد :

$3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}$ ، $3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}e^{2\imath\pi/5}$ ، $3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}e^{4\imath\pi/5}$ ، $3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}e^{6\imath\pi/5}$ و $3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}e^{8\imath\pi/5}$

أي الأعداد $3^{7/10}e^{-\imath\pi/15}$ ، $3^{7/10}e^{\imath\pi/3}$ ، $3^{7/10}e^{11\imath\pi/15}$ ، $3^{7/10}e^{17\imath\pi/15}$ و $3^{7/10}e^{23\imath\pi/15}$.

• 5 لدينا :

$$32\left(\imath-\sqrt{3}\right)=64\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=64e^{5\imath\pi/6}=\left(2e^{5\imath\pi/36}\right)^6$$

و بالتالي فالجذور السادسة للعدد $32\left(\imath-\sqrt{3}\right)$ هي الأعداد :

$2e^{5\imath\pi/36}$ ، $2e^{5\imath\pi/36}e^{2\imath\pi/6}$ ، $2e^{5\imath\pi/36}e^{4\imath\pi/6}$ ، $2e^{5\imath\pi/36}e^{6\imath\pi/6}$ ، $2e^{5\imath\pi/36}e^{8\imath\pi/6}$ و $2e^{5\imath\pi/36}e^{10\imath\pi/6}$

أي الأعداد $2e^{5\imath\pi/36}$ ، $2e^{17\imath\pi/36}$ ، $2e^{29\imath\pi/36}$ ، $2e^{41\imath\pi/36}$ ، $2e^{53\imath\pi/36}$ و $2e^{65\imath\pi/36}$.

• 6 لدينا :

$$-\imath=\imath^3=\left(e^{\imath\pi/2}\right)^3=\left(e^{\imath\pi/4}\right)^6$$

و بالتالي فالجذور السادسة للعدد $-\imath$ هي الأعداد :

$e^{\imath\pi/4}$ ، $e^{\imath\pi/4}e^{2\imath\pi/6}$ ، $e^{\imath\pi/4}e^{4\imath\pi/6}$ ، $e^{\imath\pi/4}e^{6\imath\pi/6}$ ، $e^{\imath\pi/4}e^{8\imath\pi/6}$ و $e^{\imath\pi/4}e^{10\imath\pi/6}$

أي الأعداد $e^{\imath\pi/4}$ ، $e^{7\imath\pi/12}$ ، $e^{11\imath\pi/12}$ ، $e^{5\imath\pi/4}$ ، $e^{19\imath\pi/12}$ و $e^{23\imath\pi/12}$.

■

100 حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلتين التاليتين :

• 1 $z^6=\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}}$ • 2 $z^4=\frac{1-\imath}{1+\imath\sqrt{3}}$

الحلّ. • 1 لدينا :

$$\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1-\imath\sqrt{3}}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{e^{\imath\pi/3}}{e^{-\imath\pi/3}}=e^{\imath\pi/3}\cdot e^{\imath\pi/3}=e^{2\imath\pi/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي، فحسب الصيغة العامة للجذور النونية (صفحة 35)، يكون :

$$\begin{aligned} z_k &= \cos\left(\frac{2\pi/3}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right)+\imath\sin\left(\frac{2\pi/3}{6}+\frac{2k\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)+\imath\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\right)\ , \quad 0\leq k\leq 5\ . \end{aligned}$$

• 2. لدينا :

$$\begin{aligned} \frac{1-\imath}{1+\imath\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{e^{-\imath\pi/4}}{e^{\imath\pi/3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\imath\pi/4}\cdot e^{-\imath\pi/3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-7\imath\pi/12} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{2\imath\pi-\frac{7\imath\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{17\imath\pi/12} \end{aligned}$$

و بالتالي، فحسب الصيغة العامة للجذور النونية (صفحة 35)، يكون :

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos\left(\frac{17\pi/12}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(\frac{17\pi/12}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\cos\left(\frac{17\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}\right)+\imath\sin\left(\frac{17\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}\right)\ , \quad 0\leq k\leq 3\ . \end{aligned}$$

■

101 أوجد الجذور السابعة للعدد $\imath$ و الجذور الثامنة للعدد $\dfrac{-32}{1+\imath\sqrt{3}}$.

الحلّ. بما أنّ $\imath = e^{\imath\pi/2}$ فإنّ الجذور السابعة للعدد $\imath$ هي الأعداد $e^{\imath\left(\frac{2\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}\right)}$ أي الأعداد : $e^{2\imath(k+1)\pi/7}$ مع $k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$.

من جهة أخرى :

$$\frac{-32}{1+\imath\sqrt{3}} = \frac{-16}{e^{\imath\pi/3}} = -16e^{-\imath\pi/3} = 16e^{-\imath\frac{\pi}{3}+\imath\pi} = 16e^{2\imath\pi/3}$$

إذن الجذور الثامنة للعدد $\dfrac{-32}{1+\imath\sqrt{3}}$ هي الأعداد $\sqrt[8]{16}e^{\imath\left(\frac{2\pi}{8}+\frac{2k\pi}{8}\right)}$ أي الأعداد : $\sqrt{2}e^{\imath(k+1)\pi/4)}$ مع $k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

■

102 حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)\cdot\left(z^2-3\imath z+4\right)=0$.
نسمي A ، B و C صور حلول هذه المعادلة. أنشئ النقط A ، B ، C ثمّ أثبت أنّ المثلث ABC قائم.

الحلّ. لدينا :

$$(z-2)\cdot\left(z^2-3\imath z+4\right)=0 \iff z-2=0 \quad \text{أو} \quad z^2-3\imath z+4=0$$

• للمعادلة $z-2$ حلّ وحيد هو $z_0=2$.

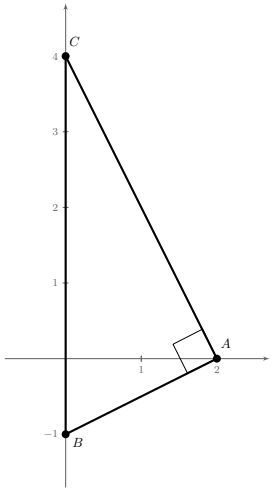
http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• مُمَيِّز المعادلة $z^2 - 3\imath z + 4 = 0$ هو :

$$\Delta = (-3\imath)^2 - 4 \times 4 = -9 - 16 = -25 = (5\imath)^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما $z_1 = \dfrac{3\imath - 5\imath}{2} = -\imath$ و $z_2 = \dfrac{3\imath + 5\imath}{2} = 4\imath$.

إذن، للمعادلة ثلاثة حلول هي 2 ، $-\imath$ و $4\imath$.



نضع $A(2)$ ، $B(-\imath)$ و $C(4\imath)$. لدينا :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4\imath - 2}{-\imath - 2} = \frac{(2 - 4\imath)(2 - \imath)}{2^2 + 1^2} = \frac{4 - 2\imath - 8\imath - 4}{5} = -2\imath$$

و هو عدد تخيلي صِرف.

حسب اللازمة 1 صفحة 53 ، فالمستقيمان (AC) و (AB) متعامدان أي أنّ المثلث ABC قائم عند الرأس A .

■

103 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{C}$ بالعبارة $f(z) = z^3 - 2\left(\sqrt{3} + \imath\right)z^2 + 4\left(1 + \imath\sqrt{3}\right)z - 8\imath$.

1• تحقق من أنّ $f(z) = (z - 2\imath)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$.

2• حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $f(z) = 0$. أكتب الحلول z_1 ، z_2 و z_3 على الشكلين الجبري و الأسي.

3• مثّل في المستوي المركب النقط M_1 ، M_2 و M_3 صور الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 على الترتيب ثم أثبت أنها تقع على دائرة مركزها O .

4• ما هي طبيعة الرباعي $OM_1M_2M_3$ ؟

الحلّ. 1• لدينا :

$$f(2\imath) = (2\imath)^3 - 2\left(\sqrt{3} + \imath\right)(2\imath)^2 + 4\left(1 + \imath\sqrt{3}\right)(2\imath) - 8\imath$$
$$= -8\imath + 8\left(\sqrt{3} + \imath\right) + 8\left(1 + \imath\sqrt{3}\right) - 8\imath = 0$$

و بالتالي $f(z)$ يقبل القسمة على $z - 2\imath$. نكتب :

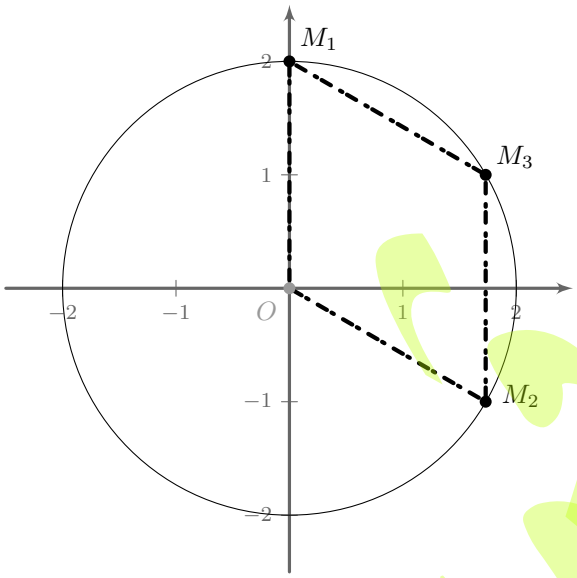
$$f(z) = (z - 2\imath)\left(az^2 + bz + c\right) = az^3 + (b - 2a\imath)z^2 + (c - 2b\imath)z - 2c\imath$$

بالمطابقة ينتج : $a = 1$ ، $b - 2a\imath = -2\left(\sqrt{3} + \imath\right)$ ، $c - 2b\imath = 4\left(1 + \imath\sqrt{3}\right)$ و $-2c\imath = -8\imath$ أي $a = 1$ ، $b = -2\sqrt{3}$ و $c = 4$.

إذن : $f(z) = (z - 2\imath)\left(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4\right)$.

2• $f(z) = 0$ إذا و فقط إذا كان $z - 2\imath = 0$ أو $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.12

- للمعادلة الأولى حل وحيد هو $z_1 = 2\imath$ ؛
- المُميِّز المختصر للمعادلة الثانية هو $\Delta' = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 = -1 = \imath^2$ و بالتالي لها حلاّن هما $z_2 = \sqrt{3} - \imath$ و $z_3 = \sqrt{3} + \imath$.

الشكل الأسي لهذه الحلول هو :

$$z_1 = 2\imath = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \imath\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\imath\pi/2}$$
$$z_2 = \sqrt{3} - \imath = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\frac{1}{2}\imath\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - \imath\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{-\imath\pi/6}$$
$$z_2 = \sqrt{3} + \imath = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{1}{2}\imath\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \imath\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\imath\pi/6}$$

3• أنظر الشكل VI.12 . لدينا :

$$OM_1 = |z_1 - 0| = |z_1| = 2$$
$$OM_2 = |z_2 - 0| = |z_2| = 2$$
$$OM_3 = |z_3 - 0| = |z_3| = 2$$

أي $OM_1 = OM_2 = OM_3$ إذن النقط M_1 ، M_2 و M_3 تقع على دائرة مركزها O (و نصف قطرها 2) .

4• لدينا : $\widehat{M_2OM_3} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ و بما أنّ $OM_2 = OM_3$ فالمثلث OM_2M_3 متقايس الأضلاع أي $M_2M_3 = OM_2 = OM_3$.

بالمثل، $\widehat{M_3OM_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ مع $OM_2 = OM_3$ و بالتالي فالمثلث OM_1M_3 متقايس الأضلاع منه $M_1M_3 = OM_1 = OM_3$.

في الأخير، أضلاع الرباعي $OM_1M_2M_3$ كلها متقايسة إذن فهو معيّن (أو مربّع) .

لكن $\widehat{M_2OM_1} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) > \frac{\pi}{2}$ إذن $OM_1M_2M_3$ معيّن و ليس مربّع (و بالتالي قُطراه OM_3 و M_1M_2 متعامدان) .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

104 حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات التالية :

1. $z^2+18z+1681=0$
2. $z^2+6z+25=0$
3. $z^2-2z+4=0$
4. $z^2-(5+3\imath)z+7\imath+4=0$
5. $z^2+(9\imath-5)z-14-23\imath=0$
6. $(4-3\imath)z^2-(10+5\imath)z+6\imath=0$
7. $z^2-(1+2\imath)z+3(1+\imath)=0$
8. $z^2-(3+2\imath)z+5+\imath=0$
9. $z^2-4(6+\imath)z+3(63+16\imath)=0$
10. $\imath z^2-2z-4\imath-4=0$
11. $z^2-4(6+\imath)z+3(8\imath-1)=0$
12. $z^2+(10\imath-7)z-11-41\imath=0$
13. $\imath z^2+(4\imath-3)z+\imath-5=0$
14. $\imath z^2+(1+\imath)z+1=0$
15. $z^2+2(1-\imath)z-1=0$
16. $z^2-2\imath z-1+2\imath=0$

الحلّ. 1. مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta=18^2-4\times1681=-6400=(80\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2=\frac{-1+40\imath}{2}=-9+40\imath \quad \text{و} \quad z_1=\frac{-18-80\imath}{2}=-9-40\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}=\{-9-40\imath,-9+40\imath\}$.

2. المُميِّز المختصر للمعادلة هو :

$$\Delta'=3^2-25=-16=(4\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2=-3+4\imath \quad \text{و} \quad z_1=-3-4\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}=\{-3-4\imath,-3+4\imath\}$.

3. المُميِّز المختصر للمعادلة هو :

$$\Delta'=(-1)^2-4=-3=\left(\imath\sqrt{3}\right)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2=1+\sqrt{3}\imath \quad \text{و} \quad z_1=1-\sqrt{3}\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}=\left\{1-\sqrt{3}\imath,1+\sqrt{3}\imath\right\}$.

4. مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta=(-(5+3\imath))^2-4(4+7\imath)=2\imath=2e^{\imath\pi/2}=\left(\sqrt{2}e^{\imath\pi/4}\right)^2=\left(\sqrt{2}\frac{1+\imath}{\sqrt{2}}\right)^2=(1+\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2=\frac{5+3\imath+1+\imath}{2}=3+2\imath \quad \text{و} \quad z_1=\frac{5+3\imath-1-\imath}{2}=2+\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}=\{2+\imath,3+2\imath\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 5 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (-5+9\imath)^2 - 4(-14-23\imath) = 2\imath = (1+\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{5-9\imath+1+\imath}{2} = 3-4\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{5-9\imath-1-\imath}{2} = 2-5\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{2-5\imath, 3-4\imath\}$.

• 6 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (-(10+5\imath))^2 - 4(4-3\imath)(6\imath) = 3+4\imath = 2^2 + 2\times 2\times\imath + \imath^2 = (2+\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{10+5\imath+2+\imath}{2(4-3\imath)} = \frac{3+6\imath}{5} \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{10+5\imath-2-\imath}{2(4-3\imath)} = \frac{2+4\imath}{5}$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \left\{\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\imath, \frac{3}{5}+\frac{6}{5}\imath\right\}$.

• 7 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (-(1+2\imath))^2 - 4\times 3(1+\imath) = -15-8\imath = 1^2 - 2\times 4\imath + (4\imath)^2 = (1-4\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{1+2\imath+1-4\imath}{2} = 1-\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{1+2\imath-1+4\imath}{2} = 3\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{3\imath, 1-\imath\}$.

• 8 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (3+2\imath)^2 - 4(5+\imath) = 15-8\imath = 1^2 + 2\times 4\imath + (4\imath)^2 = (1+4\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{3+2\imath+1+4\imath}{2} = 2+3\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{3+2\imath-1-4\imath}{2} = 1-\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{1-\imath, 2+3\imath\}$.

• 9 المُميِّز المختصر للمعادلة هو :

$$\Delta = (-2(6+\imath))^2 - 3(63+16\imath) = -49 = (7\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = 2(6+\imath) + 7\imath = 12+9\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = 2(6+\imath) - 7\imath = 12-5\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{12-5\imath, 12+9\imath\}$.

• 10 المُميِّز المختصر للمعادلة هو :

$$\Delta = (-1)^2 - \imath(-4-4\imath) = -3+4\imath = 1^2 + 2\times 2\imath + (2\imath)^2 = (1+2\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{1+1+2\imath}{\imath} = 2-2\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{1-1-2\imath}{\imath} = -2$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{-2, 2-2\imath\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 11 المُميِّز المختصر للمعادلة هو :

$$\Delta = (-2(6+\imath))^2 - 3(-1+8\imath) = 143+24\imath = 12^2 + 2\times 12\times\imath + \imath^2 = (12+\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = 2(6+\imath)+12+\imath = 24+3\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = 2(6+\imath)-12-\imath = \imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{\imath, 24+3\imath\}$.

• 12 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (-7+10\imath)^2 - 4(-11-41\imath) = -7+24\imath = 3^2 + 2\times 3\times 4\imath + (4\imath)^2 = (3+4\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{7-10\imath+3+4\imath}{2} = 5-3\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{7-10\imath-3-4\imath}{2} = 2-7\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{2-7\imath, 5-3\imath\}$.

• 13 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (-3+4\imath)^2 - 4\imath(-5+\imath) = -3-4\imath = 1^2 - 2\times 2\imath + (2\imath)^2 = (1-2\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{3-4\imath+1-2\imath}{2\imath} = -3-2\imath \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{3-4\imath-1+2\imath}{2\imath} = -1-\imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{-1-\imath, -3-2\imath\}$.

• 14 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = (1+\imath)^2 - 4\times\imath\times 1 = 1+2\imath+\imath^2-4\imath = 1-2\imath+\imath^2 = (1-\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_2 = \frac{-(1+\imath)+(1-\imath)}{2\imath} = -1 \qquad \text{و} \qquad z_1 = \frac{-(1+\imath)-(1-\imath)}{2\imath} = \imath$$

أي مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \{-1, \imath\}$.

• 15 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta = 4(1-\imath)^2 - 4\times 1\times(-1) = 4\left(1-2\imath-\imath^2+1\right) = 4(1-2\imath) = 4\Delta'$$

حيث $\Delta' = 1-2\imath$. ليكن $\delta = x+\imath y$ جذراً تربيعياً للعدد Δ' . لدينا $\delta^2 = \Delta'$ منه :

$$\delta^2 = \Delta' \iff \begin{cases} x^2-y^2 = 1 \\ 2xy = -2 \\ x^2+y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 = 1+\sqrt{5} \\ xy = -1 \\ x^2+y^2 = \sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = a \\ xy = -1 \\ y^2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = b \end{cases}$$

نختار x و y بحيث يكون $xy < 0$ ؛ مثلاً $x = -\sqrt{a}$ و $y = \sqrt{b}$ و بالتالي :

$$\Delta = 4\Delta' = 4\delta^2 = 4\left(-\sqrt{a}+\imath\sqrt{b}\right)^2 = \left[2\left(-\sqrt{a}+\imath\sqrt{b}\right)\right]^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$z_1 = \frac{-2(1-\imath)-2\left(-\sqrt{a}+\imath\sqrt{b}\right)}{2} = -1+\imath+\sqrt{a}-\imath\sqrt{b} = -1-\frac{\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}}{2}+\left(1+\frac{\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}}{2}\right)\imath$$

$$z_2 = \frac{-2(1-\imath)+2\left(-\sqrt{a}+\imath\sqrt{b}\right)}{2} = -1+\imath-\sqrt{a}+\imath\sqrt{b} = -1+\frac{\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}}{2}\right)\imath$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منه مجموعة الحلول : $\mathscr{S} = \left\{-1 - \frac{\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}}{2}\right)\imath, -1 + \frac{\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{2}}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{2}}}{2}\right)\imath\right\}$.

16• لدينا : $\Delta = (-2\imath)^2 - 4(-1+2\imath) - 4 + 4 - 8\imath = -8\imath$. لنبحث عن جذر تربيعي $\delta = a + \imath b$ للعدد Δ أي بحيث $\delta^2 = \Delta = -8\imath$. هذا العدد يُحقق : $\begin{cases} a^2 + b^2 = |\Delta| = 8 \\ a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -8 \end{cases}$.

من المعادلة الثانية ينتج $b^2 = a^2$ و بالتعويض في الأولى نجد $2a^2 = 8$ منه $a = \pm 2$. نختار مثلاً $a = 2$ فيكون (من المعادلة الثالثة) $b = -2$.

أخيراً : $z_1 = \frac{2\imath - 2 + 2\imath}{2} = -1 + 2\imath$ و $z_2 = \frac{2\imath + 2 - 2\imath}{2} = 1$.

مجموعة حلول المعادلة الأولى هي : $S = \{1, -1 + 2\imath\}$.

■

105

1• أوجد الجذرين التربيعيين المركبين للعدد $5 - 12\imath$.

2• حل المعادلة $z^3 - (1+2\imath)z^2 + 3(1+\imath)z - 10(1+\imath) = 0$ علماً أنّ لها حلاً تخيليا صرفا.

3• ما هي طبيعة المثلث الذي لواحق رؤوسه هي حلول المعادلة السابقة ؟

الحلّ. 1• ليكن u جذرا تربيعيا للعدد $5 - 12\imath$. نضع $u = a + \imath b$ منه :

$$u^2 = 5 - 12\imath \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = |5 - 12\imath| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \\ a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -12 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثانية ينتج $2a^2 = 13 + 5 = 18$ منه $a = \pm 3$. نختار مثلاً $a = 3$ فيكون (من المعادلة الثالثة) $b = -2$. أخيراً : $u_1 = -3 + 2\imath$ و $u_2 = 3 - 2\imath$.

إذن الجذرين التربيعيين للعدد $5 - 12\imath$ هما $u_1 = -3 + 2\imath$ و $u_2 = 3 - 2\imath$.

2• نضع $P(z) = z^3 - (1+2\imath)z^2 + 3(1+\imath)z - 10(1+\imath)$. ليكن $z_0 = \imath\alpha$ ، مع $\alpha \in \mathbb{R}$ ، الحل التخيلي الصرف للمعادلة $P(z) = 0$. لدينا :

$$\begin{aligned} P(\imath\alpha) = 0 &\iff (\imath\alpha)^3 - (1+2\imath)(\imath\alpha)^2 + 3(1+\imath)(\imath\alpha) - 10(1+\imath) = 0 \\ &\iff -\imath\alpha^3 + (1+2\imath)\alpha^2 + 3(-1+\imath)\alpha - 10(1+\imath) = 0 \\ &\iff (\alpha^2 - 3\alpha - 10) + \imath(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10) = 0 \\ &\iff \alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0 \quad \text{و} \quad -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha - 10 = 0 \end{aligned}$$

للمعادلة $\alpha^2 - 3\alpha - 10 = 0$ حلان هما $\alpha = -2$ و $\alpha = 5$ لكن $\alpha = -2$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الأخرى، إذن $z_0 = -2\imath$ هو الحل التخيلي الصرف للمعادلة $P(z) = 0$.

نستنتج أنّ $P(z)$ يقبل القسمة على $z + 2\imath$. بالقسمة الإقليدية (أو بطريقة أخرى) نجد

$P(z) = (z + 2\imath)(z^2 - (1+4\imath)z - 5 + 5\imath)$.

الحلول الأخرى هي حلول المعادلة $z^2 - (1+4\imath)z - 5 + 5\imath = 0$.

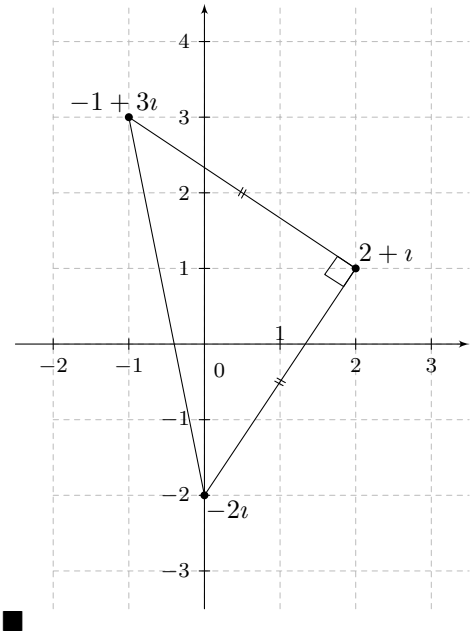
http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

لدينا : $\Delta = (-1-4\imath)^2 - 4\times 1\times(-5+5\imath) = 5-12\imath$ و حسب السؤال السابق فإنّ أحد جذريه التربيعيين هو $3-2\imath$ منه $z_1 = \dfrac{1+4\imath-3+2\imath}{2} = -1+3\imath$ و $z_2 = \dfrac{1+4\imath+3-2\imath}{2} = 2+\imath$.

أخيراً، مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $S = \{-2\imath, -1+3\imath, 2+\imath\}$.

• 3



هنا، من الأفضل الإستعانة برسم.

نلاحظ على الشكل جانبه أنّ المثلث المدروس قائم عند الرأس الذي لاحقته $2+\imath$ و متساوي الساقين.

لنثبت ذلك. نضع $a = -2\imath$ ، $b = -1+3\imath$ و $c = 2+\imath$.

لدينا : $c-b = 2+\imath+1-3\imath = 3-2\imath$ ،

$c-a = 2+\imath+2\imath = 2+3\imath$

و $b-a = -1+3\imath+2\imath = -1+5\imath$ منه

$|c-b| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$ ،

$|c-a| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

و $|b-a| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}$ أي أنّ :

$|c-b| = |c-a|$ و $|c-b|^2 + |c-a|^2 = |b-a|^2$

إذن هذا المثلث قائم و متساوي الساقين.

■

106

لتكن a ، b و c ثلاثة أعداد مركبة. نضع $j = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\imath$ و $u = \left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right)$.

• 1. أكتب على الشكل الجبري الأعداد : j^2 ، j^3 و $1+j+j^2$.

• 2. أثبت أنّ : $u = a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)$.

• 3. بيّن أنّ : $a^3+b^3+c^3-3abc = u(a+b+c)$.

• 4. إستنتج حلول المعادلة $z^3-3\alpha\beta z+\alpha^3+\beta^3 = 0$ في $\mathbb{C}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{C})$.

الحلّ.

• 1. لدينا (يمكن إستعمال الشكل الأسي $j = e^{2\imath\pi/3}$ لإجراء الحسابات) :

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)^2 = \frac{1}{4}-2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)-\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath = \bar{j}$$

$$j^3 = j^2\times j = \bar{j}\times j = |j|^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$$

$$1+j+j^2 = 1+j+\bar{j} = 1+2\,\mathrm{Re}(j) = 1+2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

يمكن أيضاً ملاحظة أنّ : $1+j+j^2 = \dfrac{1-j^3}{1-j} = 0$ لأنّ $j^3 = 1$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

2• لدينا (نُذكِّر أنّ $j^4 = j \cdot j^3 = j$ و $j + j^2 = -1$) :

$$\begin{aligned}\left(a+bj+cj^2\right)\left(a+bj^2+cj\right) &= a^2+abj^2+acj+abj+b^2j^3+bcj^2+acj^2+bcj^4+c^2j^3\\ &= a^2+b^2+c^2+(ab+ac+bc)\,j+(ab+ac+bc)\,j^2\\ &= a^2+b^2+c^2+(ab+ac+bc)\left(j+j^2\right)\\ &= a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

3• لدينا :

$$\begin{aligned}u\,(a+b+c) &= \left[a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)\right](a+b+c)\\ &= a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-a^2c+b^3+bc^2-ab^2-abc-abc+c^3-b^2c-bc^2\\ &= a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

4• حسب السؤال السابق (بأخذ $a = z$ ، $b = \alpha$ و $c = \beta$) يكون :

$$\begin{aligned}z^3-3\alpha\beta z+\alpha^3+\beta^3=0 &\iff (z+\alpha+\beta)\left(z+\alpha j+\beta j^2\right)\left(z+\alpha j^2+\beta j\right)=0\\ &\iff z+\alpha+\beta=0 \quad \text{أو} \quad z+\alpha j+\beta j^2=0 \quad \text{أو} \quad z+\alpha j^2+\beta j=0\\ &\iff z=-\alpha-\beta \quad \text{أو} \quad z=-\alpha j-\beta j^2 \quad \text{أو} \quad z=-\alpha j^2-\beta j\end{aligned}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة المقترحة هي : $\mathscr{S}=\left\{-\alpha-\beta,-\alpha j-\beta j^2,-\alpha j^2-\beta j\right\}$.

■

107 حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات التالية :

1• $z^4+1=0$ 2• $z^4+16=0$ 3• $z^4+z^2+1=0$ 4• $(z+1)^4+(z+2)^2=0$

5• $(z-\imath)^3=\imath\,(z+\imath)^3$ 6• $(z+1)^2+\imath\left(z^2+z\right)^2=0$ 7• $z^4-(5-14\imath)\,z^2-2\,(5\imath+12)=0$ 8• $z^6-(1-\imath)\,z^3-\imath=0$

الحلّ. 1• يمكن حلّ المعادلة بإيجاد الجذور الرابعة للعدد -1 ، أو كما يلي :

نلاحظ أنّ $(1+\imath)^2=2\imath$ منه $(1-\imath)^2=\imath^2\,(1+\imath)^2=-2\imath$ و بالتالي :

$$\begin{aligned}z^2+1=0 &\iff z^4-\imath^2=0 \iff (z^2-\imath)\,(z^2+\imath)=0\\ &\iff \left[z^2-\left(\frac{1+\imath}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{1-\imath}{\sqrt{2}}\right)^2\right]=0\\ &\iff \left(z-\frac{\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}}{2}\right)\left(z-\frac{\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}}{2}\right)\left(z+\frac{\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}}{2}\right)=0\\ &\iff z=\pm\frac{\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}}{2}=\pm e^{\imath\pi/4} \quad \text{أو} \quad z=\pm\frac{\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}}{2}=\pm e^{3\imath\pi/4}\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

إذن مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_1 = \left\{\frac{\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}}{2}\right\}$.

• 2. يمكن حلّ المعادلة بإيجاد الجذور الرابعة للعدد -16 ، أو كما يلي (باستعمال النتيجة السابقة) :

$$z^4+16=0 \iff \frac{z^4}{16}+1=0 \iff \left(\frac{z}{2}\right)^4+1=0 \iff \frac{z}{2}\in\mathscr{S}_1$$

إذن مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_2 = \left\{\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}, -\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}, \sqrt{2}-\imath\sqrt{2}, -\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}\right\}$.

• 3. هذه المعادلة مضاعفة التربيع. لحلّها، نضع $Z=z^2$ فتصبح المعادلة : $Z^2+Z+1=0$. لهذه الأخيرة حلاّن هما j و j^2 (الجذور التكعيبية غير الحقيقية للوحدة) و بالتالي : $\mathrm{j}^2 = \mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\imath\pi/3} = \left(\mathrm{e}^{\imath\pi/3}\right)^2$ منه $z^2=\mathrm{j}=\mathrm{e}^{2\imath\pi/3}$ أي $z=\pm\mathrm{e}^{\imath\pi/3}$ ؛

$$z=\pm\left(\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

أو $z^2=\mathrm{j}^2$ منه $z=\pm\mathrm{j}$ أي $z=\pm\left(-\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_3 = \left\{\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\imath\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-\imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

• 4. لدينا :

$$\begin{aligned}(z+1)^4+(z+2)^2=0 &\iff (z+1)^4=-(z+2)^2\\ &\iff (z+1)^4=\imath^2(z+2)^2\\ &\iff \left((z+1)^2\right)^2=(\imath(z+2))^2\\ &\iff (z+1)^2=\pm(\imath(z+2))\end{aligned}$$

و بالتالي :

• إمّا $(z+1)^2=\imath(z+2)$ أي $z^2+(2-\imath)z+1-2\imath=0$.

المميّز هو $\Delta=(2-\imath)^2-4(1-2\imath)=-1+4\imath$.

باستعمال الطريقة الجبرية نجد أنّ $\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2}$ جذر تربيعي للعدد Δ منه الحلاّن :

$$z_1=\frac{-2+\imath-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2}}{2}=\frac{-4-\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}+\imath\frac{4-\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}$$
$$z_2=\frac{-2+\imath+\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2}}{2}=\frac{-4+\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}+\imath\frac{4+\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}$$

• أو $(z+1)^2=-\imath(z+2)$ أي $z^2+(2+\imath)z+1+2\imath=0$.

المميّز هو $\Delta=(2+\imath)^2-4(1+2\imath)=-1-4\imath$.

بالمثل، نجد أنّ $\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2}$ جذر تربيعي للعدد Δ منه الحلاّن :

$$z_3=\frac{-2-\imath-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2}}{2}=\frac{-4-\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}+\imath\frac{4+\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}$$
$$z_4=\frac{-2-\imath+\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2+2\sqrt{17}}}{2}}{2}=\frac{-4+\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}+\imath\frac{4-\sqrt{-2+2\sqrt{17}}}{4}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_4 = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

• 5 بما أنّ $z = -\imath$ ليس حلاً للمعادلة فإنّ :

$$\begin{aligned}
(z-\imath)^3 = \imath(z+\imath)^3 &\iff \left(\frac{z-\imath}{z+\imath}\right)^3 = \imath \\
&\iff \left(\frac{z-\imath}{z+\imath}\right)^3 = (-\imath)^3 \\
&\iff \frac{z-\imath}{z+\imath} = -\imath \quad \text{أو} \quad \frac{z-\imath}{z+\imath} = -\jmath\imath \quad \text{أو} \quad \frac{z-\imath}{z+\imath} = -\jmath^2\imath \\
&\iff z = -\frac{-\imath+1}{-\imath-1}\imath \quad \text{أو} \quad z = -\frac{-\jmath\imath+1}{-\jmath\imath-1}\imath \quad \text{أو} \quad z = -\frac{-\jmath^2\imath+1}{-\jmath^2\imath-1}\imath \\
&\iff z = 1 \quad \text{أو} \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\sqrt{3}-2 \quad \text{أو} \quad z = -\frac{1}{\sqrt{3}+2} = \sqrt{3}-2
\end{aligned}$$

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_5 = \left\{1, -\sqrt{3}-2, \sqrt{3}-2\right\}$.

• 6 لدينا :

$$\begin{aligned}
(z+1)^2 + \imath\left(z^2+z\right)^2 = 0 &\iff \left(z^2+z\right)^2 = -\frac{1}{\imath}(z+1)^2 \\
&\iff \left(z^2+z\right)^2 = \imath(z+1)^2 = e^{\imath\pi/2}(z+1)^2 \\
&\iff \left(z^2+z\right)^2 = \left(e^{\imath\pi/4}(z+1)\right)^2 \\
&\iff z^2+z = e^{\imath\pi/4}(z+1) \quad \text{أو} \quad z^2+z = -e^{\imath\pi/4}(z+1) \\
&\iff z = -1 \quad \text{أو} \quad z = e^{\imath\pi/4} \quad \text{أو} \quad z = -1 \quad \text{أو} \quad z = -e^{\imath\pi/4} \\
&\iff z = -1 \quad \text{أو} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{أو} \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_6 = \left\{-1, \frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

ملاحظة 27 : ◁ للمعادلة 4 حلول لأنّ الحل $z = -1$ مُضاعف.

يمكن أيضاً حلّ المعادلة بملاحظة أنها تُكافئ : $(z+1)^2\left[1+\imath z^2\right] = 0$. ▷

• 7 هذه المعادلة مضاعفة التربيع. لحلّها، نضع $Z = z^2$ فتصبح المعادلة : $Z^2 - (5-14\imath)Z - 2(5\imath+12) = 0$. المميّز هو :

$$\Delta = (-(5-14\imath))^2 - 4(-2(5\imath+12)) = -75-100\imath$$

لنبحث عن جذر تربيعي $\delta = a+\imath b$ للعدد Δ أي بحيث $\delta^2 = \Delta = -75-100\imath$.

هذا العدد يُحقق : $\begin{cases} a^2+b^2 = |\Delta| = \sqrt{100^2+75^2} = 125 \\ a^2-b^2 = -75 \\ 2ab = -100 \end{cases}$.

بجمع المعادلتين الأولى و الثانية ينتج $2a^2 = 125-75 = 50$ منه $a = \pm 5$. نختار مثلاً $a = 5$ فيكون (من المعادلة الثالثة) $b = -10$.

و بالتالي للمعادلة حلاّن هما :

$$Z_1 = \frac{5-14\imath-5+10\imath}{2} = -2\imath \quad , \quad Z_2 = \frac{5-14\imath+5-10\imath}{2} = 5-12\imath$$

الآن نحل المعادلتين $z^2 = -2\imath$ و $z^2 = 5-12\imath$. لهذا الغرض، نضع $z = a+\imath b$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

•
$$z^2=-2\imath \iff \begin{cases} a^2+b^2=|-2\imath|=2 \\ a^2-b^2=0 \\ 2ab=-2 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية ينتج $a^2=b^2$ و بالتعويض في الأولى نجد $2a^2=2$ منه $a=\pm 1$. نختار مثلاً $a=1$ فيكون (من المعادلة الثالثة) $b=-1$. أخيراً : $z_1=-1+\imath$ و $z_2=1-\imath$.

•
$$z^2=5-12\imath \iff \begin{cases} a^2+b^2=|5-12\imath|=\sqrt{5^2+12^2}=13 \\ a^2-b^2=5 \\ 2ab=-12 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثانية ينتج $2a^2=13+5=18$ منه $a=\pm 3$. نختار مثلاً $a=3$ فيكون (من المعادلة الثالثة) $b=-2$. أخيراً : $z_3=-3+2\imath$ و $z_4=3-2\imath$.

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_7=\{1-\imath,-1+\imath,3-2\imath,-3+2\imath\}$.

•8 نضع $Z=z^3$ فتصبح المعادلة : $Z^2-(1-\imath)Z-\imath=0$. المميّز هو :
$$\Delta=(-(1-\imath))^2+4\imath=2\imath=(1+\imath)^2$$
و بالتالي الحلّان :
$$Z_1=\frac{1-\imath-1-\imath}{2}=-\imath=(\imath)^3 \quad , \quad Z_2=\frac{1-\imath+1+\imath}{2}=1$$

منه : $z=\imath$ أو $z=\jmath\imath=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath$ أو $z=\jmath^2\imath=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath$

أو $z=1$ أو $z=\jmath=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath$ أو $z=\jmath^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath$.

في الأخير، مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S}_8=\left\{1,\imath,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath\right\}$.

■

108 حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية، حيث z هو المجهول و θ عدد حقيقي ثابت :

1• $z^2+z+1=0$

2• $2z^2+2z+1=0$

3• $z^2-2z\cos\theta+1=0$

4• $z^2-2z+\sin^2\theta=0$

5• $z^2-(6+\imath)z+(11+13\imath)=0$

6• $2z^2-(7+3\imath)z+(2+4\imath)=0$

الحلّ. 1• مُميِّز المعادلة هو $\Delta=(-1)^2-4\times 1=-3=\left(\imath\sqrt{3}\right)^2$ إذن لها حلاّن هما $\jmath^2=\frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2}$ و $\jmath=\frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}$ مع $\jmath=e^{2\imath\pi/3}$.

ملاحظة 28 : ◁ نلاحظ أنّ $z=1$ ليس حلاًّ للمعادلة إذن بضرب طرفيها بالمقدار $z-1$ تصبح $z^3-1=0$ إذن الحلاّن هما الجذران التكعيبيان غير الحقيقيين للوحدة أي $\jmath$ و $\jmath^2$. ▷

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 2 المميّز المختصر هو $\Delta' = (-1)^2 - 2 \times 1 = -1 = \imath^2$ إذن للمعادلة حلاّن هما $\frac{-1-\imath}{2}$ و $\frac{-1+\imath}{2}$.

• 3 المميّز المختصر هو $\Delta' = (\cos\theta)^2 - 1 \times 1 = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta = (\imath\sin\theta)^2$ إذن للمعادلة حلاّن هما $\cos\theta - \imath\sin\theta = e^{-\imath\theta}$ و $\cos\theta + \imath\sin\theta = e^{\imath\theta}$.

• 4 المميّز المختصر هو $\Delta' = 1^2 - 1 \times \sin^2\theta = \cos^2\theta$ إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{و} \qquad 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

• 5 مُمَيِّز المعادلة هو $\Delta = (6+\imath)^2 - 4(11+13\imath) = -9-40\imath$. يمكن ملاحظة أنّ $-9 = 16-25 = 4^2-5^2$ و $40 = 2\times4\times5$ منه $\Delta = 4^2 - 2\times4\times5\imath + (5\imath)^2 = (4-5\imath)^2$ ، لكن سنتّبع الطريقة العامة :

ليكن $\delta = x + \imath y$ جذراً تربيعياً للعدد Δ . لدينا : $\delta^2 = \Delta$ منه :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -9 \\ 2xy = -40 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-9)^2 + (-40)^2} = 41 \end{cases}.$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2 = 41 - 9 = 32$ أي $x = \pm 4$. نختار $x = 4$ مثلاً و نُعوِّض في المعادلة الثانية لنجد أنّ $y = -5$. إذن $\delta = 4 - 5\imath$ أي $\Delta = (4-5\imath)^2$ و بالتالي للمعادلة حلاّن هما :

$$\frac{6+\imath-4+5\imath}{2} = 1+3\imath \qquad \text{و} \qquad \frac{6+\imath+4-5\imath}{2} = 5-2\imath.$$

• 6 مُمَيِّز المعادلة هو $\Delta = (7+3\imath)^2 - 4\times2(2+4\imath) = 24+10\imath$. يمكن ملاحظة أنّ $24 = 25-1 = 5^2-1^2$ و $10 = 2\times5\times1$ منه $\Delta = 5^2 + 2\times5\times\imath + \imath^2 = (5+\imath)^2$ ، لكن سنتّبع الطريقة العامة :

ليكن $\delta = x + \imath y$ جذراً تربيعياً للعدد Δ . لدينا : $\delta^2 = \Delta$ منه :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ 2xy = 10 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \end{cases}.$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2 = 24 + 26 = 50$ أي $x = \pm 5$. نختار $x = 5$ مثلاً و نُعوِّض في المعادلة الثانية لنجد أنّ $y = 1$. إذن $\delta = 5 + \imath$ أي $\Delta = (5+\imath)^2$ و بالتالي للمعادلة حلاّن هما :

$$\frac{7+3\imath-5-\imath}{4} = \frac{1+\imath}{2} \qquad \text{و} \qquad \frac{7+3\imath+5+\imath}{4} = 3+\imath.$$

■

109 فيما يلي، الحرف J يرمز إلى يوم ميلادك و الحرف M إلى شهر ميلادك. مثلاً، إذا وُلدتَ في 11 أكتوبر فإنّ $J = 11$ و $M = 10$.

• 1 أحسب الجزء التخيلي للعدد : $Z = \frac{1}{M+\imath}$.

• 2 حدّد عمدةً للعدد : $Z = \left(\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1+\imath}\right)^M$.

• 3 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^4 + (2-J)z^2 - (J-1) = 0$.

الحلّ. لحلّ التمرين، نختار $J = 11$ و $M = 10$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 1 لدينا :

$$M=\frac{1}{10+\imath}=\frac{10-\imath}{10^2+1^2}=\frac{10-\imath}{101}=\frac{10}{101}-\frac{1}{101}\imath$$

و بالتالي فالجزء التخيلي للعدد Z هو $-\frac{1}{101}$.

• 2 لدينا :

$$\frac{1+\imath\sqrt{3}}{1+\imath}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\imath\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\imath\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{\imath\pi/3}}{e^{\imath\pi/4}}=\sqrt{2}e^{\imath\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{\imath\pi/12}$$

منه :

$$Z=\left(\sqrt{2}e^{\imath\pi/12}\right)^{10}=2^5e^{10\imath\pi/12}=32e^{5\pi/6}$$

و بالتالي : $\arg(Z)=\frac{5\pi}{6}\pmod{2\pi}$.

• 3 المعادلة هي : $z^4-9z^2-10=0$ و هي معادلة مضاعفة التربيع.

لحلّها نضع $Z=z^2$ فيكون : $Z^2-9Z-10=0$.

لدينا $\Delta=(-9)^2-4(-10)=121=11^2$ إذن للمعادلة حلاّن هما :

$$Z_1=\frac{9-11}{2}=-1 \qquad \text{و} \qquad Z_2=\frac{9+11}{2}=10 \ .$$

في الأخير : $z^2=-1$ أو $z^2=10$ أي $z=\pm\imath$ أو $z=\pm\sqrt{10}$.

إذن، مجموعة الحلول هي : $\left\{-\imath,\imath,-\sqrt{10},\sqrt{10}\right\}$.

■

110 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول z :

• 1 $z^4-(5-14\imath)z^2-2(5\imath+12)=0$ • 3 $z^2-2\imath z+2-4\imath=0$

• 2 $z^3-\imath=6(z+\imath)$ • 4 $z^6-2z^3\cos 3\theta+1=0 \quad (\theta\in\mathbb{R})$

الحلّ. 1• هذه المعادلة مضاعفة التربيع. لحلّها، نضع $Z=z^2$ منه $Z^2-(5-14\imath)Z-2(5\imath+12)=0$. مميّز هذه المعادلة المساعِدة هو $\Delta=(-(5-14\imath))^2-4\times1\times-2(5\imath+12)=-75-100\imath$. ليكن $\delta=x+\imath y$ جذراً تربيعياً للعدد Δ . لدينا : $(x+\imath y)^2=-75-100\imath$ منه :

$$\begin{cases} x^2-y^2=-75 \\ 2xy=-100 \\ x^2+y^2=\sqrt{(-75)^2+(-100)^2}=125 \end{cases} .$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة نجد $2x^2=50$ منه $x=\pm5$. نختار مثلاً $x=5$ و نعوّض في المعادلة الثانية لنجد $y=-10$ إذن $\delta=5-10\imath$. منه نستنتج حلول المعادلة المساعِدة و هي $Z_1=\frac{5-14\imath-(5-10\imath)}{2}=-2\imath$ و $Z_2=\frac{5-14\imath+(5-10\imath)}{2}=5-12\imath$.

حلول المعادلة الأصلية هي الجذور التربيعية للعددين Z_1 و Z_2 لإيجادها، نعتبر العددين $a+\imath b$ و $c+\imath d$ بحيث $(a+\imath b)^2=2\imath$ و $(c+\imath d)^2=5-12\imath$. لدينا :

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=-2 \\ a^2+b^2=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2 \end{cases}$$ بجمع المعادلتين

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الأولى و الثالثة ينتج $2a^2 = 2$ أي $a = \pm 1$. نختار $a = 1$ و نعوّض في المعادلة الثانية لنجد $b = -1$. إذن للعدد Z_1 جذران تربيعيان هما $\pm(1-\imath)$.

بالمثل : $\begin{cases} c^2 - d^2 = 5 \\ 2cd = -12 \\ c^2 + d^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13 \end{cases}$. بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2c^2 = 18$ أي $c = \pm 3$.

نختار $c = 3$ و نعوّض في المعادلة الثانية لنجد $d = -2$. إذن للعدد Z_2 جذران تربيعيان هما $\pm(3-2\imath)$.

في الأخير، للمعادلة المُقترحة أربعة حلول و هي : $1-\imath$ ، $-1+\imath$ ، $3-2\imath$ و $-3+2\imath$.

• 2. مفتاح الحل هو ملاحظة أنّ $\imath^3 = -\imath$ منه :

$$z^3 - \imath = z^3 + \imath^3 = (z+\imath)\left(z^2 - \imath z + \imath^2\right) = (z+\imath)\left(z^2 - \imath z - 1\right)$$

إذن :

$$\begin{aligned} z^3 - \imath = 6(z+\imath) &\iff (z+\imath)\left(z^2 - \imath z - 1\right) - 6(z+\imath) = 0 \\ &\iff (z+\imath)\left(z^2 - \imath z - 1 - 6\right) = 0 \\ &\iff (z+\imath)\left(z^2 - \imath z - 7\right) = 0 \\ &\iff z + \imath = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 - \imath z - 7 = 0 \end{aligned}$$

من المعادلة الأولى نجد $z = -\imath$. مميّز المعادلة الثانية هو $\Delta = (-\imath)^2 - 4 \times 1 \times -7 = 27 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$ إذن لهذه المعادلة حلاّن هما $z_1 = \dfrac{\imath - 3\sqrt{3}}{2}$ و $z_2 = \dfrac{\imath + 3\sqrt{3}}{2}$.

في الأخير، للمعادلة ثلاثة حلول هي : $-\imath$ ، $\dfrac{1}{2}\left(-3\sqrt{3} + \imath\right)$ و $\dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} + \imath\right)$.

• 3. المميِّز المختصر لهذه المعادلة هو :

$$\Delta' = (-\imath)^2 - (2 - 4\imath) = -3 + 4\imath = 1^2 + (2\imath)^2 + 2 \times 1 \times 2\imath = (1 + 2\imath)^2$$

إذن للمعادلة حلاّن هما : $z_1 = \imath - (1 + 2\imath) = -1 - \imath$ و $z_2 = \imath + (1 + 2\imath) = 1 + 3\imath$.

• 4. سنعرض طريقتين لحلّ هذه المعادلة :

الطريقة الأولى : نضع $Z = z^3$ منه المعادلة تصبح : $Z^2 - 2Z\cos 3\theta + 1 = 0$. مميّزها المختصر هو :

$$\Delta' = (-\cos 3\theta)^2 - 1 = \cos^2 3\theta - 1 = -\sin^2 3\theta = (\imath \sin 3\theta)^2$$

إذن للمعادلة المساعِدة حلاّن هما : $Z_1 = \cos 3\theta - \imath \sin 3\theta = e^{-3\imath\theta}$ و $Z_2 = \overline{Z}_1 = e^{3\imath\theta}$ منه :

- $z^3 = e^{-3\imath\theta}$ و بالتالي : $z \in \left\{e^{-\imath\theta}, \mathrm{j}e^{-\imath\theta}, \mathrm{j}^2 e^{-\imath\theta}\right\}$ ؛
- أو $z^3 = e^{3\imath\theta}$ و بالتالي : $z \in \left\{e^{\imath\theta}, \mathrm{j}e^{\imath\theta}, \mathrm{j}^2 e^{\imath\theta}\right\}$.

في الأخير، حلول المعادلة (و عددها ستة) هي الأعداد : $z_k = \exp\left(-\theta + \dfrac{2\imath k\pi}{3}\right)$ و $z'_k = \exp\left(\theta + \dfrac{2\imath k\pi}{3}\right)$ مع $0 \leq k \leq 2$.

الطريقة الثانية : نلاحظ أنّ :

$$z^6 - 2z^3\cos 3\theta + 1 = \left(z^3\right)^2 - \left(e^{-3\imath\theta} + e^{3\imath\theta}\right)z^3 + e^{-3\imath\theta} \cdot e^{3\imath\theta} = \left(z - e^{-3\imath\theta}\right)\left(z - e^{3\imath\theta}\right)$$

منه : $z^6 - 2z^3\cos 3\theta + 1 = 0 \iff z^3 - e^{-3\imath\theta} = 0 \quad \text{أو} \quad z^3 - e^{3\imath\theta} = 0$

ثمّ نتمم الحل كما في الطريقة الأولى.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

111 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول z :

1. $z^2+z+1=0$
2. $z^2-(1+2\imath)z+\imath-1=0$
3. $z^2-\sqrt{3}z-\imath=0$
4. $z^2-(5-14\imath)z-2(5\imath+12)=0$
5. $z^2-(3+4\imath)z-1+5\imath=0$
6. $4z^2-2z+1=0$
7. $z^4+10z^2+169=0$
8. $z^4+2z^2+4=0$
9. $z^2-(11-5\imath)z+24-27\imath=0$
10. $z^3+3z-2\imath=0$

الحلّ. مع الكم المُعتبَر من المعادلات التي قمنا بحلّها في التمارين السابقة، نرجو أن تكون قد اِتَّضحت الطريقة و نكتفي بإعطاء قيمة كلّ من : المميّز Δ (أو المميّز المختصر Δ') ، أحد الجذرين التربيعيين δ للمميّز (أو المميّز المختصر) ، و الحلول.

1. $\Delta=-3$ ، $\delta=\imath\sqrt{3}$ ، $z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath$ ، $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath$.
2. $\Delta=1$ ، $\delta=1$ ، $z_1=\imath$ ، $z_2=1+\imath$.
3. $\Delta=3+4\imath$ ، $\delta=2+\imath$ ، $z_1=\frac{\sqrt{3}-2}{2}-\frac{1}{2}\imath$ ، $z_2=\frac{\sqrt{3}+2}{2}+\frac{1}{2}\imath$.
4. $\Delta=-75-100\imath$ ، $\delta=5-10\imath$ ، $z_1=-2\imath$ ، $z_2=5-12\imath$.
5. $\Delta=-3+4\imath$ ، $\delta=1+2\imath$ ، $z_1=1+\imath$ ، $z_2=2+3\imath$.
6. $\Delta'=-3$ ، $\delta=\imath\sqrt{3}$ ، $z_1=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\imath$ ، $z_2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\imath$.
7. نضع $Z=z^2$ فيكون $Z^2+10Z+169=0$.

   $\Delta'=-144$ ، $\delta=12\imath$ ، $Z_1=-5-12\imath$ ، $Z_2=-5+12\imath$.

   الجذران التربيعيان للعدد $-5-12\imath$ هما $2-3\imath$ و $-2+3\imath$ و الجذران التربيعيان للعدد $-5+12\imath$ هما $2+3\imath$ و $-2-3\imath$.

   إذن، للمعادلة أربعة حلول و هي : $2-3\imath$ ، $-2+3\imath$ ، $2+3\imath$ و $-2-3\imath$.
8. نضع $Z=z^2$ فيكون $Z^2+2Z+4=0$.

   $\Delta'=-3$ ، $\delta=\imath\sqrt{3}$ ، $Z_1=-1-\imath\sqrt{3}$ ، $Z_2=-1+\imath\sqrt{3}$.

   الجذران التربيعيان للعدد $-1-\imath\sqrt{3}$ هما $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$ و الجذران التربيعيان للعدد $-1+\imath\sqrt{3}$ هما $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$.

   إذن، للمعادلة أربعة حلول و هي : $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$ ، $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$ و $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\imath$.
9. $\Delta=-2\imath$ ، $\delta=1-\imath$ ، $z_1=5-2\imath$ ، $z_2=6-3\imath$.
10. نلاحظ أنّ $z_1=\imath$ حلّ للمعادلة . نجد أنّ $z^3+3z-2\imath=(z-\imath)(z^2+\imath z+2)$.

    مُميِّز المعادلة $z^2+\imath z+2=0$ هو $\Delta=-9$ منه $\delta=3\imath$ ، $z_2=-2\imath$ و $z_3=\imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

■

112 حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين ثم مثّل الحلول في المستوي المركب :

1• $z^4 = 4\imath$ 2• $z^4 + 2\imath z^2 + 3 = 0$

الحلّ. 1•

$$\begin{aligned} z^4 = 4\imath &\iff |z^4| = |4\imath| \quad \text{و} \quad \arg(z^4) = \arg(4\imath) \pmod{2\pi} \\ &\iff |z|^4 = 4 \quad \text{و} \quad 4\arg(z) = \arg(4) + \arg(\imath) \pmod{2\pi} \\ &\iff |z|^4 = 4 \quad \text{و} \quad 4\arg(z) = 0 + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ &\iff |z| = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad 4\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff |z| = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\,, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

أي أنّ المعادلة تقبل أربعة حلول هي :

$$\sqrt{2}e^{\imath\pi/8}\,, \quad \sqrt{2}e^{5\imath\pi/8}\,, \quad \sqrt{2}e^{9\imath\pi/8}\,, \quad \sqrt{2}e^{13\imath\pi/8}$$

(و نحصل عليها بأخذ $k = 0, 1, 2, 3$).

2• لحلّ هذه المعادلة (و هي معادلة مضاعفة التربيع) نضع $Z = z^2$ فيكون : $Z^2 + 2\imath Z + 3 = 0$.

المميّز يساوي $\Delta = (2\imath)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -4 - 12 = -16 = (4\imath)^2$ منه :

$$Z_1 = \frac{-2\imath - 4\imath}{2} = -3\imath\,, \quad Z_2 = \frac{-2\imath + 4\imath}{2} = \imath$$

منه

$$\begin{aligned} z^2 = -3\imath &\iff |z^2| = |-3i| \quad \text{و} \quad \arg(z^2) = \arg(-3\imath) \pmod{2\pi} \\ &\iff |z|^2 = 3 \quad \text{و} \quad 2\arg(z) = \pi + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ &\iff |z| = \sqrt{3} \quad \text{و} \quad \arg(z) = \frac{3\pi}{4} \pmod{\pi} \\ &\iff z = \pm e^{3\imath\pi/4} \end{aligned}$$

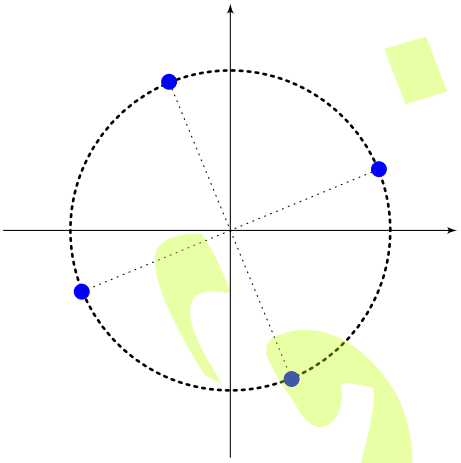
أو

$$\begin{aligned} z^2 = \imath &\iff |z^2| = |i| \quad \text{و} \quad \arg(z^2) = \arg(\imath) \pmod{2\pi} \\ &\iff |z|^2 = 1 \quad \text{و} \quad 2\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ &\iff |z| = 1 \quad \text{و} \quad \arg(z) = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi} \\ &\iff z = \pm e^{\imath\pi/4} \end{aligned}$$

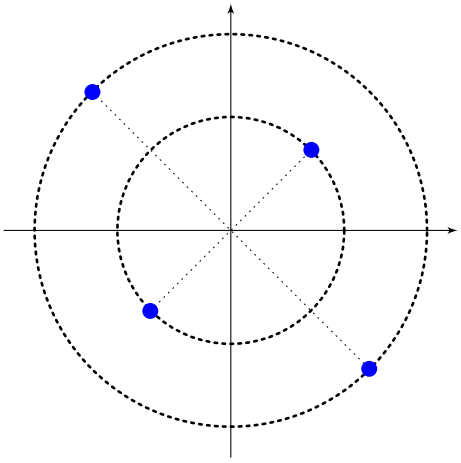
الشكل VI.13 يمثّل حلول المعادلة الأولى و الشكل VI.14 يمثّل حلول المعادلة الثّانية. ■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.13



شكل VI.14

113 حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية ذات المجهول z :

1. $\overline{z} = z^3$
2. $\overline{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$
3. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$
4. $z^8 = \dfrac{1+\imath}{\sqrt{3}-\imath}$

الحلّ.

1. بدايةً، نلاحظ أنّ $z = 0$ حلّ للمعادلة. نبحث إذن عن الحلول غير المعدومة : ليكن $z \neq 0$ حيث $z = \rho e^{\imath\theta}$ مع ρ عدد حقيقي موجب تماماً $(\rho > 0)$ و $\theta \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\overline{z} = z^3 \iff \rho e^{-\imath\theta} = \rho^3 e^{3\imath\theta} \iff \begin{cases} \rho = \rho^3 \\ -\theta \equiv 3\theta \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho^2 = 1 \\ 4\theta \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta \equiv 0 \pmod{\dfrac{\pi}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases}$$

إذن الحلول غير المعدومة للمعادلة المُقترحة هي : 1 ، $\imath$ ، -1 و $-\imath$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة هي : $\{0, 1, -1, \imath, -\imath\}$.

2. حتى تكون المعادلة معرفة، يجب أن يكون $z \neq 0$.

بدايةً، نُذكّر أنّ $|z| = |\overline{z}|$. بأخذ طويلة طرفيّ المعادلة ينتج $|\overline{z}^7| = \left|\dfrac{1}{z^2}\right|$ أي $|z|^7 = \dfrac{1}{|z|^2}$ منه $|z|^9 = 1$ منه $|z| = 1$

إذن $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$. و بالتالي، المعادلة تكافئ : $\dfrac{1}{z^7} = \dfrac{1}{z^2}$ أي $z^5 = 1$.

إذن حلول المعادلة هي الجذور الخامسة للوحدة أي الأعداد : $z_k = e^{2\imath k\pi/5}$ مع $k \in \{0,1,2,3,4\}$.

3. بما أنّ $z = 1$ ليس حلاً للمعادلة فبإمكاننا قسمة طرفيها على $(z-1)^6$ و نجد : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$. نضع $u = \dfrac{z+1}{z-1}$ فيكون $u^6 = -27 = 27e^{\imath\pi}$ و بالتالي فإنّ الحلول هي الأعداد : $u_k = \sqrt[6]{27}\exp\left(\dfrac{\imath\pi + 2\imath k\pi}{6}\right)$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

مع $0 \leq k \leq 5$ أي :

$$u_0 = \sqrt{3}e^{\imath\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$
$$u_1 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{\imath\pi}{6} + \frac{\imath\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{\imath\pi/2} = \imath\sqrt{3}$$
$$u_2 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{\imath\pi}{6} + \frac{2\imath\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{5\imath\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$
$$u_3 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{\imath\pi}{6} + \pi\right) = \sqrt{3}e^{7\imath\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$
$$u_4 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{\imath\pi}{6} + \frac{4\imath\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{9\imath\pi/6} = \sqrt{3}e^{3\imath\pi/2} = -\imath\sqrt{3}$$
$$u_5 = \sqrt{3}\exp\left(\frac{\imath\pi}{6} + \frac{5\imath\pi}{3}\right) = \sqrt{3}e^{11\imath\pi/6} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$

إذن $\frac{z+1}{z-1} = u_k$ مع $0 \leq k \leq 5$. نضع $u_k = x_k + \imath y_k$ و نلاحظ أنّ $u_k \neq -1$ لأجل $0 \leq k \leq 5$ منه :

$$\frac{z+1}{z-1} = u_k \iff z+1 = (z-1)u_k \iff z = \frac{u_k+1}{u_k-1} \iff z = \frac{(u_k+1)(\overline{u}_k-1)}{|u_k-1|^2}$$
$$\iff z = \frac{|u_k|^2 - 2\imath\,\mathrm{Im}(u_k) - 1}{|u_k|^2 - 2\,\mathrm{Re}(u_k \times 1) + |1|^2} = \frac{3 - 2\imath y_k - 1}{3 - 2x_k + 1} = \frac{2 - 2\imath y_k}{4 - 2x_k} = \frac{1 - \imath y_k}{2 - x_k}$$

و بالتالي :

$$z_0 = \frac{1-\imath y_0}{2-x_0} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 2 - \imath\sqrt{3}$$
$$z_1 = \frac{1-\imath y_1}{2-x_1} = \frac{1-\imath\sqrt{3}}{2-0} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$
$$z_2 = \frac{1-\imath y_2}{2-x_2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\imath}{2+\frac{3}{2}} = \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}\imath$$
$$z_3 = \frac{1-\imath y_3}{2-x_3} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath}{2+\frac{3}{2}} = \frac{2}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}\imath$$
$$z_4 = \frac{1-\imath y_4}{2-x_4} = \frac{1+\imath\sqrt{3}}{2-0} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$$
$$z_5 = \frac{1-\imath y_5}{2-x_5} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}} = 2 + \imath\sqrt{3}$$

و هي حلول المعادلة المقترحة.

• 4 هنا من الأفضل إستعمال الشكل الأسي :

$$1 + \imath = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$$
$$\sqrt{3} - \imath = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2e^{-\imath\pi/6}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

منه :

$$z^8 = \frac{1+\imath}{\sqrt{3}-\imath} \iff z^8 = \frac{\sqrt{2}e^{\imath\pi/4}}{2e^{-\imath\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\frac{\imath\pi}{4}+\frac{\imath\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\imath\pi/12}$$

و بالتالي فإنّ الحلول هي الجذور الثامنة للعدد $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\imath\pi/12}$ أي الأعداد :

$$z_k = \sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{2}}\exp\left(\frac{5\imath\pi}{96}+\frac{2\imath k\pi}{8}\right) = 2^{-1/16}\exp\left(\frac{5\imath\pi}{96}+\frac{\imath k\pi}{4}\right), \quad 0 \le k \le 7$$

■

114 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2-3z+5)^2+(z-\imath)^2=0$.

الحلّ. نسمي (E) هذه المعادلة. لدينا :

$$\begin{aligned}(E) &\iff (z^2-3z+5)^2 = -(z-\imath)^2 = [\imath(z-\imath)]^2\\ &\iff z^2-3z+5=\imath(z-\imath) \quad \text{أو} \quad z^2-3z+5=-\imath(z-\imath)\\ &\iff z^2-(3+\imath)z+4=0 \quad \text{أو} \quad z^2-(3-\imath)z+6=0\end{aligned}$$

- مُميِّز المعادلة الأولى هو $\Delta = (3+\imath)^2-4\times 4 = -8+6\imath = (1+3\imath)^2$ إذن لها حلاّن هما :

$$z_1 = \frac{3+\imath-1-3\imath}{2} = 1-\imath \quad ; \quad z_2 = \frac{3+\imath+1+3\imath}{2} = 2+2\imath$$

- مُميِّز المعادلة الثانية $\Delta = (3-\imath)^2-4\times 6 = -16-6\imath$. ليكن $\delta = x+\imath y$ أحد الجذرين التربيعيين لهذا المُميِّز .

لدينا : $\begin{cases} x^2-y^2=-16 \\ 2xy=-6 \\ x^2+y^2=\sqrt{16^2+6^2}=2\sqrt{73}\end{cases}$. بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة ينتج $2x^2=-16+2\sqrt{73}$ منه $x=\pm\sqrt{-8+\sqrt{73}}$. نختار مثلاً $x=\sqrt{-8+\sqrt{73}}$ و نُعوّض في المعادلة الأولى فيكون $y^2=x^2+16=8+\sqrt{73}$. و بما أنّ $y<0$ (من المعادلة الثانية) فإنّ $y=-\sqrt{8+\sqrt{73}}$.

إذن $\Delta=\delta^2=\left(\sqrt{-8+\sqrt{73}}-\imath\sqrt{8+\sqrt{73}}\right)^2$ منه الحلاّن :

$$z_3 = \frac{3-\imath-\sqrt{-8+\sqrt{73}}+\imath\sqrt{8+\sqrt{73}}}{2} = \frac{3-\sqrt{-8+\sqrt{73}}}{2} - \frac{1-\sqrt{8+\sqrt{73}}}{2}\imath$$

$$z_4 = \frac{3-\imath+\sqrt{-8+\sqrt{73}}-\imath\sqrt{8+\sqrt{73}}}{2} = \frac{3+\sqrt{-8+\sqrt{73}}}{2} - \frac{1+\sqrt{8+\sqrt{73}}}{2}\imath$$

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$.

■

115 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-1)^3+(z-1)^2(z+1)+(z-1)(z+1)^2+(z+1)^3=0$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. نسمي (E) هذه المعادلة.

بما أنّ $z=-1$ ليس حلاً للمعادلة (E) فبإمكاننا قسمة طرفيها على $(z+1)^3$ فينتج :

$$(E) \iff \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2+\frac{z-1}{z+1}+1=0$$

نضع $Z=\dfrac{z-1}{z+1}$ منه $z=\dfrac{1+Z}{1-Z}$. نلاحظ أنه لكل عدد مركب z فإنّ $\dfrac{z-1}{z+1}\neq 1$ إذن :

$$(E) \iff Z^3+Z^2+Z+1=0 \iff \frac{Z^4-1}{Z-1}=0 \iff Z^4=1$$

منه $Z\in\{1,-1,\imath,-\imath\}$ (الجذور الرابعة للوحدة) . لكن $Z\neq 1$ إذن الحلول الممكنة هي : -1 ، $\imath$ و $-\imath$ و بما أنّ $z=\dfrac{1+Z}{1-Z}$ فإنّ :

$$z=\frac{1+(-1)}{1-(-1)}=0$$

$$z=\frac{1+\imath}{1-\imath}=\frac{(1+\imath)^2}{1^2+1^2}=\frac{1+2\imath-1}{2}=\imath \quad \text{أو}$$

$$z=\frac{1+(-\imath)}{1-(-\imath)}=\frac{(1-\imath)^2}{1^2+1^2}=\frac{1-2\imath-1}{2}=-\imath \quad \text{أو}$$

في الأخير، حلول المعادلة المقترحة هي : 0 ، $\imath$ و $-\imath$. ■

116

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^3-(16-\imath)z^2+(89-16\imath)z+89\imath=0 \qquad (3)$$

2) لتكن a ، b ، c حلول المعادلة (3) و A ، B ، C صُوَر هذه الحلول في المستوي المركب . ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

الحلّ. 1) لدينا :

$$\begin{aligned}(3) &\iff z^3+\imath z^2-16z^2-16\imath z+89+89\imath\\ &\iff z^2(z+\imath)-16z(z+\imath)+89(z+\imath)=0\\ &\iff (z+\imath)\left(z^2-16z+89\right)=0\end{aligned}$$

إذن حلول المعادلة (3) هي الأعداد z بحيث $z+\imath=0$ أو $z^2-16z+89=0$.

- للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z=-\imath$ ؛
- المميِّز المختصر للمعادلة الثانية هو $\Delta'=8^2-89=-25=(5\imath)^2$ إذن لها حلاّن هما $z_1=8-5\imath$ و $z_2=8+5\imath$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة (3) هي : $\{-\imath, 8-5\imath, 8+5\imath\}$.

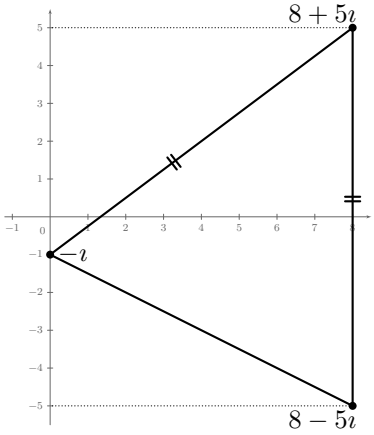
2)

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

نضع $a=-\imath$ ، $b=8-5\imath$ و $c=8+5\imath$.
في هذا النوع من الأسئلة، من الأفضل الإستعانة بشكل.
نلاحظ على الشكل جانبه أنّ المثلث المطلوب متساوي الساقين عند الرأس C ذي اللاحقة $c=8+5\imath$ و هذا ما يثبته الحساب :

$$\begin{cases} |(8+5\imath)-(-\imath)| &= |8+6\imath| = 10 \\ |(8+5\imath)-(8-5\imath)| &= |10\imath| = 10 \end{cases}$$

إذن المثلث الذي لواحق رؤوسه هي حلول المعادلة (3) متساوي الساقين عند الرأس ذي اللاحقة $8+5\imath$.



■

117 لكل عدد مركب z نضع : $P(z)=z^4+4z^2+16$. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$ (4)

1. عيّن العدد الحقيقي الموجب a بحيث يكون : $P(z)=\left(z^2+az+4\right)\left(z^2-az+4\right)$.
2. أوجد حلول المعادلة (4) . نرمز بـ z_1 إلى الحل الذي جزآه الحقيقي و التخيلي موجبان.
   تحقق من أنّ الحلول هي z_1 ، $-z_1$ ، $\overline{z}_1$ و $-\overline{z}_1$. أكتب هذه الحلول على الشكل المثلثي.
3. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول : 4 cm) .
   (أ) علم النقط A ، B ، C و D لواحق الأعداد z_1 ، $-\overline{z}_1$ ، $-z_1$ و $\overline{z}_1$ على الترتيب.
   (ب) أثبت أنّ هذه النقط الأربعة تقع على الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2 .

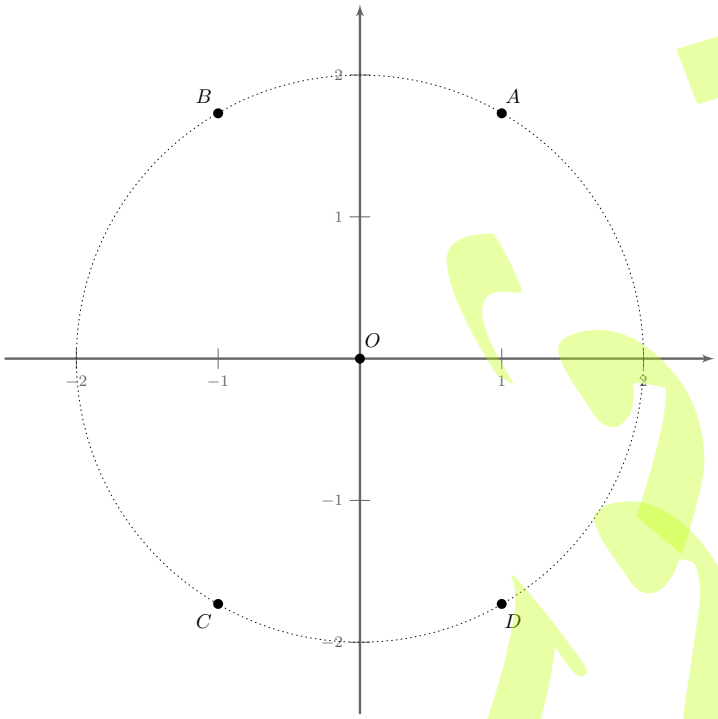
الحلّ.

1. لدينا بعد النشر و الترتيب :
$$\left(z^2+az+4\right)\left(z^2-az+4\right)=z^4+\left(8-a^2\right)z^2+16$$
و بالتالي : $P(z)=\left(z^2+az+4\right)\left(z^2-az+4\right)$ إذا و فقط إذا كان $8-a^2=4$ أي إذا و فقط إذا كان $a=\pm 2$.
لكن $a\geq 0$ إذن $a=2$.
في الأخير : $P(z)=\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2z+4\right)$.

2. $P(z)=0$ إذا و فقط إذا كان $z^2+2z+4=0$ أو $z^2-2z+4=0$.
   - المميّز المختصر للمعادلة $z^2+2z+4=0$ هو $\Delta'=1^2-4=-3=\left(\imath\sqrt{3}\right)^2$ و بالتالي لها حلاّن هما : $-1-\imath\sqrt{3}$ ؛
   - و المميّز المختصر للمعادلة $z^2-2z+4=0$ هو $\Delta'=(-1)^2-4=-3=\left(\imath\sqrt{3}\right)^2$ إذن لها حلاّن هما : $1\pm\imath\sqrt{3}$.

بما أنّ $\mathrm{Re}(z_1)\geq 0$ و $\mathrm{Im}(z_1)\geq 0$ فإنّ $z_1=1+\imath\sqrt{3}$ منه :
$$-1+\imath\sqrt{3}=-\overline{z}_1 \quad , \quad -1-\imath\sqrt{3}=-z_1 \quad , \quad 1-\imath\sqrt{3}=\overline{z}_1$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.15

الشكل المثلثي للحلول هو :

$$z_1 = 2\left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \imath\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[2, \frac{\pi}{3}\right]$$
$$-z_1 = -\left[2, \frac{\pi}{3}\right] = \left[2, \frac{\pi}{3} + \pi\right] = \left[2, \frac{4\pi}{3}\right] = \left[2, -\frac{2\pi}{3}\right]$$
$$\bar{z}_1 = \overline{\left[2, \frac{\pi}{3}\right]} = \left[2, -\frac{\pi}{3}\right]$$
$$-\bar{z}_1 = \overline{(-z_1)} = \overline{\left[2, -\frac{2\pi}{3}\right]} = \left[2, \frac{2\pi}{3}\right]$$

3• (ا) أنظر الشكل VI.15 .

(ب) لدينا :

$$OA = |z_1 - 0| = 2\ ,\ OB = |-\bar{z}_1 - 0| = 2\ ,\ OC = |-z_1 - 0| = 2\ ,\ OD = |\bar{z}_1 - 0| = 2$$

أي $OA = OB = OC = OD$ و هذا يعني أنّ النقط A ، B ، C و D تنتمي كلها إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $OA = 2$.

■

118 حلّ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^2 - 2ze^{\imath\theta} + 1 = 0$ حيث θ وسيط حقيقي و $z \in \mathbb{C}$ هو المجهول.

ما هو المحل الهندسي للحلول في المستوي المركب عندما يمسح الوسيط θ المجموعة $\mathbb{R}$ ؟

الحلّ. المعادلة تُكافئ :

$$\left(z - e^{\imath\theta}\right)^2 = e^{2\imath\theta} - 1 = 2\imath e^{\imath\theta}\sin\theta = 2e^{\imath(\theta+\pi/2)}\sin\theta$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $\sin\theta \geq 0$ فإنّ الحلول هي $z = e^{\imath\theta} \pm \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}e^{\imath\theta/2}\sqrt{\sin\theta}$ أي $z = e^{\imath\theta} \pm (1+\imath)\, e^{\imath\pi/2}\sqrt{\sin\theta}$.
- إذا كان $\sin\theta < 0$ فإنّ الحلول هي $z = e^{\imath\theta} \pm \sqrt{2}e^{-\imath\pi/4}e^{\imath\theta/2}\sqrt{-\sin\theta}$ أي $z = e^{\imath\theta} \pm (1-\imath)\, e^{\imath\pi/2}\sqrt{-\sin\theta}$.

المحل الهندسي للحلول : العدد المركب z ينتمي إلى مجموعة الحلول إذا و فقط إذا وُجد عدد حقيقي θ بحيث :
$z^2 - 2ze^{\imath\theta} + 1 = 0$ ، و هذا الشرط يُكافئ $z \neq 0$ و $\left|\dfrac{z^2+1}{2z}\right| = |e^{\imath\theta}| = 1$. هذا الشرط يُكتب أيضاً $|z^2+1| = 2|z|$.
نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{aligned} |z^2+1| = 2|z| &\iff |x^2 - y^2 + 1 + 2\imath xy| = 2|x+\imath y| \\ &\iff \sqrt{(x^2-y^2+1)^2 + 4x^2y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} \\ &\iff (x^2-y^2+1)^2 + 4x^2y^2 = 4(x^2+y^2) \end{aligned}$$

بعد النشر و التبسيط ينتج : $(x^2+y^2)^2 + 1 - 2x^2 - 6y^2 = 0$. لكن :

$$\begin{aligned} (x^2+y^2)^2 + 1 - 2x^2 - 6y^2 &= (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 1 - 4y^2 \\ &= (x^2+y^2-1)^2 - 4y^2 = (x^2+y^2-2y-1)(x^2+y^2+2y-1) \\ &= \left(x^2 + (y-1)^2 - 2\right)\left(x^2 + (y+1)^2 - 2\right) \end{aligned}$$

منه

$$(x^2+y^2)^2 + 1 - 2x^2 - 6y^2 = 0 \iff x^2 + (y-1)^2 - 2 = 0 \quad \text{أو} \quad x^2 + (y+1)^2 - 2 = 0$$

و بالتالي فإنّ المحل الهندسي لحلول المعادلة المعطاة هو اتحاد الدائرتين $\mathscr{C}\left((0,1), \sqrt{2}\right)$ و $\mathscr{C}'\left((0,-1), \sqrt{2}\right)$.
هاتان الدائرتان تتقاطعان في النقطتين $(1,0)$ و $(-1,0)$. ■

119 ليكن $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\dfrac{1+\imath z}{1-\imath z}\right)^3 = \dfrac{1+\imath\tan\alpha}{1-\imath\tan\alpha}$.

الحلّ. ليكن $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. لدينا :

$$\frac{1+\imath\tan\alpha}{1-\imath\tan\alpha} = \frac{1+\imath\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\imath\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha+\imath\sin\alpha}{\cos\alpha-\imath\sin\alpha} = \frac{e^{\imath\alpha}}{e^{-\imath\alpha}} = e^{2\imath\alpha}$$

نضع $Z = \dfrac{1+\imath z}{1-\imath z}$. هل يمكن أن يكون $Z = -1$ ؟ إذا كان $Z = -1$ فإنّ $1 + \imath z = -(1-\imath z)$ أي $2 = 0z$ و هذا مستحيل إذن $Z \neq -1$ و بالتالي $1 + \imath z = Z - \imath z Z$ منه $z = \imath\dfrac{1-Z}{1+Z}$. إذن :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\imath z}{1-\imath z}\right)^3 = \frac{1+\imath\tan\alpha}{1-\imath\tan\alpha} &\iff Z^3 = e^{2\imath\alpha} \\ &\iff Z = \jmath^k z^{2\imath\alpha/3}, \quad k \in \{0,1,2\}, \quad \jmath = e^{2\imath\pi/3} \\ &\iff Z = e^{\imath(2\alpha+2k\pi)/3}, \quad k \in \{0,1,2\} \\ &\iff z = \imath\frac{1-e^{\imath(2\alpha+2k\pi)/3}}{1+e^{\imath(2\alpha+2k\pi)/3}}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

نضع $t = \dfrac{2\alpha + 2k\pi}{3}$. لدينا :

$$\frac{1-e^{\imath t}}{1+e^{\imath t}} = \frac{-e^{\imath t/2}\left(e^{\imath t/2} - e^{-\imath t/2}\right)}{e^{\imath t/2}\left(e^{\imath t/2} + e^{-\imath t/2}\right)} = \frac{-2\imath \sin\frac{t}{2}}{2\cos\frac{t}{2}} = -\imath \tan\frac{t}{2}$$

$$\left(\frac{1+\imath z}{1-\imath z}\right)^3 = \frac{1+\imath\tan\alpha}{1-\imath\tan\alpha} \iff z = \imath\cdot(-\imath)\tan\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha+2k\pi}{3}\right)\right], \quad k\in\{0,1,2\} \quad \text{منه :}$$

$$\iff z = \tan\left(\frac{\alpha+k\pi}{3}\right), \quad k\in\{0,1,2\}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة هي : $\left\{\tan\frac{\alpha}{3}, \tan\left(\frac{\alpha+\pi}{3}\right), \tan\left(\frac{\alpha+2\pi}{3}\right)\right\}$. ■

120 أوجد ثلاثة أعداد مركبة طويلتها 1 بحيث يكون جداؤها 1 و مجموعها 1 .

الحلّ. لتكن z_1 ، z_2 ، z_3 هذه الأعداد. لنبحث عن الشرط اللازم الذي يجب أن تُحققه هذه الأعداد.
بما أنّ طويلتها 1 فإنّ $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ ، $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ و $\bar{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$ منه (علماً أنّ $z_1z_2z_3 = 1$) :

$$1 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \frac{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2}{z_1z_2z_3} = z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2$$

و بالتالي فإنّ :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 1 \\ z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2 &= 1 \\ z_1z_2z_3 &= 1 \end{aligned}$$

منه :

$$\begin{aligned} (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3) &= X^3 - (z_1+z_2+z_3)X^2 + (z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2)X - z_1z_2z_3 \\ &= X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X-1) + 1\cdot(X-1) = (X-1)\left(X^2+1\right) \end{aligned}$$

أي أنّ الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 هي جذور كثير الحدود $(X-1)\left(X^2+1\right)$ و بالتالي فإنّ $\{z_1,z_2,z_3\} = \{1,\imath,-\imath\}$.
من جهة أخرى، الأعداد 1 ، $\imath$ و $-\imath$ حلّ للمسألة لأنّ :

- طويلة كلّ منها تساوي 1 ،
- مجموعها $1+\imath-\imath = 1$ ،
- و جداؤها $1\cdot\imath\cdot(-\imath) = 1$.

أي أنّ الأعداد التي نبحث عنها هي (دون اعتبار الترتيب) 1 ، $\imath$ و $-\imath$.
في الأخير، عدد الحلول هو عدد تبديلات مجموعة ذات ثلاث عناصر أي $3! = 6$ و هذه الحلول هي :

$$\left\{(1,\imath,-\imath),(1,-\imath,\imath),(\imath,1,-\imath),(\imath,-\imath,1),(-\imath,1,\imath),(-\imath,\imath,1)\right\}$$

حلّ آخر : باعتبار أنّ مجموع الأعداد المركبة التي نبحث عنها يساوي 1 فبإمكاننا أن نفرض أنّ هذه الأعداد هي 1 ، z و $-z$.
و باعتبار أنّ حاصل ضربها يساوي 1 فبإمكاننا أن نفرض أنّ هذه الأعداد هي 1 ، z و $\dfrac{1}{z}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و بالتالي فإنّ $\left\{1, z, \frac{1}{z}\right\} = \{1, z, -z\}$ منه : $z = 1$ أو $-z = 1$ أو $z = -z$ أو $\frac{1}{z} = 1$ أو $\frac{1}{z} = z$ أو $\frac{1}{z} = -z$.

نتحقق بسهولة أنّ الحالة الممكنة الوحيدة هي $\frac{1}{z} = -z$ منه $z^2 = -1$ أي $z = \pm\imath$ و نصل إلى نفس الخلاصة.

■

121

1• حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0 \qquad (5)$$

2• نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$z^3 + z^2 - 2z - 1 = 0 \qquad (6)$$

(ا) ليكن $a \in \mathbb{C}^*$. أثبت أنّ a حلّ للمعادلة (5) إذا و فقط إذا كان $a + \frac{1}{a}$ حلاً للمعادلة (6) .

(ب) إستنتج حلول المعادلة (6) .

3• أثبت أنّ الأعداد $\cos\frac{2\pi}{7}$ ، $\cos\frac{4\pi}{7}$ و $\cos\frac{6\pi}{7}$ لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}$ (أي ليست أعداداً ناطقة).

الحلّ. 1• نلاحظ أنّ $z = 1$ ليس حلاً للمعادلة (5) إذن :

$$(5) \iff \left(z \neq 1 \quad و \quad \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0\right) \iff (z \neq 1 \quad و \quad z^7 = 1) \iff z = z^{2k\imath\pi/7}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

أي أنّ الحلول هي الجذور السابعة للوحدة (باستثناء 1)

و هي الأعداد : $z_k = \cos\frac{2k\pi}{7} + \imath\sin\frac{2k\pi}{7}$ مع $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ملاحظة 29 : ◁ بما أنّ معاملات المعادلة (5) حقيقية فإنها مترافقة مثنى مثنى و بما أنّ طويلة كل منها هي 1 فإنّ $\overline{z}_k = \frac{1}{z_k}$ منه :

$$\overline{z}_k = \frac{1}{z_k} = \frac{1}{e^{2k\imath\pi/7}} = e^{-2k\imath\pi/7} = e^{2\imath\pi - \frac{2k\imath\pi}{7}} = e^{2(7-k)\imath\pi/7} = z_{7-k}$$

إذن : $\overline{z}_1 = z_{7-1} = z_6$ ، $\overline{z}_2 = z_{7-2} = z_5$ و $\overline{z}_3 = z_{7-3} = z_4$.

▷

2• لدينا :

$$a + \frac{1}{a} \text{ حلّ للمعادلة } (6) \iff \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2\left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 0$$

$$\iff a^3 + 3a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3a\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + a^2 + 2a \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2a - \frac{2}{a} - 1 = 0$$

$$\iff a^3 + a^2 + a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = 0$$

$$\iff \frac{1}{a^3}\left(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1\right) = 0$$

$$\iff a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = 0$$

$$\iff a \text{ حلّ للمعادلة } (5)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3 (أ) ليكن $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. لدينا :

$$z_k + \frac{1}{z_k} \text{ حلّ للمعادلة } (6) \iff z_k \text{ حلّ للمعادلة } (5)$$
$$\iff z_k + \overline{z}_k \text{ حلّ للمعادلة } (6)$$
$$\iff 2\,\mathrm{Re}(z_k) \text{ حلّ للمعادلة } (6)$$

إذن حلول المعادلة (6) هي الأعداد $2\,\mathrm{Re}(z_k)$ حيث $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. لكن :

$$\mathrm{Re}(z_1) = \cos\frac{2\pi}{7} = \mathrm{Re}(\overline{z}_1) = \mathrm{Re}(z_6)$$
$$\mathrm{Re}(z_2) = \cos\frac{4\pi}{7} = \mathrm{Re}(\overline{z}_2) = \mathrm{Re}(z_5)$$
$$\mathrm{Re}(z_3) = \cos\frac{6\pi}{7} = \mathrm{Re}(\overline{z}_3) = \mathrm{Re}(z_4)$$

أي أنّ مجموعة حلول المعادلة (6) هي $\mathscr{S} = \left\{2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}\right\}$.

ملاحظة 30 : ◁ بما أننا وجدنا 6 قِيَم فهذا لا يعني أنّ المعادلة (6) تقبل 6 حلول (و هو شيء مستحيل لأنّ درجتها هي 3) لكن من خواص المجموعات أنّ تكرار بعض العناصر لا يُغيِر المجموعة أي :

$$\mathscr{S} = \left\{2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}, 2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}\right\} = \left\{2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}\right\}$$

▷

• 4 حتى نثبت أنّ الأعداد $\cos\frac{2\pi}{7}$ ، $\cos\frac{4\pi}{7}$ و $\cos\frac{6\pi}{7}$ لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}$ يكفي أن نثبت أنّ الأعداد $2\cos\frac{2\pi}{7}$ ، $2\cos\frac{4\pi}{7}$ و $2\cos\frac{6\pi}{7}$ لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}$ و هذا يكافئ إثبات أنّ المعادلة (6) لا تقبل حلاً ناطقاً (أي في $\mathbb{Q}$).

نفرض إذن أنّ المعادلة (6) تقبل حلاً ناطقاً و نبرهن أنّ هذا يؤدي إلى تناقض.

ليكن $z = \frac{p}{q}$ حلاً ناطقاً للمعادلة مع $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{N}^*$ و $\gcd(p,q) = 1$. لدينا :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0 \iff p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3 = 0$$

منه نستنتج أنّ $q^3 = p\left(p^2 + pq - 2q^2\right)$ و $p^3 = q\left(q^2 + 2pq - p^2\right)$ و بالتالي $q \mid p$ و $p \mid q$.

لكن $\gcd(p,q) = 1$ إذن $|p| = 1$ و $|q| = 1$ أي $z = \pm 1$ و هذا يعني أنّ المعادلة (6) تقبل 1− و 1 حلّين لها و هذا تناقض!

إذن حلول المعادلة (6) لا تنتمي إلى $\mathbb{Q}$.

■

122 أوجد جذور كثير الحدود $P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. مفتاح الحلّ هو ملاحظة أنّ $1+X+X^2+\cdots+X^n=\dfrac{1-X^n}{1-X}$ (مجموع الحدود الأولى لمتتالية هندسية). لدينا :

$$\begin{aligned}(1-X)\,P(X)&=(1-X)\left(1+X+X^2+X^3+X^4+X^5\right)\\&=1-X^6\\&=\left(1-X^3\right)\left(1+X^3\right)\\&=(1-X)\left(1+X+X^2\right)(1+X)\left(1-X+X^2\right)\end{aligned}$$

لكن $P(1)=6\neq 0$ أي 1 ليس جذراً لكثير الحدود $P(X)$ و بقسمة الطرفين على $1-X$ ينتج :

$$P(X)=\left(1+X+X^2\right)(1+X)\left(1-X+X^2\right)$$

مميّز $1+X+X^2$ هو $\Delta=1-4=-3<0$ إذن ليس له جذور حقيقية. بالمثل، $1-X+X^2$ ليس له جذور في $\mathbb{R}$ لأنّ مميّزه $\Delta=1-4=-3<0$ و بالتالي فالجذر **الحقيقي** الوحيد لـ $P(X)$ هو -1 .

في المجموعة $\mathbb{C}$ ، جذراً $1+X+X^2$ هما $j=e^{2\imath\pi/3}$ و $\bar{j}=j^2$ ، و جذراً $1-X+X^2$ هما $-j$ و $-\bar{j}$ و بالتالي فلكثير الحدود $P(X)$ خمسة جذور مركبة هي -1 ، j ، $\bar{j}$ ، $-j$ و $-\bar{j}$ أي :

$$P(X)=(1+X)\left(1+X+X^2\right)\left(1-X+X^2\right)=(X+1)(X-j)\left(X-\bar{j}\right)(X+1)(X+j)\left(X+\bar{j}\right)$$

■

123 حلل كثير الحدود $P(X)=1+X+X^2+X^3+X^4$ في المجموعة $\mathbb{C}$ ثمّ في $\mathbb{R}$.

الحلّ. لدينا :

$$(X-1)\,P(X)=(X-1)\left(1+X+X^2+X^3+X^4\right)=X^5-1$$

إذن، جذور $(X-1)\,P(X)$ هي الجذور الخامسة للوحدة أي الأعداد $e^{2\imath k\pi/5}$ مع $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

لكن $P(1)=5\neq 0$ أي 1 ليس جذراً لكثير الحدود $P(X)$ و هذا يعني أنّ جذور $P(X)$ هي الأعداد $e^{2\imath k\pi/5}$ مع $k\in\{1,2,3,4\}$ أي $e^{2\imath\pi/5}$ ، $e^{4\imath\pi/5}$ ، $e^{6\imath\pi/5}=e^{-4\imath\pi/5}$ و $e^{8\imath\pi/5}=e^{-2\imath\pi/5}$ و بالتالي فإنّ :

$$\boxed{P(X)=\left(X-e^{2\imath\pi/5}\right)\left(X-e^{-2\imath\pi/5}\right)\left(X-e^{4\imath\pi/5}\right)\left(X-e^{-4\imath\pi/5}\right)}$$

و هو تحليل $P(X)$ في المجموعة $\mathbb{C}$.

للحصول على تحليل $P(X)$ في المجموعة $\mathbb{R}$ يكفي أخذ كلّ حدّين مترافقين :

$$\begin{aligned}\left(X-e^{2\imath\pi/5}\right)\left(X-e^{-2\imath\pi/5}\right)&=X^2-\left(e^{2\imath\pi/5}+e^{-2\imath\pi/5}\right)+e^{2\imath\pi/5}\cdot e^{-2\imath\pi/5}\\&=X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\left(X-e^{4\imath\pi/5}\right)\left(X-e^{-4\imath\pi/5}\right)&=X^2-\left(e^{4\imath\pi/5}+e^{-4\imath\pi/5}\right)+e^{4\imath\pi/5}\cdot e^{-4\imath\pi/5}\\&=X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+1\end{aligned}$$

منه

$$\boxed{P(X)=\left[X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1\right]\cdot\left[X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+1\right]}$$

و هو تحليل $P(X)$ في المجموعة $\mathbb{R}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

124

فيما يلي، $f(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z .

- أثبت أنّ المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلاً حقيقياً α .
- أوجد الأعداد المركبة a ، b ، c التي تحقق من أجل كل عدد مركب z : $f(z)=(z-\alpha)\left(az^2+bz+c\right)$.
- حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=0$.

في كل حالة من الحالات الآتية :

1. $f(z)=z^3+(3+5\imath)z^2+(6+15\imath)z+18$
2. $f(z)=z^3-(11+2\imath)z^2+2(17+7\imath)z-42$
3. $f(z)=z^3+(2\imath-5)z^2+7(1-\imath)z-2+6\imath$
4. $f(z)=\imath z^3+(2\imath-1)z^2-(\imath+4)z+3(2\imath-1)$
5. $f(z)=z^3+2(3-2\imath)z^2+(8-15\imath)z+3-11\imath$
6. $f(z)=4z^3-6\imath\sqrt{3}z^2-3\left(3+\imath\sqrt{3}\right)z-4$

الحلّ. لإيجاد الحل الحقيقي، نستعمل الخاصية التالية :

إذا كان $z=u+\imath v$ عدداً مركباً بحيث $u,v\in\mathbb{R}$ فإنّ : $z=0$ إذا و فقط إذا كان $u=v=0$.

1. • ليكن α حلاً حقيقياً للمعادلة : $f(z)=0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \alpha^3+(3+5\imath)\alpha^2+(6+15\imath)\alpha+18=0\\ &\iff \alpha^3+3\alpha^2+6\alpha+18+\left(5\alpha^2+15\alpha\right)\imath=0\\ &\iff \begin{cases}\alpha^3+3\alpha^2+6\alpha+18=0\\ 5\alpha^2+15\alpha=0\end{cases}\end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نجد أنّ $\alpha=0$ أو $\alpha=-3$ و عند التعويض نجد أنّ $\alpha=-3$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الأولى.

إذن ، المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلاً حقيقياً و هو $\alpha=-3$.

- لدينا :

$$\begin{aligned} f(z)&=(z+3)\left(az^2+bz+c\right)\\ &=az^3+(b+3a)z^2+(c+3b)z+3c\\ &=z^3+(3+5\imath)z^2+(6+15\imath)z+18\end{aligned}$$

بالمطابقة نستنتج أنّ $a=1$ و $b+3a=3+5\imath$ و $c+3b=6+15\imath$ و $3c=18$ أي $a=1$ و $b=5\imath$ و $c=6$.

إذن : $f(z)=(z+3)\left(z^2+5\imath z+6\right)$.

- لدينا :

$$f(z)=0 \iff z+3=0 \quad \text{أو} \quad z^2+5\imath z+6=0$$

للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z=-3$ (و هو الحل الحقيقي الذي وجدناه أعلاه).

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

مُميِّز المعادلة الثانية هو :

$$\Delta = (5\imath)^2 - 4\times 6 = -49 = (7\imath)^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما : $z_1 = \dfrac{-5\imath - 7\imath}{2} = -6\imath$ و $z_2 = \dfrac{-5\imath + 7\imath}{2} = \imath$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ هي : $\mathscr{S} = \{-3, \imath, -6\imath\}$.

2• • ليكن α حلاًّ حقيقياً للمعادلة : $f(z) = 0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha^3 - (11 + 2\imath)\alpha^2 + 2(17 + 7\imath)\alpha - 42 = 0 \\ &\iff \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 + \left(-2\alpha^2 + 14\alpha\right)\imath = 0 \\ &\iff \begin{cases} \alpha^3 + -11\alpha^2 + 34\alpha - 42 = 0 \\ -2\alpha^2 + 14\alpha = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نجد أنّ $\alpha = 0$ أو $\alpha = 7$ و عند التعويض نجد أنّ $\alpha = 7$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الأولى.

إذن ، المعادلة $f(z) = 0$ تقبل حلاًّ حقيقياً و هو $\alpha = 7$.

• لدينا :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-7)\left(az^2 + bz + c\right) \\ &= az^3 + (b - 7a)z^2 + (c - 7b)z - 7c \\ &= z^3 - (11 + 2\imath)z^2 + 2(17 + 7\imath)z - 42 \end{aligned}$$

بالمطابقة نستنتج أنّ $a = 1$ و $b - 7a = -11 - 2\imath$ و $c + 3b = 34 + 14\imath$ و $-7c = -42$ أي $a = 1$ و $b = -4 - 2\imath$ و $c = 6$.

إذن : $f(z) = (z-7)\left(z^2 - (4 + 2\imath)z + 6\right)$.

• لدينا :

$$f(z) = 0 \iff z + 3 = 0 \quad \text{أو} \quad z^2 - (4 + 2\imath)z + 6 = 0$$

للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z = 7$ (و هو الحل الحقيقي الذي وجدناه أعلاه).

مُميِّز المعادلة الثانية هو :

$$\Delta = (-(4 + 2\imath))^2 - 4\times 6 = -12 + 16\imath = 4(-3 + 4\imath) = 4(1 + 2\imath)^2 = (2 + 4\imath)^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما : $z_1 = \dfrac{4 + 2\imath + 2 + 4\imath}{2} = 3 + 3\imath$ و $z_2 = \dfrac{4 + 2\imath - 2 - 4\imath}{2} = 1 - \imath$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ هي : $\mathscr{S} = \{7, 1 - \imath, 3 + 3\imath\}$.

3• • ليكن α حلاًّ حقيقياً للمعادلة : $f(z) = 0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\iff \alpha^3 + (-5 + 2\imath)\alpha^2 + 7(1 - \imath)\alpha - 2 + 6\imath = 0 \\ &\iff \alpha^3 - 5\alpha^2 + 7\alpha - 2 + \left(2\alpha^2 - 7\alpha + 6\right)\imath = 0 \\ &\iff \begin{cases} \alpha^3 - 5\alpha^2 + 7\alpha - 2 = 0 \\ 2\alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نجد أنّ $\alpha = 2$ أو $\alpha = \dfrac{3}{2}$ و عند التعويض نجد أنّ $\alpha = 2$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الأولى.

إذن ، المعادلة $f(z) = 0$ تقبل حلاًّ حقيقياً و هو $\alpha = 2$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- لدينا :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-2)\left(az^2+bz+c\right) \\ &= az^3+(b-2a)z^2+(c-2b)z-2c \\ &= z^3+(-5+2\imath)z^2+7(1-\imath)z-2+6\imath \end{aligned}$$

بالمطابقة نستنتج أنّ $a=1$ و $b-2a=-5+2\imath$ و $c-2b=7-7\imath$ و $-2c=-2+6\imath$ أي $a=1$ و $b=-3+2\imath$ و $c=1-3\imath$.

إذن : $f(z)=(z-2)\left(z^2+5(-3+2\imath)z+1-3\imath\right)$.

- لدينا :

$$f(z)=0 \iff z-2=0 \quad \text{أو} \quad z^2+5(-3+2\imath)z+1-3\imath=0$$

للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z=2$ (و هو الحل الحقيقي الذي وجدناه أعلاه).

مُميِّز المعادلة الثانية هو :

$$\Delta=(-3+2\imath)^2-4(1-3\imath)=1$$

و بالتالي لها حلاّن هما : $z_1=\dfrac{3-2\imath-1}{2}=1-\imath$ و $z_2=\dfrac{3-2\imath+1}{2}=2-\imath$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة $f(z)=0$ هي : $\mathscr{S}=\{2,1-\imath,2-\imath\}$.

4• • ليكن α حلاًّ حقيقياً للمعادلة : $f(z)=0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \imath\alpha^3+(-1+2\imath)\alpha^2-(4+\imath)\alpha+3(-1+2\imath)=0 \\ &\iff -\alpha^2-4\alpha-3+\left(\alpha^3+2\alpha^2-\alpha+6\right)\imath=0 \\ &\iff \begin{cases} -\alpha^2-4\alpha-3=0 \\ \alpha^3+2\alpha^2-\alpha+6=0 \end{cases} \end{aligned}$$

من المعادلة الأولى نجد أنّ $\alpha=-1$ أو $\alpha=-3$ و عند التعويض نجد أنّ $\alpha=-3$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الثانية.

إذن ، المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلاًّ حقيقياً و هو $\alpha=-3$.

- لدينا :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+3)\left(az^2+bz+c\right) \\ &= az^3+(b+3a)z^2+(c+3b)z+3c \\ &= \imath z^3+(-1+2\imath)z^2-(4+\imath)z+3(-1+2\imath) \end{aligned}$$

بالمطابقة نستنتج أنّ $a=\imath$ و $b+3a=-1+2\imath$ و $c+3b=-4-\imath$ و $3c=-3+6\imath$ أي $a=\imath$ و $b=-1-\imath$ و $c=-1+2\imath$.

إذن : $f(z)=(z+3)\left(z^2-(1+\imath)z-1+2\imath\right)$.

- لدينا :

$$f(z)=0 \iff z+3=0 \quad \text{أو} \quad z^2-(1+\imath)z-1+2\imath=0$$

للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z=-3$ (و هو الحل الحقيقي الذي وجدناه أعلاه).

مُميِّز المعادلة الثانية هو :

$$\Delta=(-1-\imath)^2-4\imath(-1+2\imath)=8+6\imath=(3+\imath)^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما : $z_1=\dfrac{1+\imath-3-\imath}{2\imath}=-\dfrac{1}{\imath}=\imath$ و $z_2=\dfrac{1+\imath+3+\imath}{2\imath}=1-2\imath$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة $f(z)=0$ هي : $\mathscr{S}=\{-3,\imath,1-2\imath\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

5• • ليكن α حلاً حقيقياً للمعادلة : $f(z)=0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \alpha^3+2(3-2\imath)\alpha^2+(8-15\imath)\alpha+3-11\imath=0 \\ &\iff \alpha^3+6\alpha^2+8\alpha+3+\left(-4\alpha^2-15\alpha-11\right)\imath=0 \\ &\iff \begin{cases} \alpha^3+6\alpha^2+8\alpha+3=0 \\ -4\alpha^2-15\alpha-11=0 \end{cases} \end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نجد أنّ $\alpha=-1$ أو $\alpha=-\frac{11}{4}$ و عند التعويض نجد أنّ $\alpha=-1$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الأولى.

إذن ، المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلاً حقيقياً و هو $\alpha=-1$.

• لدينا :

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+1)\left(az^2+bz+c\right) \\ &= az^3+(b+a)z^2+(c+b)z+c \\ &= z^3+2(3-2\imath)z^2+(8-15\imath)z+3-11\imath \end{aligned}$$

بالمطابقة نستنتج أنّ $a=1$ و $b+a=6-4\imath$ و $c+b=8-15\imath$ و $c=3-11\imath$ أي $a=1$ و $b=5-4\imath$ و $c=3-11\imath$.

إذن : $f(z)=(z+1)\left(z^2+(5-4\imath)z+3-11\imath\right)$.

• لدينا :

$$f(z)=0 \iff z+1=0 \quad \text{أو} \quad z^2+(5-4\imath)z+3-11\imath=0$$

للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z=-1$ (و هو الحل الحقيقي الذي وجدناه أعلاه).

مُميِّز المعادلة الثانية هو :

$$\Delta=(5-4\imath)^2-4(3-11\imath)=-3+4\imath=(1+2\imath)^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما :

$$z_1=\frac{-5+4\imath-1-2\imath}{2}=-3+\imath \quad \text{و} \quad z_2=\frac{-5+4\imath+1+2\imath}{2}=-2+3\imath \ .$$

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة $f(z)=0$ هي : $\mathscr{S}=\{-1,-3+\imath,-2+3\imath\}$.

6• • ليكن α حلاً حقيقياً للمعادلة : $f(z)=0$. لدينا :

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff 4\alpha^3-6\imath\sqrt{3}\alpha^2-3\left(3+\imath\sqrt{3}\right)\alpha-4=0 \\ &\iff 4\alpha^3-9\alpha-4+\left(-6\sqrt{3}\alpha^2-3\sqrt{3}\alpha\right)\imath=0 \\ &\iff \begin{cases} 4\alpha^3-9\alpha-4=0 \\ -6\sqrt{3}\alpha^2-3\sqrt{3}\alpha=0 \end{cases} \end{aligned}$$

من المعادلة الثانية نجد أنّ $\alpha=0$ أو $\alpha=-\frac{1}{2}$ و عند التعويض نجد أنّ $\alpha=-\frac{1}{2}$ هو الوحيد الذي يُحقق المعادلة الأولى.

إذن ، المعادلة $f(z)=0$ تقبل حلاً حقيقياً و هو $\alpha=-\frac{1}{2}$.

• لدينا :

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(az^2+bz+c\right) \\ &= az^3+\left(b+\frac{a}{2}\right)z^2+\left(c+\frac{b}{2}\right)z+\frac{c}{2} \\ &= 4z^3-6\imath\sqrt{3}z^2-3\left(3+\imath\sqrt{3}\right)z-4 \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بالمطابقة نستنتج أنّ $a = 4$ و $b + \frac{a}{2} = -6\imath\sqrt{3}$ و $c + \frac{b}{2} = -9 - 3\imath\sqrt{3}$ و $\frac{c}{2} = -4$ أي $a = 4$ و $b = -2 - 6\imath\sqrt{3}$ و $c = -8$.

إذن : $f(z) = \left(z + \frac{1}{2}\right)\left(4z^2 - \left(2 + 6\imath\sqrt{3}\right)z - 8\right)$.

• لدينا :

$$f(z) = 0 \iff z + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{أو} \quad 4z^2 - \left(2 + 6\imath\sqrt{3}\right)z - 8 = 0$$

للمعادلة الأولى حلّ وحيد هو $z = -\frac{1}{2}$ (و هو الحل الحقيقي الذي وجدناه أعلاه).

مُميِّز المعادلة الثانية هو :

$$\Delta = \left(-2 - 6\imath\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 4(-8) = 24 + 24\sqrt{3} = \left(6 + 2\imath\sqrt{3}\right)^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما :

$z_1 = \frac{2 + 6\imath\sqrt{3} - 6 - 2\imath\sqrt{3}}{2 \times 4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath$ و $z_2 = \frac{2 + 6\imath\sqrt{3} + 6 + 2\imath\sqrt{3}}{2 \times 4} = 1 + \imath\sqrt{3}$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ هي : $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2}, 1 + \imath\sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right\}$.

■

125 أكتب كلا من العبارات الآتية على شكل عبارة خطية :

1. $\cos^5 x$ و $\sin^5 x$
2. $\cos^6 x$ و $\sin^6 x$
3. $\cos^3 x \cdot \sin^4 x + \sin^3 x \cdot \cos^4 x$
4. $16\cos^4 x \sin^3 x + 8\cos^3 x \sin^2 x$

الحلّ. نضع $z = e^{\imath x}$ و نُطبّق صِيَغ **أولر**.

1. (أ) لدينا :

$$\begin{aligned}
\cos^5 x &= \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^5 \\
&= \frac{1}{32}\left(z^5 + 5z^4 \times \frac{1}{z} + 10z^3 \times \frac{1}{z^2} + 10z^2 \times \frac{1}{z^3} + 5z \times \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left[\left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{32}\left[2\cos 5x + 5 \times 2\cos 3x + 10 \times 2\cos x\right]
\end{aligned}$$

منه :

$$\boxed{\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ب) بالمثل :

$$\sin^5 x = \left[\frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^5$$
$$= \frac{1}{32\imath}\left(z^5 - 5z^4\times\frac{1}{z} + 10z^3\times\frac{1}{z^2} - 10z^2\times\frac{1}{z^3} + 5z\times\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5}\right)$$
$$= \frac{1}{32\imath}\left[\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right) - 5\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{32\imath}\left[2\imath\sin 5x - 5\times 2\imath\sin 3x + 10\times 2\imath\cos x\right]$$

منه :
$$\boxed{\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x}$$

2• (ا) لدينا :

$$\cos^6 x = \left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]^6$$
$$= \frac{1}{64}\left(z^6 + 6z^5\times\frac{1}{z} + 15z^4\times\frac{1}{z^2} + 20z^3\times\frac{1}{z^3} + 15z^2\times\frac{1}{z^4} + 6z\times\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\right)$$
$$= \frac{1}{64}\left[\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) + 20\right]$$
$$= \frac{1}{64}\left[2\cos 6x + 6\times 2\cos 4x + 15\times 2\cos 2x + 20\right]$$

منه :
$$\boxed{\cos^6 x = \frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x + \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}}$$

(ب) بالمثل :

$$\sin^6 x = \left[\frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]^6$$
$$= -\frac{1}{64}\left(z^6 - 6z^5\times\frac{1}{z} + 15z^4\times\frac{1}{z^2} - 20z^3\times\frac{1}{z^3} + 15z^2\times\frac{1}{z^4} - 6z\times\frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^6}\right)$$
$$= -\frac{1}{64}\left[\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right) - 6\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) - 20\right]$$
$$= -\frac{1}{64}\left[2\cos 6x - 6\times 2\cos 4x + 15\times 2\cos 2x - 20\right]$$

منه :
$$\boxed{\sin^6 x = -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}}$$

3• • لدينا من جهة :

$$\cos^3 x\cdot\sin^4 x = \frac{1}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)^3\cdot\frac{1}{16}\left(z-\frac{1}{z}\right)^4$$
$$= \frac{1}{128}\left(z^3+\frac{1}{z^3}+3z+\frac{3}{z}\right)\left(z^4+\frac{1}{z^4}-4z^2-\frac{4}{z^2}+6\right)$$
$$= \frac{1}{128}\left[\left(z^7+\frac{1}{z^7}\right) - \left(z^5+\frac{1}{z^5}\right) - 3\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{64}\left[\cos 7x - \cos 5x - 3\cos 3x + 3\cos x\right]$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• و من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\sin^3 x\cdot\cos^4 x &= -\frac{1}{8\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)^3\cdot\frac{1}{16}\left(z+\frac{1}{z}\right)^4\\ &= -\frac{1}{128\imath}\left(z^3-\frac{1}{z^3}+3z-\frac{3}{z}\right)\left(z^4+\frac{1}{z^4}+4z^2+\frac{4}{z^2}+6\right)\\ &= -\frac{1}{128\imath}\left[\left(z^7-\frac{1}{z^7}\right)+\left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-3\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)-3\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{64}\left[\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x\right]\end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\boxed{\cos^3 x\cdot\sin^4 x+\sin^3 x\cdot\cos^4 x=\tfrac{1}{64}\left[\cos 7x-\sin 7x-\cos 5x-\sin 5x+3\cos 3x-3\sin 3x-3\cos x-3\sin x\right]}$$

4• • وجدنا في السؤال السابق أنّ :

$$\sin^3 x\cdot\cos^4 x=-\frac{1}{64}\left[\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x\right]$$

$$16\cos^4 x\cdot\sin^3 x=-\frac{1}{4}\left[\sin 7x+\sin 5x-3\sin 3x-3\sin x\right]$$ منه :

• و من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}\cos^3 x\cdot\sin^2 x &= \frac{1}{8}\left(z+\frac{1}{z}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\left(z-\frac{1}{z}\right)^2\\ &= -\frac{1}{32}\left(z^3+\frac{1}{z^3}+3z+\frac{3}{z}\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}-2\right)\\ &= -\frac{1}{32}\left[\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)-2\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]\\ &= -\frac{1}{32}\left[2\cos 5x+2\cos 3x-4\cos x\right]\\ &= -\frac{1}{16}\left[\cos 5x+\cos 3x-2\cos x\right]\end{aligned}$$

$$8\cos^3 x\cdot\sin^2 x=-\frac{1}{2}\left[\cos 5x+\cos 3x-2\cos x\right]$$ منه :

في الأخير :

$$\boxed{16\cos^4 x\cdot\sin^3 x+8\cos^3 x\cdot\sin^2 x=-\tfrac{1}{4}\left[\sin 7x+\sin 5x+2\cos 5x-3\sin 3x+2\cos 3x-3\sin x-4\cos x\right]}$$

■

126 باستعمال دستور **موافر** مع القيمة $n=4$ أثبت أنّ $\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ ثمّ استنتج أنّ $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. لدينا من جهة، حسب دستور **موافر** $e^{4\imath\theta}=\cos 4\theta+\imath\sin 4\theta$ ، و من جهة أخرى، حسب مفكوك ثنائي الحد :

$$\begin{aligned}e^{4\imath\theta}&=(\cos\theta+\imath\sin\theta)^4\\&=\cos^4\theta+4\imath\cos^3\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta-4\imath\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\end{aligned}$$

منه :

$$\begin{aligned}\cos 4\theta&=\operatorname{Re}\left(e^{4\imath\theta}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(\cos^4\theta+4\imath\cos^3\theta\sin\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta-4\imath\cos\theta\sin^3\theta+\sin^4\theta\right)\\&=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta\\&=\cos^4\theta-6\cos^2\left(1-\cos^2\theta\right)+\left(1-\cos^2\theta\right)^2\\&=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1\end{aligned}$$

الآن، و بالتعويض عن θ بالقيمة $\frac{\pi}{8}$ (و بوضع $c=\cos\frac{\pi}{8}$) نجد :

$$0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{4\pi}{8}=8c^4-8c^2+1$$

و هي معادلة مضاعفة التربيع في المجهول c . لحلها، نضع $x=c^2$ فيكون $8x^2-8x+1=0$ منه $c^2=x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{8}$

أي $c^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ و بالتالي $c=\cos\frac{\pi}{8}=\pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. لكن $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ منه $c>0$ أي

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$.

■

127 أكتب $\cos 5\theta$ على شكل كثير حدود في $\cos\theta$. إستنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{10}$.

الحلّ. نتّبع الطريقة المعروضة في الدرس (صفحة 47) :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta+\imath\sin 5\theta&=(\cos\theta+\imath\sin\theta)^5\\&=\cos^5\theta+5(\cos\theta)^4(\imath\sin\theta)+10(\cos\theta)^3(\imath\sin\theta)^2\\&\quad+10(\cos\theta)^2(\imath\sin\theta)^3+5(\cos\theta)(\imath\sin\theta)^4+(\imath\sin\theta)^5\\&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\cdot\sin^2\theta+5\cos\theta\cdot\sin^4\theta\\&\quad+\imath\left(5\cos^4\theta\cdot\sin\theta-10\cos^2\theta\cdot\sin^3\theta+\sin^5\theta\right)\end{aligned}$$

إذن :

$$\begin{aligned}\cos 5\theta&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\cdot\sin^2\theta+5\cos\theta\cdot\sin^4\theta\\&=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right)+5\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2\\&=\boxed{16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta}\end{aligned}$$

نأخذ $\theta=\frac{\pi}{10}$ و نضع $x=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ فيكون :

$$0=\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(5\frac{\pi}{10}\right)=16x^5-20x^3+5x=x\left(16x^4-20x^2+5\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

حلول المعادلة $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$ هي 0 ، $\pm 0.95 \approx \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ و $\pm 0.59 \approx \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$. و بما أنّ $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{4}$ فإنّ $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\frac{\pi}{10} < 1$ و $0.71 \approx \frac{\sqrt{2}}{2}$ فإنّ $x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ هو الحل الوحيد الذي يُحقق هذه الشروط إذن :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}} \quad \text{أي} \quad \boxed{\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} .$$

■

128 باستعمال دستور **موافر**، أثبت أنّ : $\tan 5\theta = \frac{\tan^5\theta - 10\tan^3\theta + 5\tan\theta}{5\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 1}$ ثمّ استنتج قِيَم $\tan\frac{n\pi}{10}$ لأجل $n \in \{1,2,3,4\}$.

الحلّ. لدينا من جهة، حسب دستور **موافر** $e^{5\imath\theta} = \cos 5\theta + \imath \sin 5\theta$ ، و من جهة أخرى، حسب مفكوك ثنائي الحد :

$$\begin{aligned} e^{5\imath\theta} &= (\cos\theta + \imath\sin\theta)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5\imath\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10\imath\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + \imath\sin^5\theta \end{aligned}$$

منه :

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \mathrm{Re}\left(e^{5\imath\theta}\right) \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2 \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \\ \sin 5\theta &= \mathrm{Im}\left(e^{5\imath\theta}\right) \\ &= 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta \\ &= 5\left(1-\sin^2\theta\right)^2\sin\theta - 10\left(1-\sin^2\theta\right)^2\sin^3\theta + \sin^5\theta \\ &= 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned} \tan 5\theta &= \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} \\ &= \frac{16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta}{16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta} \\ &= \frac{16\tan^5\theta - 20\tan^3\theta\cos^{-2}\theta + 5\tan\theta\cos^{-4}\theta}{16 - 20\cos^{-2}\theta + 5\cos^{-4}\theta} \\ &\qquad \text{(بقسمة البسط و المقام على } \cos^5\theta\text{)} \\ &= \frac{16\tan^5\theta - 20\tan^3\theta\left(1+\tan^2\theta\right) + 5\tan\theta\left(1+\tan^2\theta\right)^2}{16 - 20\left(1+\tan^2\theta\right) + 5\left(1+\tan^2\theta\right)^2} \\ &\qquad \left(\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \text{ لأنّ}\right) \\ &= \frac{\tan^5\theta - 10\tan^3\theta + 5\tan\theta}{5\tan^4\theta - 10\tan^2\theta + 1} \end{aligned}$$

- عندما $\theta = \frac{\pi}{10}$ فإنّ $\theta = +\infty$ و عندما $\tan 5\theta = \tan\frac{\pi}{2} = +\infty$ يكون $\theta = \frac{3\pi}{10}$ و بالتالي فإنّ مقام الكسر السابق يجب أن يكون معدوماً (لأنّ قيمة البسط منتهية) أي $5t^4 - 10t^2 + 1 = 0$ حيث $t = \tan\theta$. هذه

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

المعادلة مضاعفة التربيع، حلولها هي $t^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-5}}{5}$ منه $t = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{5}}$ لكن و بما أنّ هاتين الزاويتين تقعان في الربع الأول من المستوي فإنّ الجيوب (sin) و جيوب التمام (cos) موجبة منه $t = \tan\theta \geq 0$ و بما أنّ دالة الظل (tan) متزايدة فإنّ $\tan\frac{3\pi}{10} > \tan\frac{\pi}{10}$ منه :

$$\tan\frac{3\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5} \quad \text{و} \quad \tan\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

- عندما $\theta = \frac{2\pi}{10}$ أو $\theta = \frac{4\pi}{10}$ فإنّ $\tan 5\theta = 0$ و بالتالي فإنّ بسط الكسر السابق يجب أن يكون معدوماً (لأنّ المقام غير معدوم) أي $t^5 - 10t^3 + 5t = 0$ حيث $t = \tan\theta$.

$$\begin{aligned} t^5 - 10t^3 + 5t = 0 &\iff t\left(t^4 - 10t^2 + 5\right) = 0 \\ &\iff t = 0 \quad \text{أو} \quad t^4 - 10t^2 + 5 = 0 \\ &\iff t = 0 \quad \text{أو} \quad t^2 = 5 \pm \sqrt{25-5} \\ &\iff t = 0 \quad \text{أو} \quad t = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

لكن و بما أنّ هاتين الزاويتين تقعان في الربع الأول من المستوي فإنّ الجيوب (sin) و جيوب التمام (cos) موجبة منه $t = \tan\theta \geq 0$ و بما أنّ دالة الظل (tan) متزايدة فإنّ $\tan\frac{4\pi}{10} > \tan\frac{2\pi}{10}$ منه

$$\tan\frac{4\pi}{10} = \sqrt{5+2\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad \tan\frac{2\pi}{10} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

($\tan\theta \neq 0$ لأجل $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{10}, \frac{4\pi}{10}\right\}$ لذا فإنّ الحل $t = 0$ مستبعد) .

■

129 ليكن $m \geq 1$ عدداً طبيعيا غير معدوم؛ x و a عددين حقيقيين. أثبت أنّ :

$$x^{2m+1} - a^{2m+1} = (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2 - 2ax\cos\left(\frac{2k\pi}{2m+1}\right) + a^2\right]$$

الحلّ. نضع $f(x) = x^{2m+1} - a^{2m+1}$ و $\Omega = \exp\left(\frac{2\pi\imath}{2m+1}\right)$ (جذر من الرتبة $2m+1$ للوحدة).
حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي الجذور من الرتبة $2m+1$ للعدد a^{2m+1} ، و بما أنّ $x = a$ هي إحدى هذه الحلول فإنّ الحلول هي $x_k = a\Omega^k$ حيث $k \in \{0, 1, 2, \cdots, 2m\}$. و بما أنّ درجة كثير الحدود $f(x)$ هي $2m+1$ و عدد هذه الحلول هو $2m+1$ فإننا نكون قد وجدنا جميع الحلول؛ و بالتالي بإمكاننا كتابة كثير الحدود $f(x)$ على الشكل $f(x) = c\cdot\prod_{k=0}^{2m}(x - x_k)$ حيث c هو معامل وحيد الحد ذي الأكبر درجة أي $c = 1$ منه :

$$f(x) = (x-a)\underbrace{(x-a\Omega)\left(x-a\Omega^2\right)\cdots\left(x-a\Omega^m\right)}_{m \text{ حدّاً}}\underbrace{\left(x-a\Omega^{m+1}\right)\cdots\left(x-a\Omega^{2m}\right)}_{m \text{ حدّاً}}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

باستثناء الحد $x-a$ ، فإنّ كلّ حدّ من الشكل $x-a\Omega^k$ يُقابله الحدّ $x-a\Omega^{2m+1-k}$ حيث $k\in\{1,2,\cdots m-1,m\}$ و بالتالي (نُذكّر أنّ $\Omega^{2m+1}=1$ و $\overline{\Omega}=\Omega^{-1}$) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left(x-a\Omega^k\right)\left(x-a\Omega^{2m+1-k}\right)\\
&= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2-ax\left(\Omega^k+\Omega^{2m+1-k}\right)+a^2\Omega^{2m+1}\right]\\
&= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2-ax\left(\Omega^k+\Omega^{-k}\right)+a^2\times 1\right]\\
&= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2-ax\left(\Omega^k+\overline{\Omega^k}\right)+a^2\right]\\
&= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2-2ax\,\mathrm{Re}\left(\Omega^k\right)+a^2\right]\\
&= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2-2ax\,\mathrm{Re}\left(e^{2k\imath\pi/(2m+1)}\right)+a^2\right]\\
&= (x-a)\prod_{k=1}^{m}\left[x^2-2ax\cos\left(\frac{2k\pi}{2m+1}\right)+a^2\right]
\end{aligned}$$

و هو المطلوب. ■

130 ☼ أكتب على شكل جداء كلاًّ من :

1. $\cos x+2\cos 2x+\cos 3x$
2. $\sin x+\sin 2x+\sin 7x+\sin 8x$

الحلّ.

1. لدينا : $\cos x+\cos 3x=2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cos\dfrac{x-3x}{2}=2\cos 2x\cos(-x)=2\cos x\cos 2x$

منه :
$$\begin{aligned}
\cos x+2\cos 2x+\cos 3x &= 2\cos 2x+2\cos x\cos 2x=2\cos 2x\,(1+\cos x)\\
&= 2\cos 2x\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)=4\cos 2x\cos^2\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

2. لدينا : $\sin x+\sin 8x=2\sin\dfrac{x+8x}{2}\cos\dfrac{x-8x}{2}=2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{7x}{2}$

و $\sin 2x+\sin 7x=2\sin\dfrac{2x+7x}{2}\cos\dfrac{2x-7x}{2}=2\sin\dfrac{9x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$

منه :
$$\begin{aligned}
\sin x+\sin 2x+\sin 7x+\sin 8x &= 2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{7x}{2}+2\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{5x}{2}\\
&= 2\sin\frac{9x}{2}\left(\cos\frac{7x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{9x}{2}\left(2\cos\frac{\frac{7x}{2}+\frac{5x}{2}}{2}\cos\frac{\frac{7x}{2}-\frac{5x}{2}}{2}\right)\\
&= 4\sin\frac{9x}{2}\cos 3x\cos\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

■

131 ☼

بسّط كلاً من :

1) $P = (2\cos x - 1)(2\cos 2x - 1)\cdots\left(2\cos\left(2^{n-1}x\right) - 1\right)$

2) $Q = \dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}$

الحلّ. 1) لدينا :

$$\left(2\cos\left(2^k x\right) - 1\right)\left(2\cos\left(2^k x\right) + 1\right) = 4\cos^2\left(2^k x\right) - 1 = 4\frac{1 + \cos\left(2^{k+1}x\right)}{2} - 1 = 2\cos\left(2^{k+1}x\right) + 1$$

منه $2\cos\left(2^k x\right) - 1 = \dfrac{2\cos\left(2^{k+1}x\right) + 1}{2\cos\left(2^k x\right) + 1}$. بوضع $a_k = 2\cos\left(2^k x\right) + 1$ يكون :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(2\cos\left(2^k x\right) - 1\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_1}{a_0}\times\frac{a_2}{a_1}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0} = \frac{2\cos\left(2^n x\right) + 1}{2\cos x + 1}$$

2) لدينا :

$$\begin{aligned}(2\cos x)(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x) &= 2\cos x\cos 5x + 10\cos x\cos 3x + 20\cos^2 x\\ &= (\cos(x + 5x) + \cos(x - 5x)) + 5(\cos(x + 3x) + \cos(x - 3x)) + 10(1 + \cos 2x)\\ &= \cos 6x + \cos 4x + 5\cos 4x + 5\cos 2x + 10 + 10\cos 2x\\ &= \cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\end{aligned}$$

منه : $Q = \dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x} = 2\cos x$

■

132 ☼

أوجد دالة أصلية لكل من الدوال الآتية :

1) $f_1(x) = \cos^2 x$
2) $f_2(x) = \cos^4 x$
3) $f_3(x) = \sin^4 x$
4) $f_4(x) = \cos^2 x\sin^2 x$
5) $f_5(x) = \sin^6 x$
6) $f_6(x) = \cos x\sin^6 x$
7) $f_7(x) = \cos^5 x\sin^2 x$
8) $f_8(x) = \cos^3 x$

الحلّ. مفتاح الحل هو صيغ **أولر** : $\cos x = \dfrac{1}{2}\left(e^{\imath x} + e^{-\imath x}\right)$ و $\sin x = \dfrac{1}{2\imath}\left(e^{\imath x} - e^{-\imath x}\right)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 1 لدينا :

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2\imath x} + 2e^{\imath x}e^{-\imath x} + e^{-2\imath x}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{2\imath x} + e^{-2\imath x} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\imath x} + e^{-2\imath x}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)$.

• 2 لدينا :

$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4\imath x} + 4e^{3\imath x}e^{-\imath x} + 6e^{2\imath x}e^{-2\imath x} + 4e^{\imath x}e^{-3\imath x} + e^{-4\imath x}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{4\imath x} + 4e^{2\imath x} + 6 + 4e^{-2\imath x} + e^{-4\imath x}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4\imath x} + e^{-4\imath x}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\imath x} + e^{-2\imath x}}{2}\right) + \frac{6}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

إذن إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^4 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$.

• 3 لدينا :

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4\imath x} - 4e^{3\imath x}e^{-\imath x} + 6e^{2\imath x}e^{-2\imath x} - 4e^{\imath x}e^{-3\imath x} + e^{-4\imath x}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(e^{4\imath x} - 4e^{2\imath x} + 6 - 4e^{-2\imath x} + e^{-4\imath x}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4\imath x} + e^{-4\imath x}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\imath x} + e^{-2\imath x}}{2}\right) + \frac{6}{16}$$
$$= \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

إذن إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^4 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$.

يمكن أيضاً ملاحظة أنّ :

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2 = \left(1 - \cos^2 x\right)^2 = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x$$

و استعمال نتيجة السؤالين السابقين.

• 4 لدينا $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$:

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{2\imath x} - e^{-2\imath x}}{2\imath}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{4\imath x} - 2e^{2\imath x}e^{-2\imath x} + e^{-4\imath x}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(e^{4\imath x} + e^{-4\imath x} - 2\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{4\imath x} + e^{-4\imath x}}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$$

منه $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$ و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 5 لدينا :

$$\sin^6 x = \left(\frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^6 = -\frac{1}{64}\left(e^{6\imath x} - 6e^{4\imath x} + 15e^{2\imath x} - 20 + 15e^{-2\imath x} - 6e^{-4\imath x} + e^{-6\imath x}\right)$$
$$= -\frac{1}{32}\left(\frac{e^{6\imath x} + e^{-6\imath x}}{2}\right) + \frac{6}{32}\left(\frac{e^{4\imath x} + e^{-4\imath x}}{2}\right) - \frac{15}{32}\left(\frac{e^{2\imath x} + e^{-2\imath x}}{2}\right) + \frac{20}{64}$$
$$= -\frac{1}{32}\cos 6x + \frac{3}{16}\cos 4x - \frac{15}{32}\cos 2x + \frac{5}{16}$$

و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \sin^6 x$ هي الدالة $x \mapsto -\frac{1}{192}\sin 6x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x$.

• 6 نضع $u(x) = \sin x$ منه $u'(x) = \cos x$ و $\cos x \sin^6 x = u^6(x)\,u'(x)$ و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{7}\sin^7 x$.

• 7 لدينا :

$$\cos^5 x \sin^2 x = \cos x\left(1 - \sin^2 x\right)^2 \sin^2 x = \cos x\left(\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x\right)$$
$$= u^2(x)\,u'(x) - 2u^4(x)\,u'(x) + u^6(x)\,u'(x)$$

حيث $u(x) = \sin x$.

و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$.

• 8 لدينا :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3\imath x} + 3e^{\imath x} + 3e^{-\imath x} + e^{-3\imath x}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3\imath x} + e^{-3\imath x}}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$$

و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^3 x$ هي الدالة $x \mapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right)$.

يمكن أيضاً ملاحظة أنّ $\cos^3 x = \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x = \cos x - \sin^2 x \cos x$ و بالتالي إحدى الدوال الأصلية للدالة $x \mapsto \cos^3 x$ هي الدالة $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

ملاحظة 31 : ◁ وجدنا أنّ كلاً من $g : x \mapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right)$ و $h : x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \cos^3 x$ لكن هذا لا يعني بالضرورة أنهما متساويتان بل كلّ ما نستطيع قوله هو أنه يوجد $c \in \mathbb{R}$ بحيث $g(x) = h(x) + c$. لإيجاد قيمة c يكفي إعطاء x قيمة معينة مثلاً $x = 0$ و نجد $g(0) = 0$ و $h(0) = 0$ منه $c = 0$ (أي صدفةً $g = h$!). ▷

■

133 ☼

أحسب : $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x\,dx$ و $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x\,dx$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. 1• بدايةً، نلاحظ أنّ الدالة $x \mapsto \cos^4 x \sin^6 x$ زوجية و بالتالي عبارتها الخطية زوجية أيضاً أي أنها لا تحتوي على دالة الجيب sin . لدينا :

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{e^{\imath x}+e^{-\imath x}}{2}\right)^4 \left(\frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{2\imath}\right)^6 \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4\imath x}+4e^{2\imath x}+6+4e^{-2\imath x}+e^{-4\imath x}\right)\times \\
&\qquad \times\left(\frac{-1}{64}\right)\left(e^{6\imath x}-6e^{4\imath x}+15e^{2\imath x}-20+15e^{-2\imath x}-6e^{-4\imath x}+e^{-6\imath x}\right) \\
&= -\frac{1}{1024}\Big(e^{10\imath x}-2e^{8\imath x}-3e^{6\imath x}+8e^{4\imath x}+2e^{2\imath x}-12+ \\
&\qquad +2e^{-2\imath x}+8e^{-4\imath x}-3e^{-6\imath x}-2e^{-8\imath x}+e^{-10\imath x}\Big) \\
&= -\frac{1}{512}\left(\frac{e^{10\imath x}+e^{-10\imath x}}{2}-2\cdot\frac{e^{8\imath x}+e^{-8\imath x}}{2}-3\cdot\frac{e^{6\imath x}+e^{-6\imath x}}{2}+\right. \\
&\qquad \left.+8\cdot\frac{e^{4\imath x}+e^{-4\imath x}}{2}+2\cdot\frac{e^{2\imath x}+e^{-2\imath x}}{2}-6\right) \\
&= -\frac{1}{512}\left(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6\right)
\end{aligned}$$

منه :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} -\frac{1}{512}\left(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6\right)dx \\
&= -\frac{1}{512}\left[\frac{1}{10}\sin 10x-\frac{1}{4}\sin 8x-\frac{1}{2}\sin 6x+2\sin 4x+\sin 2x-6x\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= -\frac{1}{512}\left[\frac{1}{10}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}(0-0)+\right. \\
&\qquad \left.+2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}-\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048} \simeq 0.014
\end{aligned}$$

2• لدينا :

$$\begin{aligned}
\cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x \left(1-\cos^2 x\right)^3 \sin x \\
&= \cos^4 x\left(1-3\cos^2 x+3\cos^4 x-\cos^6 x\right)\sin x \\
&= \cos^4 x \sin x-3\cos^6 x \sin x+3\cos^8 x \sin x-\cos^{10} x \sin x \\
&= -u(x)^4 u'(x)+3u(x)^6 u'(x)-3u(x)^8 u'(x)+u(x)^{10} u'(x)
\end{aligned}$$

حيث $u(x)=\cos x$ منه :

$$J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(-u(x)^4 u'(x)+3u(x)^6 u'(x)-3u(x)^8 u'(x)+u(x)^{10} u'(x)\right)dx$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$= \left[-\frac{1}{5}u(x)^5 + \frac{3}{7}u(x)^7 - \frac{1}{3}u(x)^9 + \frac{1}{11}u(x)^{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$
$$= \left[-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{3}{7}\cos^7 x - \frac{1}{3}\cos^9 x + \frac{1}{11}\cos^{11} x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1-9\sqrt{3}}{32}\right) + \frac{3}{7}\left(\frac{1-27\sqrt{3}}{128}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1-81\sqrt{3}}{512}\right) + \frac{1}{11}\left(\frac{1-243\sqrt{3}}{2048}\right)$$
$$= \frac{-8299 + 18441\sqrt{3}}{2365440} \simeq 0.01$$

■

134 أثبت أنّ $1 + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\tan 2x}{\tan x}$ ثمّ استنتج كتابة مبسّطة للجداء :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{\cos\left(2^k x\right)}\right)$$

الحلّ.

• ليكن $x \in \mathbb{R}$ بحيث $\cos x \neq 0$ ، $\sin x \neq 0$ و $\cos 2x \neq 0$. لدينا :

$$1 + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{1+\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{2\cos^2 x}{\cos 2x} = \frac{2\cos x \sin x \cos x}{\cos 2x \sin x} = \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \sin x}$$
$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = \tan 2x \times \frac{1}{\tan x} = \frac{\tan 2x}{\tan x}$$

و كحالة خاصة : $1 + \frac{1}{\cos x} = \frac{\tan x}{\tan(x/2)}$.

• نفرض أنه مهما كان $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ فإنّ $\cos\left(2^k x\right) \neq 0$.

← إذا كان $\cos(x/2) = 0$ فإنّ $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = -1$ منه $P_n = 0$ (الحدّ الأول في الجداء معدوم) .

← إذا كان $\sin(x/2) = 0$ فإنّ $\cos x = 1 - 2\sin^2 x = 1$ ، $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 - 1 = 1$ و بصفة عامة، مهما كان $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ فإنّ $\cos\left(2^k x\right) = 1$ منه :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{\cos\left(2^k x\right)}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{1}\right) = \prod_{k=0}^{n} 2 = 2^{n+1}$$

← نفرض أنّ $\cos(x/2) \neq 0$ و $\sin(x/2) \neq 0$. بما أنّ $\sin\left(2^k x\right) = 2\sin\left(2^{k-1}x\right)\cos\left(2^{k-1}x\right)$ فإنّه لكلّ $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ يكون $\sin\left(2^k x\right) \neq 0$ و بتطبيق المساواة المبرهنة أعلاه ينتج :

$$P_n = \frac{\cancel{\tan x}}{\tan(x/2)} \times \frac{\cancel{\tan 2x}}{\cancel{\tan x}} \times \cdots \times \frac{\tan 2^n x}{\cancel{\tan 2^{n-1} x}} = \frac{\tan 2^n x}{\tan(x/2)}$$

■

135 ليكن x عدداً حقيقيا و $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $\cos(kx) \neq 0$ لكل $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

1• أثبت أنّ : $\tan(k+1)x - \tan kx = \dfrac{\sin x}{\cos(k+1)x\cos kx}$.

2• بسِّط العبارة : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\cos kx \cos(k+1)x}$.

الحلّ. 1• لدينا :

$$\begin{aligned}\tan(k+1)x - \tan kx &= \frac{\sin(k+1)x}{\cos(k+1)x} - \frac{\sin kx}{\cos kx}\\ &= \frac{\sin(k+1)x\cos kx - \cos(k+1)x\sin kx}{\cos kx\cos(k+1)x}\\ &= \frac{\sin((k+1)x - kx)}{\cos kx\cos(k+1)x} = \frac{\sin x}{\cos kx\cos(k+1)x}\end{aligned}$$

2• (ا) إذا كان $\sin x \neq 0$ فإنّ $\dfrac{1}{\cos kx\cos(k+1)x} = \dfrac{\tan(k+1)x - \tan kx}{\sin x}$ منه :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\cos kx\cos(k+1)x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\tan(k+1)x - \tan kx}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}\sum_{k=1}^{n}(\tan(k+1)x - \tan kx)\\ &= \frac{1}{\sin x}[(\tan 2x - \tan x) + (\tan 3x - \tan 2x) + \cdots + (\tan(n+1)x - \tan nx)]\\ &= \frac{1}{\sin x}[\tan(n+1)x - \tan x] = \frac{\tan(n+1)x - \tan x}{\sin x}\end{aligned}$$

(ب) إذا كان $\sin x = 0$ فإنه لكل $h \in \mathbb{Z}$ يكون $\sin hx = 0$ ، إذن لكل $k \in \mathbb{N}$ لدينا :

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos((k+1)x - kx) = \cos(k+1)x\cos kx - \sin(k+1)x\sin kx\\ &= \cos(k+1)x\cos kx\end{aligned}$$

منه $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\cos kx\cos(k+1)x} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{n}{\cos x}$

■

136 ليكن x عدداً حقيقيا و $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث $\cos\left(2^k x\right) \neq 0$ لكل $k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$. نضع :

$$u_k = \frac{1}{2^k \cos x\cos 2x\cdots\cos\left(2^{k-1}x\right)}$$

نريد كتابة العدد u_k لأجل $k \geq 2$ على الشكل :

$$u_k = \frac{a_{k-1}}{2^{k-1}\cos x\cos 2x\cdots\cos\left(2^{k-2}x\right)} - \frac{a_k}{2^k\cos x\cos 2x\cdots\cos\left(2^{k-1}x\right)}$$

1• أثبت أنه في هذه الحالة : $a_{k-1} - a_k = 1 : 2\cos\left(2^{k-1}x\right)$.

2• أثبت أنه لأجل $h \geq 1$ فإنّ الأعداد $a_h = \cos\left(2^h x\right)$ تُحقق هذا الشرط.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3 تحقق من أنّ $u_1 = \cos x - \dfrac{a_1}{2\cos x}$.

• 4 إستنتج كتابة مبسطة للمجموع : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)}$.

الحلّ.

• 1 يكفي توحيد المقامات للحصول على المطلوب، حيث أنّ المقام المشترك هو $2\cos\left(2^{k-1}x\right)$ (غير المعدوم) $2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)$ ، فبضرب الحد الأول بسطاً و مقاماً بالعدد ينتج :

$$u_k = \frac{a_{k-1}}{2^{k-1}\cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-2}x\right)} - \frac{a_k}{2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)}$$
$$= \frac{2\cos\left(2^{k-1}x\right) a_{k-1} - a_k}{2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)} = \frac{1}{2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)}$$

منه : $2\cos\left(2^{k-1}x\right) a_{k-1} - a_k = 1$.

• 2 إذا كان $a_h = \cos\left(2^h x\right)$ فإنّ $a_{h-1} = \cos\left(2^{h-1}x\right)$ منه :

$$2\cos\left(2^{h-1}x\right) a_{h-1} - a_h = 2\cos\left(2^{h-1}x\right)\cos\left(2^{h-1}x\right) - \cos\left(2^h x\right)$$
$$= 2\cos^2\left(2^{h-1}x\right) - \cos\left(2^h x\right)$$
$$= \cos\left(2\times 2^{h-1}x\right) + 1 - \cos\left(2^h x\right)$$
$$= \cos\left(2^h x\right) + 1 - \cos\left(2^h x\right) = 1$$

• 3 لدينا :

$$u_1 = \frac{1}{2\cos x} = \frac{2\cos^2 x - \cos 2x}{2\cos x} = \cos x - \frac{\cos 2x}{2\cos x} = \cos x - \frac{a_1}{2\cos x}$$

• 4 حسب ما سبق، لدينا :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k-1}}{2^{k-1}\cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-2}x\right)} - \frac{a_k}{2^k \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{k-1}x\right)} \right)$$
$$= \left(\cos x \cancel{- \frac{a_1}{2\cos x}}\right) + \left(\cancel{\frac{a_1}{2\cos x}} \cancel{- \frac{a_2}{2^2 \cos x \cos 2x}}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\cancel{\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}\cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{n-2}x\right)}} - \frac{a_n}{2^n \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{n-1}x\right)}\right)$$
$$= \cos x - \frac{a_n}{2^n \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{n-1}x\right)}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$= \cos x - \frac{\cos\left(2^n x\right)}{2^n \cos x \cos 2x \cdots \cos\left(2^{n-1} x\right)}$$

■

137 نقبل بدون برهان النتيجة الآتية :

كثيرات الحدود (بمعاملات حقيقية) غير القابلة للتحليل على $\mathbb{R}$ هي وحيدات الحد و كثيرات الحدود من الدرجة الثانية و التي مميزها سالب تماما أي :

$P(X) = aX + b$ و $P(X) = uX^2 + vX + w$ بحيث $v^2 - 4uw < 0$.

ليكن $P(X)$ كثير حدود بحيث $P(x) \geq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$. أثبت أنه يوجد كثيرا حدود $A(X)$ و $B(X)$ بحيث $P = A^2 + B^2$.

الحلّ. رأينا في الملاحظة 7 صفحة 17 أنه مهما تكن الأعداد الحقيقية A ، B ، C ، D فإنّ :

$$\left(A^2 + B^2\right)\left(C^2 + D^2\right) = (AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 \quad (7)$$

هذه المتطابقة صحيحة أيضاً إذا كانت A ، B ، C ، D كثيرات حدود (أو دوال أو ... إلخ) و يمكن إثبات ذلك إما باتّباع نفس الطريقة أو بنشر الطرفين.

ليكن $P(X)$ كثير حدود بمعاملات حقيقية. حسب النتيجة التي قبلناها بدون برهان، فإنّ تحليل $P(X)$ إلى جداء عوامل أولية هو :

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{m} (X - a_k)^{m_k} \prod_{\ell=1}^{p} \left(X^2 + \alpha_\ell X + \beta_\ell\right) \quad , \quad \alpha_\ell^2 - 4\beta_\ell < 0$$

و بما أنّ $P(X)$ موجب دائماً فإنّ $\lambda \geq 0$ و كل m_i زوجي .

نضع $\lambda = \mu^2$ ، $m_i = 2n_i$. لدينا : $A_i = (X - a_i)^{n_i}$ و

$\lambda = \mu^2 + 0^2$ و $(X - a_i)^{m_i} = (X - a_i)^{2n_i} = A_i^2 = A_i^2 + 0^2$.

من جهة أخرى، لدينا :

$$X^2 + \alpha_\ell X + \beta_\ell = \left(X + \frac{\alpha_\ell}{2}\right)^2 + \frac{4\beta_\ell - \alpha_\ell^2}{4}$$

و بما أن المميّز سالب تماما فإنّ $\frac{4\beta_\ell - \alpha_\ell^2}{4} = \nu^2$ حيث $\nu = \frac{\sqrt{4\beta_\ell - \alpha_\ell^2}}{2}$. و بالتالي، فإنّ :

$$P(X) = \left(\mu^2 + 0^2\right) \prod_{k=1}^{m} \left(A_i^2 + 0^2\right) \prod_{\ell=1}^{p} \left(\left(X + \frac{\alpha_\ell}{2}\right)^2 + \nu^2\right)$$

هذا التحليل يحتوي على $1 + m + p$ عاملاً من الشكل $U^2 + V^2$ ، و من السهل الإثبات (بالتراجع) أنّ جداء أيّ عدد من الأعداد (أو كثيرات الحدود أو ...) التي تُكتب على شكل مجموع مربعين، هو عدد (أو كثير حدود أو ...) يُكتب على شكل مجموع مربعين.

■

138 عيِّن في كل حالة طبيعة و عناصر التحويل المعرّف بالصيغة المركبة :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- $f_1 : z \mapsto (1+\imath)z + 2 - \imath$
- $f_2 : z \mapsto (-3+4\imath)z + 12 + 6\imath$
- $f_3 : z \mapsto \imath z + 1$
- $f_4 : z \mapsto z + \imath - 1$

الحلّ. كل هذه التحويلات من الشكل $z \mapsto az + b$ حيث $a, b \in \mathbb{C}$.

- f_1 تشابه لأنّ $a = 1 + \imath = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

إذا كانت ω لاحقة Ω النقطة الصامدة الوحيدة فإنّ $\omega = (1+\imath)\omega + 2 - \imath$ أي $\omega = \frac{2-\imath}{1-(1+\imath)} = 1 + 2\imath$ منه $\Omega(1,2)$.

إذن f_1 هو التشابه $\mathscr{S}\left((1,2), \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ (و هو تركيب تبديلي للتحاكي $\mathscr{H}\left((1,2), \sqrt{2}\right)$ مع الدوران $\mathscr{R}\left((1,2), \frac{\pi}{4}\right)$).

- لدينا $a = -3 + 4\imath$ مع $|a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ و إذا كانت θ عمدةً للعدد a فإنّ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و $\sin\theta = \frac{4}{5}$ (الزاوية θ ليست شهيرة). إذن f_2 تشابه.

إذا كانت ω لاحقة Ω النقطة الصامدة الوحيدة فإنّ $\omega = \frac{12+6\imath}{1-(-3+4\imath)} = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}\imath$ أي $\Omega\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

إذن f_2 هو التشابه $\mathscr{S}\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right), 5, \theta\right)$ حيث $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ و $\sin\theta = \frac{4}{5}$ (و هو تركيب تبديلي للتحاكي $\mathscr{H}((1,2), 5)$ مع الدوران $\mathscr{R}((1,2), \theta)$).

- f_3 دوران لأنّ $a = \imath = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

مركز هذا الدوران هو النقطة Ω التي لاحقتها ω بحيث $\omega = \frac{1}{1-\imath} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\imath$ أي النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

إذن f_3 هو الدوران $\mathscr{R}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right)$.

- f_4 إنسحاب لأنّ $a = 1$. لاحقة شعاع هذا الإنسحاب هي $b = \imath - 1$.

إذن f_4 هو الإنسحاب $\mathscr{T}_{\vec{V}}$ الذي لاحقة شعاعه $\vec{V}$ هي $\imath + 1 -$.

■

139 ☼ حدِّد طبيعة التحويلات الآتية و عناصرها المميزة :

1. $z' = z + 3 - \imath$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = \imath z + 1$
4. $z' = (1-\imath)z + 2 + \imath$

الحلّ. ليكن f التحويل النقطي المُعتبَر. عبارته من الشكل $f(z) = az + b$.

1. بما أنّ $a = 1$ فإنّ f هو الإنسحاب الذي لاحقة شعاعه هي $3 - \imath$ أي **الإنسحاب** الذي شعاعه $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 2 f تحاكي لأنّ $a = 2 \in \mathbb{R}^*$. إذا كانت ω لاحقة Ω مركز هذا التحاكي فإنّ : $\omega = 2\omega + 3$ أي $\omega = -3$.
إذن f هو **التحاكي** $\mathscr{H}\left((-3,0),2\right)$ الذي مركزه $\Omega\,(-3,0)$ و نسبته 2 .

• 3 f دوران لأنّ $a = \imath = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.
إذا كان Ω مركز هذا الدوران فإنّ لاحقته ω تُحقق : $\omega = \imath\omega + 1$ أي $\omega = \frac{1}{1-\imath} = \frac{1}{2}(1+\imath)$.
إذن f هو **الدوران** $\mathscr{R}\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\frac{\pi}{2}\right)$ الذي مركزه $\Omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

• 4 f تشابه لأنّ $a = 1 - \imath = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$.
إذا كان Ω مركز هذا التشابه فإنّ لاحقته ω تُحقق : $\omega = (1-\imath)\omega + 2 + \imath$ أي $\omega = \frac{2+\imath}{\imath} = 1 - 2\imath$.
إذن f هو **التشابه** $\mathscr{S}\left((1,-2),\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ الذي مركزه $\Omega\,(1,-2)$ ، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

■

140

لتكن E مجموعة الأعداد المركبة z التي تحقق $|z-1| = 1$ و f الدالة المعرفة على $\mathbb{C}$ بالعبارة $f(z) = \imath z$.

• 1 حدّد المجموعة E و أنشئ تمثيلها البياني $\mathscr{C}$ في المستوي المركب.

• 2 ما هو التحويل الهندسي T المرفق بالدالة f ؟

• 3 ما هي صورة $\mathscr{C}$ بالتحويل T ؟

• 4 إستنتج أنّ صورة E بالدالة f هي المجموعة E' للأعداد المركبة z' بحيث $|z' - \imath| = 1$.

الحلّ.

• 1 لتكن M (z) و A (1) . لدينا :

$$M \in E \iff AM = 1$$

إذن E هي مجموعة النقط M التي تبعد بمسافة 1 عن النقطة A أي هي الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها A و نصف قطرها 1 (شكل VI.16).

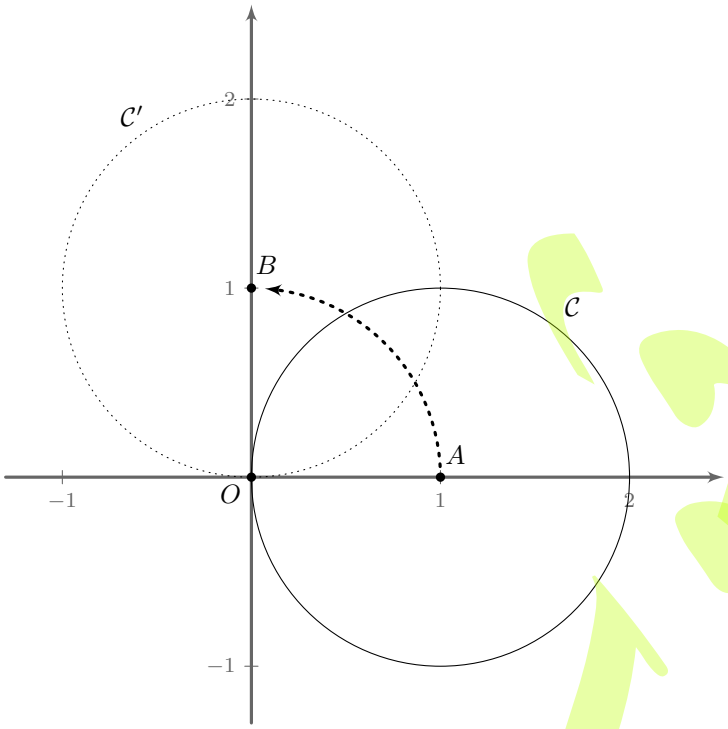
• 2 عبارة التحويل T من الشكل $f(z) = az + b$ حيث $a = \imath = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ و بالتالي T دوران. لاحقة مركز هذا الدوران ω تُحقق : $\omega = \imath\omega$ أي $\omega = 0$.
إذن T هو الدوران $\mathscr{R}\left(O, \frac{\pi}{2}\right)$ الذي مركزه O (0,0) و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

• 3 صورة الدائرة $\mathscr{C}$ بالدوران T هي الدائرة التي مركزها $B = T(A)$ و نصف قطرها 1 . لكن $f(1) = \imath$ إذن T (A) هي النقطة B (ı) .
في الأخير، صورة $\mathscr{C}$ بالدوران T هي الدائرة $\mathscr{C}'$ التي مركزها B (ı) و نصف قطرها 1 .

• 4 الدائرة $\mathscr{C}'$ هي مجموعة النقط $M'(z')$ التي تبعد بمسافة 1 عن النقطة B (ı) و هذا يعني أنّ المجموعة E' هي مجموعة الأعداد المركبة z' بحيث : $|z' - \imath| = 1$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.16

141

1• حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ و اكتب حلولها على الشكل الأسي.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. ليكن T التحويل النقطي للمستوي المركب و الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z' = e^{2\imath\pi/3}z$.

2• ما هي طبيعة التحويل T ؟

3• لتكن M_1 النقطة التي لاحقتها $z_1 = -\sqrt{3} + \imath$.

حدّد z_2 و z_3 لاحقتَيْ النقطتين M_2 و M_3 بحيث $M_2 = T(M_1)$ و $M_3 = T(M_2)$.

4• أنشئ النقط M_1 ، M_2 و M_3 .

5• أحسب $\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث $M_1M_2M_3$.

الحلّ. 1• المميِّز المختصر هو $\Delta' = \sqrt{3}^2 - 4 = -1 = \imath^2$ و بالتالي للمعادلة حلاّن هما $-\sqrt{3} - \imath$ و $-\sqrt{3} + \imath$.

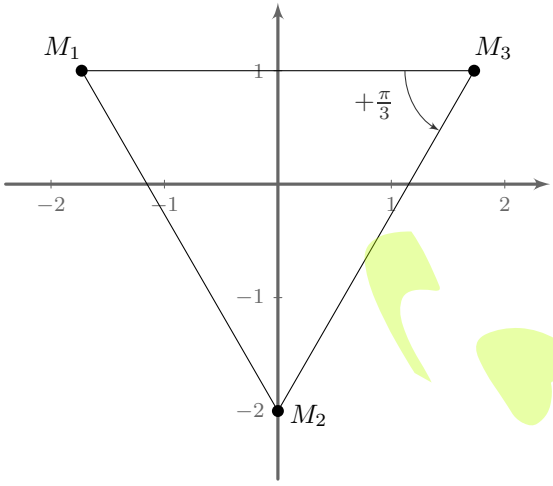
الشكل الأسي لهذين الحلّين هو :

$$-\sqrt{3} - \imath = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\imath\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \imath\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2e^{7\imath\pi/6}$$

$$-\sqrt{3} + \imath = \overline{-\sqrt{3} - \imath} = \overline{2e^{7\imath\pi/6}} = 2e^{-7\imath\pi/6} = 2e^{-7\imath\pi/6 + 2\imath\pi} = 2e^{5\imath\pi/6}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.17

• 2 عبارة التحويل T من الشكل $z' = az + b$ مع $a = e^{2\imath\pi/3} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$ ، إذن T دوران.

لاحقة مركز هذا الدوران ω تُحقق : $\omega = e^{2\imath\pi/3}\omega$ أي $\omega = 0$.

إذن T هو الدوران $\mathscr{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ الذي مركزه O $(0,0)$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

• 3 لدينا :

$$z_2 = e^{2\imath\pi/3}z_1 = \left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3} + \imath\right) = -2\imath$$

$$z_3 = e^{2\imath\pi/3}z_2 = \left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2\imath) = \sqrt{3} + \imath$$

• 4 أنظر الشكل VI.17 .

• 5 لدينا :

$$\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{-2\imath - \sqrt{3} - \imath}{-\sqrt{3} + \imath - \sqrt{3} - \imath} = \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\imath\pi/3}$$

و بما أنّ $|e^{\imath\pi/3}| = 1$ فإنّ $|z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$ أي $M_3M_1 = M_3M_2$ إذن المثلث $M_1M_2M_3$ متساوي الساقين عند الرأس M_3 .

لكن $\left(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_3M_2}\right) = \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ و بالتالي فالمثلث $M_1M_2M_3$ متقايس الأضلاع (و مباشر) .

■

142 ما هو الشرط الذي يجب أن يحققه الوسيط a حتى يكون للمعادلة $z + \bar{z}^2 = a$ حلاً حقيقيا ؟ في هذه الحالة (أي إذا تحقق هذا الشرط) أوجد حلول هذه المعادلة.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. ليكن x عدداً حقيقيا. x حل للمعادلة المعطاة إذا و فقط إذا كان $x^2+x-a=0$ أي إذا و فقط إذا كان $a\in\mathbb{R}$ و $\Delta=1^2-4\times(-a)\geq 0$. إذن الشرط المطلوب هو أن يكون a عددا حقيقيا بحيث $a\geq -\frac{1}{4}$.

نفرض إذن أنّ a عدد حقيقي بحيث $a\geq -\frac{1}{4}$.

ليكن $z=x+\imath y$ حلاً للمعادلة السابقة (مع $x,y\in\mathbb{R}$). لدينا :

$$z^2=x^2-y^2+2\imath xy \qquad \text{و} \qquad z+\bar{z}^2=x+x^2-y^2+\imath(y-2xy)$$

منه :

$$z+\bar{z}^2=a \iff x+x^2-y^2+\imath(y-2xy)=a+0\imath$$

$$\iff \begin{cases} x+x^2-y^2=a \\ y-2xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+x^2-y^2=a \\ y(1-2x)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} [y=0 \quad \text{و} \quad x+x^2-y^2=a] \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ [1-2x=0 \quad \text{و} \quad x+x^2-y^2=a] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} [y=0 \quad \text{و} \quad x+x^2-a=0] \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ \left[x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-y^2=a\right] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} [y=0 \quad \text{و} \quad x+x^2-a=0] \\ \qquad\qquad \text{أو} \\ \left[x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y^2=\frac{3}{4}-a\right] \end{cases}$$

الحالة الأولى : إذا كان $a>\frac{3}{4}$ فإنّ المعادلة $y^2=\frac{3}{4}-a$ مستحيلة و بالتالي يبقى $y=0$ و $x^2+x-a=0$ ؛ في هذه الحالة للمعادلة حلان حقيقيان هما $z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

الحالة الثانية : إذا كان $a=\frac{3}{4}$ فإنّ المعادلة $y^2=\frac{3}{4}-a$ تصبح $y=0$ منه :

$$\left(y=0 \quad \text{و} \quad x^2+x-\frac{3}{4}=0\right) \quad \text{أو} \quad \left(x=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y=0\right)$$

في هذه الحالة للمعادلة حلان حقيقيان : $z=-\frac{3}{2}$ و $z=\frac{1}{2}$.

الحالة الثالثة : إذا كان $-\frac{1}{4}\leq a<\frac{3}{4}$ فإنّ المعادلة تقبل أربعة حلول : حلان حقيقيان $z=\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$ و حلان آخران غير حقيقيين $z=\frac{1}{2}\pm\imath\sqrt{\frac{3}{4}-a}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

143 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر التحويل النقطي f للمستوي المركب و الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث $z' = \left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$.

لتكن A و B النقطتين اللّتين لاحقتاهما $z_A = 3e^{\imath\pi/6}$ و $z_B = 3e^{-\imath\pi/6}$ على الترتيب .

نضع $A' = f(A)$ و $B' = f(B)$ صورتيهما بالتحويل f .

- 1. أثبت أنّ f دوران يُطلب تعيين مركزه و زاويته.
- 2. حدّد العددين $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لاحقتَيْ A' و B' و ضعهما على الشكل الأسي.
- 3. أثبت أنّ النقط A ، B ، A' و B' تقع على دائرة Γ مركزها O و نصف قطرها 3 .
- 4. أحسب $\arg\left(\frac{z_{A'}}{z_B}\right)$ ثمّ استنتج أنّ النقط A' ، B و O على استقامة واحدة.

ما هي طبيعة المثلث ABA' ؟

الحلّ.

- 1. عبارة التحويل f من الشكل $z' = az + b$ حيث :

$$a = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \imath\sin\frac{2\pi}{3} = e^{2\imath\pi/3} = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]$$

إذن f دوران زاويته $\frac{2\pi}{3}$. إذا كانت ω لاحقة مركز هذا الدوران فإنّ $\omega = e^{2\imath\pi/3}\omega$ أي $\omega = 0$.

إذن f هو الدوران $\mathscr{R}\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)$ الذي مركزه $O(0,0)$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

- 2. لدينا :

$$z_{A'} = \left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A = e^{2\imath\pi/3} \cdot 3e^{\imath\pi/6} = 3e^{\imath\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)} = 3e^{5\imath\pi/6}$$

$$z_{B'} = \left(-\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A = e^{2\imath\pi/3} \cdot 3e^{-\imath\pi/6} = 3e^{\imath\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = 3e^{\imath\pi/2}$$

- 3. بما أنّ $|z_A| = |z_B| = |z_{A'}| = |z_{B'}| = 3$ أي $|z_A - 0| = |z_B - 0| = |z_{A'} - 0| = |z_{B'} - 0| = 3$ فإنّ $OA = OB = OA' = OB' = 3$ و هذا يعني أنّ النقط A ، B ، A' و B' تقع على الدائرة Γ التي مركزها O و نصف قطرها 3 .

- 4. لدينا :

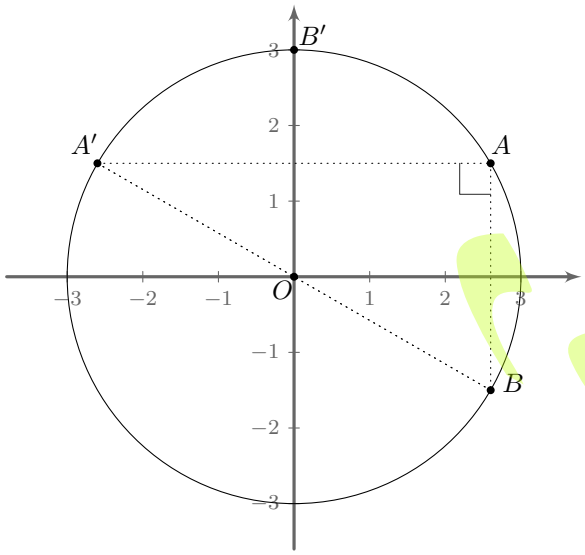
$$\frac{z_{A'}}{z_B} = \frac{3e^{5\imath\pi/6}}{3e^{-\imath\pi/6}} = e^{\imath\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = e^{\imath\pi} = -1$$

إذن $\arg\left(\frac{z_{A'} - 0}{z_B - 0}\right) = \pi \pmod{2\pi}$ أي $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA'}}\right) = \pi \pmod{2\pi}$ و هذا يعني أنّ النقط A' ، B و O على استقامة واحدة (شكل VI.18) .

في الدائرة Γ الزاوية $\widehat{A'OB}$ مركزية و الزاوية $\widehat{A'AB}$ محيطة و هما تشدّان نفس الوتر و بالتالي $\widehat{A'OB} = 2\widehat{A'AB}$ أي $\widehat{A'AB} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.18

نستنتج أنّ المثلث ABA' قائم الزاوية عند الرأس A .

■

144

1• ليكن f التحويل النقطي للمستوي المركب في نفسه و الذي يرفق بالنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث :
$z' = az + 3\imath$
حدِّد طبيعة التحويل f و عناصره المميّزة عندما $a = 2$ ثمّ عندما $a = -\imath$.

2• يُعطى $A(1)$ ، $B(2+\imath)$ ، $A'(2\imath)$ و $B'(1+\imath)$.

(ا) تحقق من أنّ $AB = A'B'$.

(ب) أثبت أنّه يوجد دوران r واحد و واحد فقط بحيث $r(A) = A'$ و $r(B) = B'$ ثمّ حدّد هذا الدوران.

الحلّ. 1• • النقطة الصامدة : $\underline{a = 2}$

$$f(\omega) = \omega \iff 2\omega + 3\imath = \omega \iff \omega = -3\imath$$

التحويل f يقبل نقطة صامدة وحيدة و هي النقطة Ω ذات اللاّحقة $\omega = -3\imath$.

لتحديد طبيعة التحويل f، نبحث عن عبارة $z' - \omega$ بدلالة $z - \omega$. لدينا : $\begin{cases} z' = 2z + 3\imath \\ \omega = 2\omega + 3\imath \end{cases}$.

بطرح المساوتين طرفاً إلى طرف ينتج : $z' - \omega = 2(z - \omega)$

و هي الكتابة المركبة للتحاكي الذي مركزه $\Omega(-3\imath)$ و نسبته $k = 2$.

• النقطة الصامدة : $\underline{a = -\imath}$

$$f(\omega) = \omega \iff -\imath\omega + 3\imath = \omega \iff \omega = \frac{3\imath}{1+\imath} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\imath$$

التحويل f يقبل نقطة صامدة وحيدة و هي النقطة Ω ذات اللاّحقة $\omega = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لتحديد طبيعة التحويل f، نبحث عن عبارة $z'-\omega$ بدلالة $z-\omega$. لدينا : $\begin{cases} z'=-\imath z+3\imath \\ \omega=-\imath\omega+3\imath \end{cases}$.

بطرح المساواتين طرفاً إلى طرف ينتج : $z'-\omega=-\imath(z-\omega)$

و هي الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\imath\right)$ و زاويته $\theta=\arg(-\imath)=-\frac{\pi}{2}\pmod{2\pi}$.

2• (أ) لدينا من جهة : $AB=\sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$، و من جهة أخرى

$A'B'=\sqrt{(1-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$ أي $AB=A'B'$.

(ب) ليكن r (Ω,θ) دوراناً مركزه Ω و زاويته θ. الكتابة المركبة له هي : $z'-\omega=e^{\imath\theta}(z-\omega)$.

لنثبت أنه يوجد زوج وحيد (ω,θ) من الأعداد بحيث $\omega\in\mathbb{C}$ و $\theta\in[0,2\pi[$ يُحقق :

$r(A)=A'$ و $r(B)=B'$.

الشرط $r(A)=A'$ يُكتب : $2\imath-\omega=e^{\imath\theta}(1-\omega)$ ؛

و الشرط $r(B)=B'$ يُكتب : $1+\imath-\omega=e^{\imath\theta}(2+\imath-\omega)$.

بطرح المساواتين طرفاً إلى طرف ينتج : $\imath-1=e^{\imath\theta}(-1-\imath)$ منه $e^{\imath\theta}=-\imath=e^{-\imath\pi/2}$

أي $\theta=-\frac{\pi}{2}\pmod{2\pi}$.

نستنتج أنّ : $2\imath-\omega=-\imath(1-\omega)$ أي $\omega=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\imath$.

إذن يوجد دوران وحيد r يُحوّل النقطة A إلى A' و يُحوّل النقطة B إلى B' و هو الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\imath\right)$

و زاويته $\theta=-\frac{\pi}{2}$.

■

145 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. A ، B و C ثلاثة نقط من المستوي لواحقها a ، b و c على الترتيب. نرفق بالثلاثية A ، B ، C الأعداد الآتية :

$$u(A,B,C)=a+bj+cj^2 \quad , \quad v(A,B,C)=a+bj^2+cj$$

$$w(A,B,C)=\frac{u(A,B,C)}{v(A,B,C)} \qquad (j=e^{2\imath\pi/3} \text{ حيث})$$

كيف تتحوّل الأعداد $u(A,B,C)$ ، $v(A,B,C)$ و $w(A,B,C)$ عندما نُعوّض النقط A ، B ، C بصُوَرها :

1• بانسحاب؟ 2• بدوران مركزه O ؟ 3• بتحاكٍ مركزه O ؟

الحلّ. 1• ليكن τ الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OM}$ و m لاحقة النقطة M . حسب المبرهنة 26 صفحة 55 فإنّ لاحقة

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

النقطة $\tau(A)$ هي $a+m$ ، لاحقة $\tau(B)$ هي $b+m$ و لاحقة $\tau(C)$ هي $c+m$ إذن :

$$\begin{aligned} u(\tau(A),\tau(B),\tau(C)) &= (a+m)+(b+m)j+(c+m)j^2 \\ &= a+bj+cj^2+m\left(1+j+j^2\right) \end{aligned}$$

لكن j جذر تكعيبي للوحدة إذن : $1+j+j^2=\dfrac{1-j^3}{1-j}=0$

منه : $u(\tau(A),\tau(B),\tau(C)) = a+bj+cj^2 = u(A,B,C)$

نثبت بنفس الطريقة أنّ : $v(\tau(A),\tau(B),\tau(C)) = a+bj^2+cj = v(A,B,C)$

و نستنتج أنّ : $w(\tau(A),\tau(B),\tau(C)) = w(A,B,C)$

• 2. ليكن ρ الدوران الذي مركزه O و α زاويته .حسب المبرهنة 27 صفحة 57 فإنّ لاحقة النقطة $\rho(A)$ هي $ae^{i\alpha}$ ، لاحقة $\rho(B)$ هي $be^{i\alpha}$ و لاحقة $\rho(C)$ هي $ce^{i\alpha}$ إذن :

$$u(\rho(A),\rho(B),\rho(C)) = ae^{i\alpha}+be^{i\alpha}j+ce^{i\alpha}j^2 = u(A,B,C)\cdot e^{i\alpha}$$

بنفس الطريقة نثبت أنّ : $v(\rho(A),\rho(B),\rho(C)) = v(A,B,C)\cdot e^{i\alpha}$

منه : $w(\rho(A),\rho(B),\rho(C)) = w(A,B,C)$

• 3. ليكن σ التحاكي الذي مركزه O و نسبته k .حسب المبرهنة 26 صفحة 55 فإنّ لاحقة النقطة $\sigma(A)$ هي $k\cdot a$ ، لاحقة $\sigma(B)$ هي $k\cdot b$ و لاحقة $\sigma(C)$ هي $k\cdot c$ إذن :

$$u(\rho(A),\rho(B),\rho(C)) = ka+kbj+kcj^2 = k\cdot u(A,B,C)$$

بنفس الطريقة نثبت أنّ : $v(\sigma(A),\sigma(B),\sigma(C)) = k\cdot v(A,B,C)$

منه : $w(\sigma(A),\sigma(B),\sigma(C)) = w(A,B,C)$

■

146 ليكن $U(X)$ كثير الحدود المعرَّف على $\mathbb{C}$ بالعبارة : $U(X)=X^2+(1-2i)X-2i$.

• 1. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-3+4i$.

• 2. أوجد الجذرين المركبين لكثير الحدود $U(X)$.

• 3. ليكن z عدداً مركباً حيث $z=x+iy$ مع x و y عددان حقيقيان.

(أ) أحسب الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي لـ $U(X)$ بدلالة x و y .

(ب) ننسب المستوي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)=\mathscr{R}$ (مع $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\,cm$).

(i) لتكن Γ_1 مجموعة النقط M ذات الإحداثيين (x,y) بحيث يكون $U(x+iy)$ تخيلياً صرفاً. حدِّد طبيعة Γ_1 ثمّ أوجد مركزها و اختلافها المركزي. أنشئ المجموعة Γ_1 .

(ii) لتكن Γ_2 مجموعة النقط M ذات الإحداثيين (x,y) بحيث يكون $U(x+iy)$ حقيقياً. حدِّد طبيعتها و مركزها. أنشئ Γ_2 على نفس الرسم مع Γ_1 .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

تذكير : لتكن $\mathscr{C}$ مجموعة النقط $M(x,y)$ ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس، بحيث :
$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ مع $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ و $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

- إذا كان $b^2-4ac<0$ فإنّ المجموعة $\mathscr{C}$ هي إمّا خالية أو نقطة أو قطع ناقص (أو دائرة).
- إذا كان $b^2-4ac=0$ فإنّ المجموعة $\mathscr{C}$ هي إمّا خالية أو مستقيم أو إتحاد مستقيمين متوازيين أو قطع مكافئ.
- إذا كان $b^2-4ac>0$ فإنّ المجموعة $\mathscr{C}$ هي إمّا إتحاد مستقيمين متقاطعين أو قطع زائد.

الحلّ. 1• ليكن $z=x+\imath y$ جذراً تربيعيا للعدد $-3+4\imath$. لدينا :
$$\begin{cases} x^2-y^2=\mathrm{Re}(-3+4\imath)=-3 \\ 2xy=\mathrm{Im}(-3+4\imath)=4 \\ x^2+y^2=|-3+4\imath|=5 \end{cases}.$$
بجمع المعادلتين الأولى و الثالثة نجد $2x^2=2$ أي $x=\pm1$. نأخذ مثلاً $x=1$ و نعوّض في المعادلة الثانية لنجد $y=2$.
و بالتالي فالجذران التربيعيان للعدد $-3+4\imath$ هما $1+2\imath$ و $-(1+2\imath)$.

2• نتّبع طريقة المميِّز : $\Delta=(1-2\imath)^2-4\times(-2\imath)=-3+4\imath=(1+2\imath)^2$. و بالتالي فجذرَا كثير الحدود $U(X)$ هما $\frac{-(1-2\imath)-(1+2\imath)}{2}=-1$ و $\frac{-(1-2\imath)+(1+2\imath)}{2}=2\imath$.

3• (أ) لدينا :
$$U(z)=(x+\imath y)^2+(1-2\imath)(x+\imath y)-2\imath=\left(x^2-y^2+x+2y\right)+\imath(2xy-2x+y-2)$$
منه : $\mathrm{Re}(U(z))=x^2-y^2+x+2y$ و $\mathrm{Im}(U(z))=2xy-2x+y-2$.

(ب) (i) معادلة Γ_1 هي $x^2-y^2+x+2y=0$. لدينا $a=1$ ، $b=0$ و $c=-1$ منه $b^2-4ac=4>0$
و بالتالي فإنّ Γ_1 هي إمّا إتحاد مستقيمين متقاطعين أو قطع زائد. لكن :
$$\begin{aligned} x^2-y^2+x+2y &= x^2+2\times\frac{1}{2}\times x-\left(y^2-2\times(-1)\times y\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left((y-1)^2-(-1)^2\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-(y-1)^2-\frac{3}{4} \end{aligned}$$
منه :
$$x^2-y^2+x+2y=0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-(y-1)^2-\frac{3}{4}=0 \iff \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2-\left(\frac{y-1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2=1$$
و هي معادلة قطع زائد مركزه النقطة $\Omega\left(-\frac{1}{2},1\right)$ و معادلتا محوريه هما $x=0$ (محور التراتيب) و $y=0$ (محور الفواصل). و هو قطع زائد متساوي الساقين (الضلعين) و بالتالي فإنّ اختلافه المركزي يساوي $\sqrt{2}$ و محوريه المقاربين يمرّان بالمركز Ω و ميلاهما يساويان ±1 .

(ii) معادلة Γ_2 هي $2xy-2x+y-2=0$. لدينا $a=0$ ، $b=1$ و $c=0$ منه $b^2-4ac=1>0$ و
بالتالي فإنّ Γ_1 هي إمّا إتحاد مستقيمين متقاطعين أو قطع زائد. لدينا :
$$2xy-2x+y-2=0 \iff xy-x+\frac{1}{2}y-1=0 \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)(y-1)=\frac{1}{2}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

نُجري إنسحاباً شعاعه $\vec{V} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$ للمعلم $\mathscr{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ و ليكن $\mathscr{R}_1 = \left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ المعلم الجديد حيث $\Omega = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. في المعلم $\mathscr{R}_1$ ، معادلة Γ_2 هي $XY = \frac{1}{2}$.

بدايةً، نتخلّص من الحد XY و ذلك بتطبيق دوران لمحوريّ المعلم $\mathscr{R}_1$.

لتكن $z = X + \imath Y$ و $z' = X' + \imath Y'$ نقطتين من المستوي المركب و ليكن $\mathscr{R}(\Omega, \theta)$ دوراناً مركزه Ω و زاويته θ . لدينا :

$$\begin{aligned} z = e^{\imath\theta} z' &\iff X + \imath Y = (\cos\theta + \imath \sin\theta)\left(X' + \imath Y'\right) \\ &\iff X + \imath Y = X'\cos\theta - Y'\sin\theta + \imath\left(X'\sin\theta + Y'\cos\theta\right) \\ &\iff \begin{cases} X = X'\cos\theta - Y'\sin\theta \\ Y = X'\sin\theta + Y'\cos\theta \end{cases} \end{aligned}$$

لكن :

$$\begin{aligned} XY = \frac{1}{2} &\iff \left(X'\cos\theta - Y'\sin\theta\right)\left(X'\sin\theta + Y'\cos\theta\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff X'^2\cos\theta\sin\theta - Y'^2\cos\theta\sin\theta + X'Y'\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

نلاحظ أنه للتخلص من الحد $2X'Y'\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$ يكفي أن يكون $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$ أي $\cos\theta = \pm\sin\theta$. نأخذ $\theta = \frac{\pi}{4}$ فيكون :

$$\begin{aligned} XY = \frac{1}{2} &\iff X'^2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - Y'^2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \\ &\iff X'^2 - Y'^2 = 1 \end{aligned}$$

و هي معادلة قطع زائد مركزه النقطة Ω و معادلتا محوريه هما $X' = 0$ و $Y' = 0$. و هو قطع زائد متساوي الساقين (الضلعين) و بالتالي فإنّ اختلافه المركزي يساوي $\sqrt{2}$ و محوريه المقاربين يمرّان بالمركز Ω و ميلاهما يساويان ± 1 .

ملاحظة 32 : ◁ نقط تقاطع Γ_1 و Γ_2 تُحقق $\mathrm{Im}(U(z)) = 0$ أي $\mathrm{Re}(U(z)) = 0$ إذن هي جذور كثير الحدود $U(X)$ و هي -1 و $2\imath$ أو بتعبير آخر $(0,-1)$ و $(0,2)$. ▷

■

4.VI تمارين متنوعة

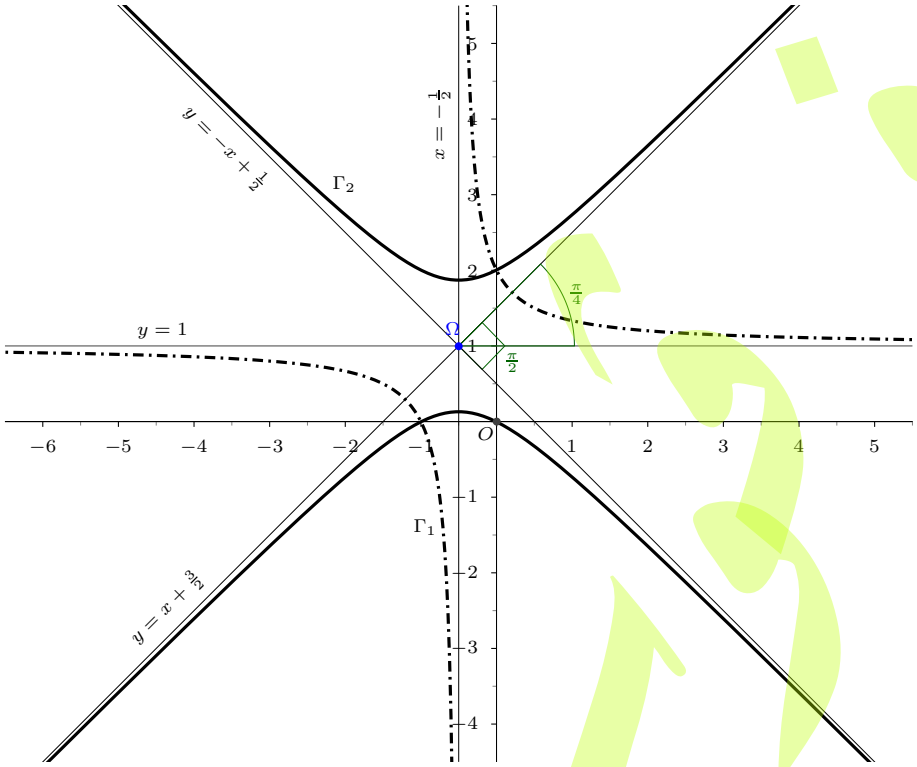
147 ❧ ليكن $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ تطبيقاً مركبا بحيث :

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad & f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad & f(\lambda z) = \lambda f(z) \end{aligned}$$

أثبت أنه يوجد عددان مركبان α و β بحيث : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \alpha z + \beta\bar{z}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 19.VI

الحلّ. ليكن $z = x + \imath y$ عدداً مركبا حيث $x, y \in \mathbb{R}$. حسب الخاصية الأولى لدينا : $f(z) = f(x + \imath y) = f(x) + f(\imath y)$ و بما أنّ $x, y \in \mathbb{R}$ و $x = x \times 1$ فحسب الخاصية الثانية لدينا : $f(z) = f(x) + f(\imath y) = xf(1) + y(\imath)$. نضع $a = f(1)$ و $b = f(\imath)$ فيكون $f(z) = ax + by$. لكن $x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ و $y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\imath}$ منه :

$$\begin{aligned} f(z) = ax + by &= a\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z - \overline{z}}{2\imath}\right) \\ &= \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2\imath}\right) z + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2\imath}\right) \overline{z} \\ &= \frac{1}{2}(a - b\imath)\, z + \frac{1}{2}(a + b\imath)\, \overline{z} \\ &= \alpha z + \beta \overline{z} \end{aligned}$$

حيث $\alpha = \frac{1}{2}(a - b\imath)$ و $\beta = \frac{1}{2}(a + b\imath)$ و هو المطلوب.

ملاحظة 33 : ◁ بوضع $u = a + b\imath = f(1) + \imath f(\imath)$ يكون $2f(z) = \overline{u}z + u\overline{z}$ و هذا العدد حقيقي و يُدعى **الجداء الحقيقي للعددين** u **و** z.

▷

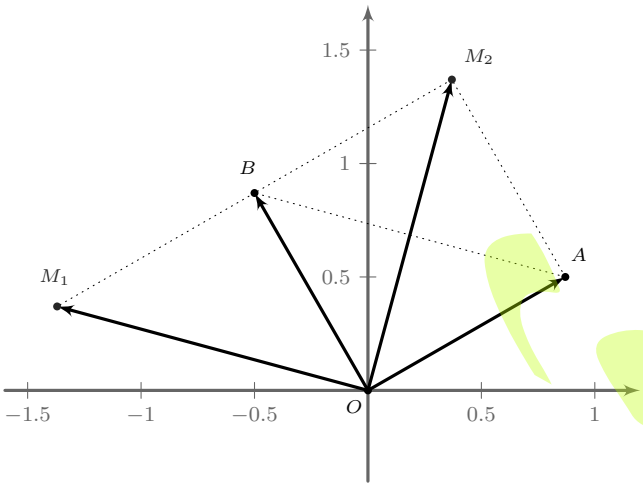
■

148 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

α و β عددان مركبان حيث : $\alpha = \frac{\sqrt{3} + \imath}{2}$ و $\beta = \frac{-1 + \imath\sqrt{3}}{2}$.

1• أكتب كلا من العددين α و β على شكله المثلثي و علم النقطتين A و B صورتَيْ العددين α و β على الترتيب.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.20

• 2 حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+\left(1-\imath\sqrt{3}\right)z-\left(1+\imath\sqrt{3}\right)=0$ و تحقق من أنّ حلّيها z_1 و z_2 يُكتبان بدلالة α و β .

• 3 إستنتج ممّا سبق إنشاء النقطتين M_1 و M_2 صورتَيّ العددين z_1 و z_2 على الترتيب.
أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

• 4 إستنتج قيمة كل من : $\cos\frac{5\pi}{12}$ ، $\sin\frac{5\pi}{12}$ ، $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

الحلّ. • 1 لدينا :

$$\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath=\cos\frac{\pi}{6}+\imath\sin\frac{\pi}{6}=\left[1,\frac{\pi}{6}\right]$$

و

$$\beta=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath=\cos\frac{2\pi}{3}+\imath\sin\frac{2\pi}{3}=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]$$

أنظر الشكل VI.20 .

• 2 مُميِّز المعادلة هو :

$$\Delta=\left(1-\imath\sqrt{3}\right)^2+4\left(1+\imath\sqrt{3}\right)=2+2\imath\sqrt{3}=4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\right)=4e^{\imath\pi/3}=\left(2e^{\imath\pi/6}\right)^2=\left(\sqrt{3}+\imath\right)^2$$

و بالتالي لها حلاّن :

$$z_1=\frac{-1+\imath\sqrt{3}-\sqrt{3}-\imath}{2}=\beta-\alpha$$

و

$$z_2=\frac{-1+\imath\sqrt{3}+\sqrt{3}+\imath}{2}=\beta+\alpha$$

• 3 بما أنّ $z_1=\beta-\alpha$ فإنّ $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ، و بما أنّ $z_2=\beta+\alpha$ فإنّ $\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$. (شكل VI.20) .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لدينا :

$$z_1 = \beta - \alpha = e^{2\imath\pi/3} - e^{\imath\pi/6} = e^{5\imath\pi/12}\left(e^{\imath\pi/4} - e^{-\imath\pi/4}\right) = e^{5\imath\pi/12} \times 2\imath \sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \sqrt{2}e^{\imath\pi/2}e^{5\imath\pi/12} = \sqrt{2}e^{11\imath\pi/12} = \left[\sqrt{2}, \frac{11\pi}{12}\right]$$

و

$$z_2 = \beta + \alpha = e^{2\imath\pi/3} + e^{\imath\pi/6} = e^{5\imath\pi/12}\left(e^{\imath\pi/4} + e^{-\imath\pi/4}\right) = e^{5\imath\pi/12} \times 2\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \sqrt{2}e^{5\imath\pi/12} = \left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{12}\right]$$

• 4 لدينا :

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\mathrm{Re}(z_2)}{|z_2|} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

و

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\mathrm{Im}(z_2)}{|z_2|} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

بالمثل :

$$\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} = \frac{\frac{-\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

و

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ملاحظة 34 : ◁ لا داعي لحساب $|z_1|$ و $|z_2|$ بالطريقة الجبرية لأننا وجدنا قيمتَيهما بالطريقة المثلثية في السؤال السابق. ▷

■

149 عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0, \pi]$.

• 1 أكتب بدلالة $\cos\alpha$ العدد : $A = \sin^2 2\alpha - 2(1 + \cos 2\alpha)$.

• 2 حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2(1 + \cos 2\alpha) - 2z\sin 2\alpha + 1 = 0$.

• 3 عيّن مجموعة صور حلول هذه المعادلة عندما يتغيّر α .

الحلّ. • 1 لدينا :

$$A = \sin^2 2\alpha - 2(1 + \cos 2\alpha) = (2\sin\alpha\cos\alpha)^2 - 2\left(2\cos^2\alpha\right) = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 4\cos^2\alpha$$
$$= 4\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 1\right) = 4\cos^2\alpha\left(-\cos^2\alpha\right) = -4\cos^4\alpha$$

• 2 إذا كان $1 + \cos 2\alpha = 0$ أي إذا كان $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (لأنّ $\alpha \in [0, \pi]$) فإنّ المعادلة تصبح $1 = 0$ و هذا مستحيل ، إذن $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ بالضرورة أي $1 + \cos 2\alpha \neq 0$ و بالتالي فالمعادلة من الدرجة الثانية. مُميِّزها هو :

$$\Delta' = (\sin 2\alpha)^2 - 2(1 + \cos 2\alpha) = A = -4\cos^4\alpha = \left(2\imath\cos^2\alpha\right)^2$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي لها حلاّن :

$$z_1 = \frac{\sin 2\alpha - 2\imath\cos^2\alpha}{2\,(1+\cos 2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha - 2\imath\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = -\imath + \tan\alpha$$
$$z_2 = \frac{\sin 2\alpha + 2\imath\cos^2\alpha}{2\,(1+\cos 2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha + 2\imath\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \imath + \tan\alpha$$

• 3 نلاحظ أنه مهما تكن قيمة α فإنّ $\mathrm{Im}(z_1) = -1$ و بالتالي فالنقطة ذات اللاحقة z_1 تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $\mathrm{Im}(z) = -1$ (أي $y = -1$) . لكن : $\mathrm{Re}(z_1) \underset{\alpha\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \pm\infty$ و بالتالي عندما يتغيّر α ، فإنّ النقطة ذات اللاحقة z_1 تمسح كلّ المستقيم الذي معادلته $y = -1$.

في الأخير، مجموعة صور النقطة ذات اللاحقة z_1 هي المستقيم الذي معادلته $\mathrm{Im}(z) = -1$ (أي $y = -1$) .

بالمثل، مهما تكن قيمة α فإنّ $\mathrm{Im}(z_2) = 1$ و بالتالي فالنقطة ذات اللاحقة z_2 تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته $\mathrm{Im}(z) = 1$ (أي $y = 1$) . لكن : $\mathrm{Re}(z_2) \underset{\alpha\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \pm\infty$ و بالتالي عندما يتغيّر α ، فإنّ النقطة ذات اللاحقة z_2 تمسح كلّ المستقيم الذي معادلته $y = 1$.

في الأخير، مجموعة صور النقطة ذات اللاحقة z_2 هي المستقيم الذي معادلته $\mathrm{Im}(z) = 1$ (أي $y = 1$) .

■

150 ☼

$f(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $f(z) = 8z^4 - 8z^3 + 27z - 27$.

• 1 بيِّن أنه يمكن كتابة $f(z)$ على الشكل $g(z)\cdot(z-1)$ حيث $g(z)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة يُطلب تعيينه.

• 2 حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = 0$. عيِّن الطويلة و عمدة لكل حلّ من هذه الحلول.

الحلّ. • 1 يمكن التحقق بسهولة من أنّ $f(1) = 0$ و من ثَمّ نُجري القسمة الإقليدية لـ $f(z)$ على $z-1$ لإيجاد حاصل القسمة $g(z)$ ؛ لكن من الممكن إتباع الطريقة التالية :

$$f(z) = 8z^4 - 8z^3 + 27z - 27 = 8z^3(z-1) + 27(z-1) = (z-1)\left(8z^3+27\right)$$

إذن $g(z) = 8z^3 + 27$.

• 2 لدينا :

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff (z-1)\left(8z^3+27\right) = 0 \\ &\iff z = 1 \quad \text{أو} \quad 8z^3 + 27 = 0 \\ &\iff z = 1 \quad \text{أو} \quad z^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \\ &\iff z = 1 \quad \text{أو} \quad z = -\frac{3}{2} \quad \text{أو} \quad z = -\frac{3}{2}\jmath \quad \text{أو} \quad z = -\frac{3}{2}\jmath^2 \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

حيث $j = z^{2\imath\pi/3}$ جذر تكعيبي للوحدة ؛ و بالتالي :

$$z = 1 = e^{0\imath} = [1, 0]$$

$$z = -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}e^{\imath\pi} = \left[\frac{3}{2}, \pi\right] \quad \text{أو}$$

$$z = -\frac{3}{2}j = \frac{3}{2}e^{\imath\pi}e^{2\imath\pi/3} = \frac{3}{2}e^{5\imath\pi/3} = \frac{3}{2}e^{-\imath\pi/3} = \left[\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \quad \text{أو}$$

$$z = -\frac{3}{2}j^2 = \frac{3}{2}e^{\imath\pi}e^{4\imath\pi/3} = \frac{3}{2}e^{7\imath\pi/3} = \frac{3}{2}e^{\imath\pi/3} = \left[\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right] \quad \text{أو}$$

■

151 لتكن المعادلة : $z^3 + (-1+5\imath)z^2 + (-7-4\imath)z + 3 - 3\imath = 0$.

- 1• بيِّن أنّ هذه المعادلة تقبل حلاً تخيليا صرفا يُطلب تعيينه.
- 2• حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ هذه المعادلة.
- 3• نسمي z_0 ، z_1 ، z_2 حلول هذه المعادلة حيث $|z_0| < |z_1| < |z_2|$.

(ا) عيِّن الشكل المثلثي لكل من z_0 ، z_1 و z_2 .

(ب) أحسب العدد : $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

الحلّ. نضع : $f(z) = z^3 + (-1+5\imath)z^2 + (-7-4\imath)z + 3 - 3\imath$.

- 1• ليكن $z = \imath\alpha$ حلاً تخيليا صرفا للمعادلة. لدينا :

$$\begin{aligned} z^3 + (-1+5\imath)z^2 + (-7-4\imath)z + 3 - 3\imath &= (\imath\alpha)^3 + (-1+5\imath)(\imath\alpha)^2 + (-7-4\imath)(\imath\alpha) + 3 - 3\imath \\ &= -\imath\alpha^3 + (-1+5\imath)(-\alpha^2) - 7\imath\alpha + 4\alpha + 3 - 3\imath \\ &= \alpha^2 + 4\alpha + 3 + \imath\left(-\alpha^3 - 5\alpha^2 - 7\alpha - 3\right) \end{aligned}$$

و بالتالي :

$$z^3 + (-1+5\imath)z^2 + (-7-4\imath)z + 3 - 3\imath = 0 \iff \begin{cases} \alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0 \\ -\alpha^3 - 5\alpha^2 - 7\alpha - 3 = 0 \end{cases}$$

للمعادلة الأولى حلاّن هما $\alpha = -3$ و $\alpha = -1$ و نتحقق بسهولة أنّ كِلَيهما حلّ للمعادلة الثانية.

و بالتالي، للمعادلة $f(z) = 0$ حلاّن تخيليان صرفان هما : $z = -\imath$ و $z = -3\imath$.

- 2• نكتب : $f(z) = a(z+\imath)(z+3\imath)(z-\beta)$ ، ننشر و نرتب :

$$\begin{aligned} f(z) &= a(z+\imath)(z+3\imath)(z-\beta) \\ &= az^3 + (-ab + 4a\imath)z^2 + (-3a - 4\imath ab)z + 3ab \\ &= z^3 + (-1+5\imath)z^2 + (-7-4\imath)z + 3 - 3\imath \end{aligned}$$

بالمطابقة ينتج : $a = 1$ ، $-ab + 4a\imath = -1 + 5\imath$ ، $-3a - 4\imath ab = -7 - 4\imath$ و $3ab = 3 - 3\imath$ ؛ أي $a = 1$ و $b = 1 - \imath$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي : $f(z) = (z+\imath)(z+3\imath)(z-1+\imath)$.

إذن، حلول المعادلة $f(z) = 0$ هي : $z_0 = \imath$ ، $z_1 = 1-\imath$ و $z_2 = 3\imath$. لدينا : $|z_0| < |z_1| < |z_2|$.

(ا) لدينا :

$$z_0 = -\imath = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$z_1 = 1-\imath = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = -3\imath = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \imath\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[3, -\frac{\pi}{2}\right]$$

(ب) نلاحظ أنّ $2014 = 4\times 504 - 2$ و بالتالي :

$$\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2014} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-\imath\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)^{2014} = e^{-2014\imath\pi/4}$$
$$= e^{-504\imath\pi + \frac{2\imath\pi}{4}} = e^{\imath\pi/2} = \imath$$

■

152 أحسب الطويلة و عمدة للعدد : $z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + \imath\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

الحلّ. **الطويلة** : $|z|^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$ منه $|z| = 2$.

العمدة : ليكن θ عمدةً للعدد z . بما أنّ $\mathrm{Re}(z) \geq 0$ و $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ فبإمكاننا إختيار θ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

لدينا $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ منه :

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right) - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مع $2\theta \in [0, \pi]$ إذن $2\theta = \frac{\pi}{4}$ أي $\theta = \frac{\pi}{8}$. في الأخير : $\arg(z) = \frac{\pi}{8} \pmod{2\pi}$.

نستنتج أنّ : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ و $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ أي :

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} \quad \text{و} \quad \boxed{\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

■

153 α عدد مركب حيث : $\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \imath\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

- أحسب α^2 و α^4 ثمّ اكتب العدد α^4 على شكله المثلثي.
- إستنتج الطويلة و عمدة للعدد α .
- أحسب كلا من : $\cos\frac{13\pi}{8}$ و $\sin\frac{13\pi}{8}$.
- لتكن M صورة العدد z في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس. عيِّن مجموعة النقط M بحيث يكون : $|\alpha z| = 8$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. 1• لدينا :

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - \imath\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \sqrt{2-\sqrt{2}}^2 - 2\imath\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2+\sqrt{2}}^2 \\ &= 2-\sqrt{2} - 2\imath\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)} - 2-\sqrt{2} \\ &= -2\sqrt{2} - 2\imath\sqrt{4-2} = -2\sqrt{2} - 2\imath\sqrt{2}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\alpha^4 &= \left(-2\sqrt{2} - 2\imath\sqrt{2}\right)^2 = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 (1+\imath)^2 \\ &= 8(1+2\imath-1) = 16\imath \\ &= 16e^{\imath\pi/2} = \left[16, \frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

و الشكل المثلثي :

2• نضع $\alpha = [\rho, \theta]$ فيكون $\alpha^4 = [\rho^4, 4\theta] = \left[16, \frac{\pi}{2}\right]$ و بالتالي $\rho^4 = 16$ و $\rho = 2$ و $4\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ أي $\theta = \frac{\pi}{8} \pmod{\frac{\pi}{2}}$. لكن $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ و $\operatorname{Im}(\alpha) < 0$ منه $\cos\theta > 0$ و $\sin\theta < 0$ و بالتالي $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ منه $\theta = \frac{13\pi}{8} \pmod{2\pi}$ أي $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

في الأخير، $\alpha = \left[2, \frac{13\pi}{8}\right]$.

3• لدينا :

$$\alpha = \sqrt{2-\sqrt{2}} - \imath\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + \imath\sin\frac{13\pi}{8}\right)$$

منه : $\boxed{\cos\frac{13\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ و $\boxed{\sin\frac{13\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$.

4• لدينا :

$$|\alpha z| = 8 \iff |\alpha| \cdot |z| = 8 \iff 2|z| = 8 \iff |z| = 4$$

و هي معادلة الدائرة $\mathscr{C}(O, 4)$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها 4 .

■

154

1• أكتب العدد المركب $(-1-\imath)$ على شكله المثلثي.

2• حلّ في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $\frac{(1-3\imath)z + 3 + \imath}{z - \imath} = z$.

3• ليكن z_0 الحلّ ذا أصغر طويلة للمعادلة السابقة.

(ا) أحسب العدد المركب : $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

(ب) عيِّن قِيَم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^n$ عدداً حقيقياً.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• لدينا :

$$-1-\imath=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\left[\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}\right]$$

2• المعادلة معرّفة إذا و فقط إذا كان $z\neq\imath$. نفرض إذن أنّ $z\neq\imath$ فيكون :

$$\begin{aligned}\frac{(1-3\imath)z+3+\imath}{z-\imath}=z &\iff z(z-\imath)=(1-3\imath)z+3+\imath\\ &\iff z^2-\imath z-(1-3\imath)z-3-\imath=0\\ &\iff z^2-(1-2\imath)z-3-\imath=0\end{aligned}$$

و هي معادلة من الدرجة الثانية، مُمَيِّزها :

$$\Delta=(-(1-2\imath))^2-4(-3-\imath)=9=3^2$$

و بالتالي لها حلاّن هما : $z_0=\frac{1-2\imath+3}{2}=2-\imath$ و $z_1=\frac{1-2\imath-3}{2}=-1-\imath$.

لدينا : $|z_0|=\sqrt{2}$ و $|z_1|=\sqrt{5}$.

3• (أ) بما أنّ $2014=4\times504-2$ فإنّ :

$$\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{\sqrt{2}e^{-3\imath\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)^{2014}=e^{-2014\times3\imath\pi/4}=e^{-2(-3\imath\pi/4)}=e^{3\imath\pi/2}=-\imath$$

(ب) ليكن n عدداً طبيعياً. لدينا :

$$\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n}=\left(\frac{\sqrt{2}e^{-3\imath\pi/4}}{\sqrt{2}}\right)^{n}=e^{-3n\imath\pi/4}=\cos\left(-\frac{3n\pi}{4}\right)+\imath\sin\left(-\frac{3n\pi}{4}\right)$$

إذن، حتى يكون $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عدداً حقيقياً يجب أن يكون $\sin\left(-\frac{3n\pi}{4}\right)=0$ أي يجب أن يكون

$\frac{3n\pi}{4}=0\pmod{\pi}$ أي $3n=0\pmod 4$ أي $n=0\pmod 4$.

إذن، الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عدداً حقيقياً هي مضاعفات العدد 4 .

■

155 α و β عددان حقيقيان. L عدد مركب حيث : $L=\frac{\alpha\imath-4\beta}{5+3\imath}$.

1• أوجد α و β بحيث يكون $|L|=1$ و $\arg(L)=\frac{3\pi}{4}$.

نفرض فيما يلي أنّ $\alpha=\beta=\sqrt{2}$.

2• أحسب : $L^{12}+L^{16}$.

3• n عدد طبيعي زوجي و m عدد طبيعي فردي. أثبت أنّ : $L^{4n}+L^{4m}=0$.

4• n عدد طبيعي. حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z :

$$z^2\cdot L^{2(n+1)}-2z\cdot L^{2n}-L^{2(n+1)}=0$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. لدينا :

$$L=\frac{\alpha\imath-4\beta}{5+3\imath}=\frac{(\alpha\imath-4\beta)(5-3\imath)}{5^2+3^2}=\frac{5\alpha\imath+3\alpha-20\beta+12\beta\imath}{34}=\frac{3\alpha-20\beta}{34}+\frac{5\alpha+12\beta}{34}\imath$$

• 1. العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{3\pi}{4}$ عمدة له هو :

$$1\cdot e^{3\imath\pi/4}=\cos\frac{3\pi}{4}+\imath\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}$$

و بالتالي :

$$L=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\iff\frac{3\alpha-20\beta}{34}+\frac{5\alpha+12\beta}{34}\imath=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\iff\begin{cases}\frac{3\alpha-20\beta}{34}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{5\alpha+12\beta}{34}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}3\alpha-20\beta=-17\sqrt{2}\\ 5\alpha+12\beta=17\sqrt{2}\end{cases}$$

بالحل، نجد أنه للجملة حلّ وحيد و هو : $(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

• 2. بما أنّ $\alpha=\sqrt{2}$ و $\beta=\sqrt{2}$ فحسب السؤال السابق $L=\left[1,\frac{3\pi}{4}\right]$ منه :

$$L^{12}+L^{16}=\left(e^{3\imath\pi/4}\right)^{12}+\left(e^{3\imath\pi/4}\right)^{16}=e^{9\imath\pi}+e^{12\imath\pi}=-1+1=0$$

• 3. إذا كان $n=2k$ و $m=2\ell+1$ مع $k,\ell\in\mathbb{N}$ فإنّ :

$$L^{4n}+L^{4m}=L^{8k}+L^{8\ell+4}=e^{3(8k)\imath\pi/4}+e^{3(8\ell+4)\imath\pi/4}=e^{6k\imath\pi}+e^{3(2\ell+1)\imath\pi}$$
$$=\left(e^{2k\imath\pi}\right)^3+\left(e^{(2\ell+1)\imath\pi}\right)^3=1^3+(-1)^3=1-1=0$$

• 4. ليكن n عدداً طبيعياً. المميّز المختصر للمعادلة هو :

$$\Delta'=\left(L^{2n}\right)^2+L^{2(n+1)}\cdot L^{2(n+1)}=L^{4n}+L^{4(n+1)}$$

لكن n و $n+1$ مختلفان في الزوجية (إذا كان n زوجياً فإنّ $n+1$ فردي، و إذا كان n فردياً فإنّ $n+1$ زوجي) فحسب السؤال السابق فإنّ $\Delta'=0$ و بالتالي للمعادلة حلّ مضاعف :

$$z_1=z_2=\frac{L^{2n}}{L^{2(n+1)}}=L^{-2}=\left(e^{3\imath\pi/4}\right)^{-2}=e^{-3\imath\pi/2}=-\imath$$

■

156 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

z عدد مركب و M صورته. ليكن L العدد المركب المعرف بـ : $L=\frac{z-\alpha\imath}{z+\alpha\imath}$ حيث α وسيط حقيقي غير معدوم.

• 1. عيّن مجموعة النقط M بحيث يكون :

(ا) L عدداً حقيقيا.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ب) L عدداً تخيليا صرفا (ناقش حسب قِيَم الوسيط α) .

• 2 نفرض أنّ $\alpha = 2$. عيِّن مجموعة النقط M بحيث يكون $\frac{\pi}{2}$ عمدةً للعدد L .

الحلّ. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. حتى يكون L معرّفاً، يجب أن يكون $z + \alpha\imath \neq 0$ أي $x^2 + (y+\alpha)^2 \neq 0$.
نفرض إذن أنّ $x^2 + (y+\alpha)^2 \neq 0$. لدينا :

$$\begin{aligned} L &= \frac{x + \imath y - \imath\alpha}{x + \imath y + \imath\alpha} = \frac{(x + \imath(y-\alpha))(x - \imath(y+\alpha))}{x^2 + (y+\alpha)^2} \\ &= \frac{x^2 - \imath(xy + \alpha x) + \imath(xy - \alpha x) + (y-\alpha)(y+\alpha)}{x^2 + (y+\alpha)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - \alpha^2 - 2\imath\alpha x}{x^2 + (y+\alpha)^2} = \frac{x^2 + y^2 - \alpha^2}{x^2 + (y+\alpha)^2} - \frac{2\alpha x}{x^2 + (y+\alpha)^2}\imath \end{aligned}$$

• 1 (أ) حتى يكون L حقيقيا يجب أن يكون $-\frac{2\alpha x}{x^2 + (y+\alpha)^2} = 0$ أي $\alpha x = 0$. لكن $\alpha \neq 0$ منه $x = 0$.
و بالتالي مجموعة النقط M التي من أجلها يكون L حقيقيا هي المستقيم الذي معادلته $x = 0$ (محور التراتيب) باستثناء النقطة ذات الإحداثيين $(0, -\alpha)$.

(ب) حتى يكون L تخيليا صرفا يجب أن يكون $\frac{x^2 + y^2 - \alpha^2}{x^2 + (y+\alpha)^2} = 0$ أي $x^2 + y^2 = \alpha^2$ و هي :

- معادلة الدائرة $\mathscr{C}(O, \alpha)$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها α باستثناء النقطة ذات الإحداثيين $(0, -\alpha)$ إذا كان $\alpha > 0$ ؛
- و معادلة الدائرة $\mathscr{C}(O, -\alpha)$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها $-\alpha$ باستثناء النقطة ذات الإحداثيين $(0, -\alpha)$ إذا كان $\alpha < 0$.

في كل الحالات، مجموعة النقط M التي من أجلها يكون L تخيليا صرفا هي الدائرة $\mathscr{C}(O, |\alpha|)$ التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها $|\alpha|$ باستثناء النقطة ذات الإحداثيين $(0, -\alpha)$.

• 2 إذا كان $\alpha = 2$ فإنّ :

$$L = \frac{x^2 + y^2 - 4}{x^2 + (y+2)^2} - \frac{4x}{x^2 + (y+2)^2}\imath$$

حتى يكون $\frac{\pi}{2}$ عمدةً للعدد L يجب أن يكون $\mathrm{Re}(L) = 0$ و $\mathrm{Im}(L) > 0$ أي $x^2 + y^2 = 4$ و $-4x > 0$ أي $x^2 + y^2 = 2^2$ و $x < 0$.
و بالتالي مجموعة النقط M التي من أجلها يكون $\frac{\pi}{2}$ عمدةً للعدد L هي نصف الدائرة $\mathscr{C}(O, 2)$ المعرفة لأجل $x < 0$ (النقطة ذات الإحداثيين $(0, -2)$ لا تنتمي إليها) .

■

157

• 1 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-m)^2 = m^2 - 1$ حيث z هو المجهول و m وسيط حقيقي. نسمي $\mathscr{S}_m$ مجموعة حلول هذه المعادلة.
عيِّن تِبعاً لقيم الوسيط الحقيقي m عناصر المجموعة $\mathscr{S}_m$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

2• m وسيط مركب و θ وسيط حقيقي حيث $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(z-m)^2 = \cos 2\theta + \imath \sin 2\theta$$

و نرمز بـ z_1 و z_2 إلى حلّيها.

(ا) أحسب z_1 و z_2 .

(ب) نعتبر النقط M من المستوي التي لواحقها $z_1 - z_2$ أو $z_2 - z_1$.

أوجد مجموعة النقط M عندما يتغير θ .

(ج) نفرض أنّ m عدد مركب غير معدوم عمدته ثابتة θ . أوجد مجموعة النقط التي لواحقها $\frac{z_1+z_2}{2}$.

الحلّ. 1• نُميِّز ثلاث حالات :

- إذا كان $m^2 = 1$ أي إذا كان $m = \pm 1$ فإنّ المعادلة تصبح $(z-m)^2 = 0$ تقبل حلاّ مضاعفاً $z = m$ منه $\mathscr{S}_m = \{m\}$.
- إذا كان $m^2 - 1 > 0$ أي إذا كان $m \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإنّ $(z-m)^2 = \left(\sqrt{m^2-1}\right)^2$ منه الحلاّن $z_1 = m - \sqrt{m^2-1}$ و $z_2 = m + \sqrt{m^2-1}$ أي $\mathscr{S}_m = \left\{m - \sqrt{m^2-1}, m + \sqrt{m^2-1}\right\}$.
- إذا كان $m^2 - 1 < 0$ أي $m \in]-1, 1[$ فإنّ $(z-m)^2 = \left(\imath\sqrt{1-m^2}\right)^2$ منه الحلاّن $z_1 = m - \imath\sqrt{1-m^2}$ و $z_2 = m + \imath\sqrt{1-m^2}$ أي $\mathscr{S}_m = \left\{m - \imath\sqrt{1-m^2}, m + \imath\sqrt{1-m^2}\right\}$.

2• (ا) المعادلة تكافئ : $(z-m)^2 = e^{2\imath\theta} = \left(e^{\imath\theta}\right)^2$ و بالتالي لها حلان هما : $z_1 = m - e^{\imath\theta}$ و $z_2 = m + e^{\imath\theta}$.

(ب) لدينا :

$$z_2 - z_1 = m + e^{\imath\theta} - m + e^{\imath\theta} = 2e^{\imath\theta} = 2(\cos\theta + \imath\sin\theta)$$

عندما يتغير θ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ $|z_2 - z_1| = 2$ و $2\cos\theta \geq 0$ و $2\sin\theta \geq 0$ ، إذن عندما يتغير θ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ مجموعة النقط M التي لواحقها $z_2 - z_1$ هي ربع الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 4$ مع $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ؛

بالمثل، $z_1 - z_2 = -2e^{\imath\theta}$ منه عندما يتغير θ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ $|z_1 - z_2| = 2$ و $-2\cos\theta \leq 0$ و $-2\sin\theta \leq 0$ ، إذن عندما يتغير θ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ مجموعة النقط M التي لواحقها $z_1 - z_2$ هي ربع الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 4$ مع $x \leq 0$ و $y \leq 0$

في الأخير، مجموعة النقط M التي لواحقها $z_1 - z_2$ أو $z_2 - z_1$ هي ربعا الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 4$ مع $xy \geq 0$ (شكل VI.21).

(ج) لدينا : $\frac{z_1+z_2}{2} = m$. نضع $m = x + \imath y$.

إذا كان $x = 0$ فإنّ $m = \imath y$ و هي معادلة محور التراتيب و بالتالي مجموعة النقط التي لواحقها $\frac{z_1+z_2}{2}$ هي محور التراتيب (المستقيم $y = 0$) باستثناء النقطة $O(0,0)$.

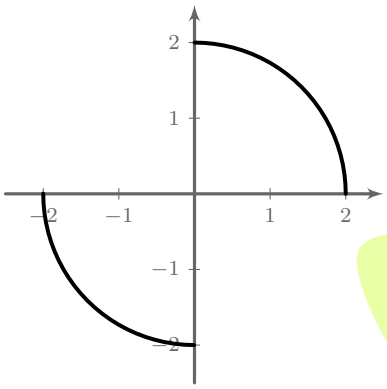
و إذا كان $x \neq 0$ فإنّ $\frac{y}{x} = \tan\theta$ و هو عدد ثابت ، أي $y = x\tan\theta$ و هي معادلة المستقيم الذي يمر بالمركز و يصنع زاوية تساوي θ مع محور الفواصل باستثناء المركز $O(0,0)$.

في كل الحالات، مجموعة النقط التي لواحقها $\frac{z_1+z_2}{2}$ هي المستقيم الذي يمر بالمركز و يصنع زاوية تساوي θ ($\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كان $x = 0$) مع محور الفواصل باستثناء المركز $O(0,0)$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.21

158

1• أكتب العدد $4\sqrt{2}\,(-1+\imath)$ على الشكل المثلثي.

2• نعتبر ثلاثة أعداد مركبة جداؤها $4\sqrt{2}\,(-1+\imath)$.

طويلات هذه الأعداد تُشكِّل حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها 2 و عمداتها حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{\pi}{4}$.

لتكن z_1 ، z_2 و z_3 هذه الأعداد مع $|z_3| \leq |z_2| \leq |z_1|$.

علماً أنّ $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z_1) \leq \pi$ ، أحسب طويلة و عمدةً لكل من z_1 ، z_2 و z_3.

3• أنشئ النقط M_1 ، M_2 و M_3 صور الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 على الترتيب في المستوي المركب.

الحلّ. 1• نضع $4\sqrt{2}\,(-1+\imath) = [\rho, \theta]$. لدينا :

$$\left|4\sqrt{2}\,(-1+\imath)\right| = \left|4\sqrt{2}\right| \cdot \left|(-1+\imath)\right| = 4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8$$

$$\cos\theta = \frac{-4\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

منه $\theta = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$

إذن : $4\sqrt{2}\,(-1+\imath) = 8e^{3\imath\pi/4}$.

2• لتكن ρ_1 ، ρ_2 و ρ_3 طويلات الأعداد z_1 ، z_2 و z_3 على الترتيب و a ، b و c عمداتها (ليس بالضرورة على الترتيب).

لدينا : $\rho_2 = 2\rho_1$ و $\rho_3 = 4\rho_1$.

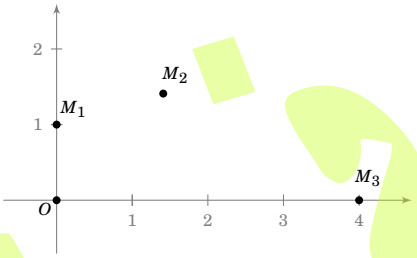
لدينا أيضاً : $b = a + \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ و $c = a + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. منه :

$$\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 = 8 \\ a + b + c = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} 8\rho_1^3 = 8 \\ 3a + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} \rho_1 = 1 \\ a = 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

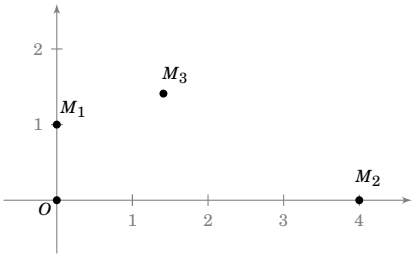
إذن $\rho_1 = 1$ ، $\rho_2 = 2$ و $\rho_3 = 4$ ؛ $a = 0$ ، $b = \frac{\pi}{4}$ و $c = \frac{\pi}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 22.VI



شكل 23.VI

لكن $\frac{\pi}{2} \leq \arg(z_1) \leq \pi$ إذن $\arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$ و بالتالي فإنّ $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$ و $\arg(z_3) = 0$ ؛ أو $\arg(z_2) = 0$ و $\arg(z_3) = \frac{\pi}{4}$ إذن :

$z_1 = e^{\imath\pi/2} = \imath$ ، $z_2 = 2e^{\imath\pi/4}$ و $z_3 = 4e^0 = 4$ ؛

أو $z_1 = e^{\imath\pi/2} = \imath$ ، $z_2 = 4e^0 = 4$ و $z_3 = 2e^{\imath\pi/4}$.

- 3 • أنظر الشكلين 22.VI و 23.VI

■

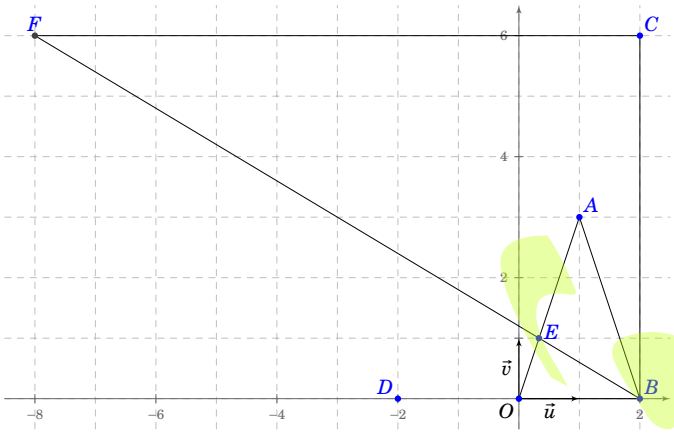
159 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد، متجانس و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_A = 1 + 3\imath$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B = 2$.

- 1 • أنشئ المثلث OAB .
- 2 • إشرح لماذا المثلث OAB متساوي الساقين عند الرأس A .
- 3 • نعتبر النقطة C نظيرة النقطة O بالنسبة إلى A و النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى O .
  - (أ) علم النقطتين C و D على الشكل 24.VI
  - (ب) أوجد العددين z_C و z_D لاحقتَيْ C و D على الترتيب.
- 4 • لتكن E صورة A بالتحاكي الذي مركزه O و نسبته $\frac{1}{3}$.
  - (أ) علم النقطة E على الشكل 24.VI
  - (ب) أوجد العدد z_E لاحقة النقطة E .
- 5 • لتكن F مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{(A, 2), (B, -3), (D, 2)\}$.
  - (أ) أوجد z_F لاحقة النقطة F .
  - (ب) علم النقطة F على الشكل 24.VI
- 6 • أثبت أنّ النقط B ، E و F على استقامة واحدة.
- 7 • ليكن Z العدد المركب المعرف بـ : $Z = \frac{z_F - z_C}{z_B - z_C}$.
  - (أ) أوجد العدد الحقيقي a بحيث $Z = a\imath$. فصّل إجابتك.
  - (ب) أوجد الطويلة $|Z|$ و عمدةً $\arg(Z)$ للعدد Z .
  - (ج) إستنتج طبيعة المثلث CBF . علّل.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.24

الحلّ.

1• أنظر الشكل VI.24.

2• لدينا : $OA = |z_A - z_O| = |1 + 3\imath| = \sqrt{10}$ و $AB = |z_B - z_A| = |1 - 3\imath| = \sqrt{10}$ منه $OA = AB$ إذن المثلث OAB متساوي الساقين عند الرأس A .

3• (أ) أنظر الشكل VI.24.

(ب) لدينا : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC}$ منه $z_A - z_O = z_C - z_A$ أي $z_C = 2z_A - z_O = 2 + 6\imath$.

بالمثل، $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ منه $z_O - z_B = z_D - z_O$ أي $z_D = 2z_O - z_B = -2$.

4• (أ) أنظر الشكل VI.24.

(ب) لدينا : $z_E - z_O = \frac{1}{3}(z_A - z_O)$ منه $z_E = \frac{1}{3}z_A = \frac{1}{3} + \imath$ (أنظر أيضاً اللازمة 1 صفحة 53) .

5• (أ) أنظر الشكل VI.24.

(ب) لدينا : $2(z_A - z_F) - 3(z_B - z_F) + 2(z_D - z_F) = 0$ منه $(2 - 3 + 2)z_F = 2z_A - 3z_B + 2z_D$

أي $z_F = -8 + 6\imath$.

6• لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BE}$ هي $z_E - z_B = \frac{1}{3} + \imath - 2 = -\frac{5}{3} + \imath$ و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{BF}$ هي $z_F - z_B = -8 + 6\imath - 2 = -10 + 6\imath = 6\left(-\frac{5}{3} + \imath\right)$ إذن $\overrightarrow{BF} = 6\overrightarrow{BE}$ و هذا يعني أنّ النقط B ، E و F على استقامة واحدة.

7• (أ) لدينا :

$$Z = \frac{z_F - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-8 + 6\imath - 2 - 6\imath}{2 - 2 - 6\imath} = \frac{-10}{-6\imath} = -\frac{5}{3}\imath$$

إذن $a = -\frac{5}{3}$.

(ب) لدينا : $|Z| = \left|-\frac{5}{3}\imath\right| = \frac{5}{3}$ و

$$\arg(Z) = \arg\left(-\frac{5}{3}\imath\right) = \arg\left(-\frac{5}{3}\right) + \arg(\imath) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \pmod{2\pi} = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

(ج) بما أنّ $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}\right) = \arg(Z) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ فإنّ CBF قائم الزاوية في C .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

160

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد، متجانس و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_A = 1$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B = 3 - 2\imath$.
لكل عدد مركب z ، نضع : $z' = \imath z + 1 - \imath$ و نعتبر التحويل F الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' .

1. علم النقطتين A و B على الشكل **VI**.25.
2. في هذا السؤال، نعتبر نقطة M تختلف عن A لاحقتها $z \neq 1$.
   (أ) أكتب العدد $Z = \dfrac{z' - 1}{z - 1}$ على الشكل الجبري.
   (ب) أوجد الطويلة $|Z|$ و عمدةً $\arg(Z)$ للعدد Z .
   (ج) عبِّر عن الطول AM' بدلالة AM ، ثمّ أوجد $\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right)$.
   (د) إستنتج طبيعة التحويل F و عناصره المميِّزة.
3. أوجد $z_{A'}$ و $z_{B'}$ لاحقتَيِ النقطتين A' و B' ، صورتَيِ A و B بالتحويل F .
4. لتكن C النقطة التي صورتها بالتحويل F هي النقطة C' ذات اللاحقة $z_{C'} = -3 - 3\imath$.
   (أ) أوجد z_C لاحقة النقطة C .
   (ب) أنشئ المثلثين ABC' و ACB' على الشكل **VI**.25.
5. لتكن I منتصف القطعة $[BC']$.
   (أ) أوجد z_I لاحقة النقطة I . أنشئ، في المثلث ABC' ، المتوسّط $\mathscr{D}$ المتعلق بالرأس A .
   (ب) أوجد لاحقتَيِ الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CB'}$.
   (ج) ما هي الوضعية النسبية للمستقيمين (AI) و (CB') ؟ برِّر إجابتك.
   (د) ماذا يُمثّل المستقيم $\mathscr{D}$ بالنسبة إلى المثلث ACB' ؟
6. ليكن $\mathscr{D}'$ صورة المستقيم (AI) بالتحويل F . أوجد $\mathscr{D}'$ و أنشئه على الشكل **VI**.25.

الحلّ.

1. أنظر الشكل **VI**.25 .
2. (أ) لدينا :

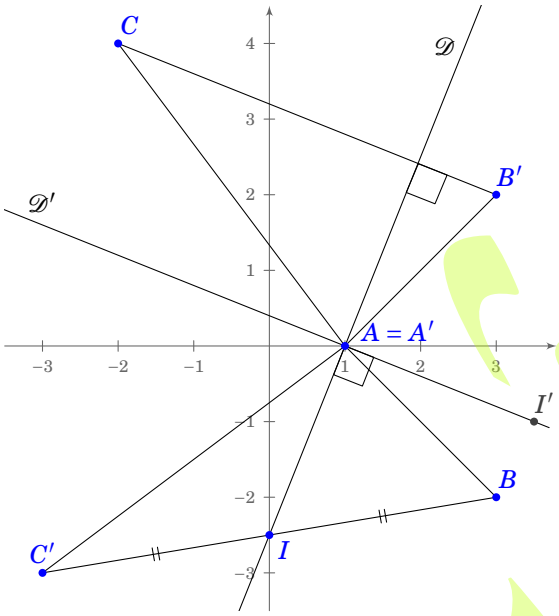
$$Z = \frac{z' - 1}{z - 1} = \frac{\imath z + 1 - \imath - 1}{z - 1} = \frac{\imath z - \imath}{z - 1} = \frac{\imath(z - 1)}{z - 1} = \imath$$

(ب) بما أنّ $Z = \imath = e^{\imath\pi/2}$ فإنّ $|Z| = 1$ و $\arg(Z) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
(ج) لدينا إذن $z' - 1 = \imath(z - 1)$ منه :

$$AM' = |z' - z_A| = |z' - 1| = |\imath(z - 1)| = |\imath| \cdot |z - 1| = 1 \cdot |z - z_A| = |z - z_A| = AM$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}}\right) = \arg\left(\frac{z' - z_A}{z - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z' - 1}{z - 1}\right) = \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.25

(د) بما أنّ $z' - z_A = e^{\imath\pi/2}(z - z_A)$ فإنّ F هو الدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

• 3 لدينا :

$$z_{A'} = \imath z_A + 1 - \imath = \imath + 1 - \imath = 1$$
$$z_{B'} = \imath z_B + 1 - \imath = \imath(3 - 2\imath) + 1 - \imath = 3\imath + 2 + 1 - \imath = 3 + 2\imath$$

يمكن أيضاً ملاحظة أنّ $z_{A'} = z_A$ لأنّ A هي مركز الدوران F و بالتالي فهي نقطة صامدة (و هي وحيدة).

• 4 (ا) بما أنّ $\imath z_C = -3 - 3\imath - 1 + \imath = -4 - 2\imath$ فإنّ $z_{C'} = \imath z_C + 1 - \imath = -3 - 3\imath$

أي $z_C = \frac{1}{\imath}(-4 - 2\imath) = -\imath(-4 - 2\imath) = -2 + 4\imath$.

إذن لاحقة النقطة C هي $z_C = -2 + 4\imath$.

(ب) أنظر الشكل VI.25 .

• 5 (ا) لدينا :

$$z_I = \frac{z_B + z_{C'}}{2} = \frac{3 - 2\imath - 3 - 3\imath}{2} = -\frac{5}{2}\imath$$

أنظر الشكل VI.25 .

(ب) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AI}$ هي $-\frac{5}{2}\imath$ ، و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{CB'}$ هي $z_{B'} - z_C = 5 - 2\imath$.

(ج) المستقيمان (AI) و (CB') متعامدان لأنّ الشعاعان $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}-1\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{CB'}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ متعامدان و هذا ما يُبيِّنه الحساب:

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CB'} = -1 \times 5 + (-2)\left(-\frac{5}{2}\right) = 0$$

(د) المستقيم $\mathscr{D}$ هو العمود النازل من الرأس A في المثلث ACB' لأنه يمر بالرأس A و يُعامد الضلع CB' (المستقيم $\mathscr{D}$ هو المستقيم (AI)) .

• 6 صورة المستقيم (AI) بالدوران F هو المستقيم $(A'I')$ حيث $A' = F(A) = A$ و $I' = F(I)$. و بما أنّ زاوية هذا الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ فإنّ المستقيم $\mathscr{D}'$ هي المستقيم الذي يمر بالنقطة A و عمودي على (AI) . أنظر الشكل VI.25 .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

161

المستوي المركب $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

الجزء الأول

نعتبر التحويل النقطي T_0 الذي يرفق بكل نقطة M من $\mathscr{P}$ لاحقتها z النقطة M' التي لاحقتها z' حيث :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}\imath z + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1• أوجد b لاحقة النقطة الصامدة الوحيدة B بالتحويل T_0 أي التي تحقق : $T_0(B) = B$.

2• نفرض أنّ M تختلف عن B و نضع : $Z = \dfrac{z' - b}{z - b}$.

(ا) أوجد العدد الحقيقي R بحيث $Z = \imath R$.

(ب) أوجد الطويلة $|Z|$ و عمدةً $\arg(Z)$ للعدد Z .

(ج) إستنتج قيساً للزاوية $\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}\right)$ و عبارة BM' بدلالة BM .

الجزء الثاني

ليكن α عدداً مركبا و A_α النقطة ذات اللاحقة α .
نعتبر التحويل النقطي T_α الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي، ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \imath)z + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \alpha)$$

1• نفرض في هذا السؤال أنّ : $\alpha = \sqrt{2} - \imath$.

(ا) أوجد لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$.

(ب) إستنتج أنّ $T_{\sqrt{2}-\imath}$ تحويل هندسي بسيط يُطلب تعيين عناصره المميِّزة.

2• (ا) توجد قيمة وحيدة α_1 للعدد α التي من أجلها يكون التحويل T_{α_1} دوراناً مركزه O . ما هي هذه القيمة ؟

(ب) أوجد θ_1 زاوية هذا الدوران مع التعليل.

الحلّ.

الجزء الأول

1• لإيجاد النقط الصامدة، نحل المعادلة $z' = z$ ذات المجهول z :

$$\begin{aligned} z' = z &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}\imath z + \frac{\sqrt{2}}{2} = z \\ &\iff z\left(2 - \sqrt{2}\imath\right) = \sqrt{2} \\ &\iff z = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}\imath} = \frac{\sqrt{2}\left(2 + \sqrt{2}\imath\right)}{4 + 2} = \frac{\sqrt{2} + \imath}{3} \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

إذن لاحقة النقطة الصامدة الوحيدة هي $b = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\imath$.

2• (أ) بما أنّ $b' = b$ فإنّ $b = \frac{\sqrt{2}}{2}\imath b + \frac{\sqrt{2}}{2}$ منه :

$$Z = \frac{z' - b}{z - b} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\imath z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\imath b + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{z - b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\imath(z - b)}{z - b} = \frac{\sqrt{2}}{2}\imath$$

إذن $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ب) لدينا : $|Z| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و

$$\arg(Z) = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\imath\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arg(\imath) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

(ج) لدينا :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}}\right) = \arg\left(\frac{z' - b}{z - b}\right) = \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\frac{BM'}{BM} = |Z| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow BM' = \frac{\sqrt{2}}{2}BM$$

الجزء الثاني

1• (أ) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ هي :

$$z' - z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2} - \imath + \imath\right)z + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \imath\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \imath\right)$$

(ب) بما أنّ الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ ثابت (لأنّ لاحقته ثابتة) فإنّ $T_{\sqrt{2}-\imath}$ هو الإنسحاب الذي لاحقة شعاعه $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \sqrt{2} + \imath\right)$.

2• (أ) حتى يكون التحويل T_α دوراناً، يجب أن يكون $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \imath)\right| = 1$. لكن :

$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \imath)\right| = 1 \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\alpha^2 + 1} = 1$$

$$\iff \sqrt{\alpha^2 + 1} = \sqrt{2} \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1$$

و حتى تكون النقطة O مركز الدوران T_α يجب أن يكون :

$T_\alpha(O) = O$ أي $0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \imath) \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \alpha)$ منه $\alpha = 1$.

إذن، توجد قيمة وحيدة للعدد α ، و هي $\alpha_1 = 1$ ، و التي من أجلها يكون التحويل T_{α_1} دوراناً مركزه O .

ملاحظة 35 : ◁ لأجل $\alpha = -1$ ، T_{-1} دوران مركزه هو النقطة الصامدة الوحيدة التي تحقق :

$T(M) = M$. نجد أنّ لاحقة هذا المركز هي $\frac{1 + \sqrt{2} + \imath}{2 + \sqrt{2}}$.

▷

(ب) في هذه الحالة، لدينا : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \imath)z = e^{\imath\pi/4}z$ و بالتالي فإنّ زاوية هذا الدوران هي $\theta_1 = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

162

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و F ذوات اللواحق :

$$z_A = 4 + 4\imath \ , \quad z_B = 4 \ , \quad z_C = 7 \ , \quad z_F = 4 + 3\imath$$

لتكن E نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (OF) .

الجزء الأول

1. أنشئ الشكل.
2. (ا) أكتب العدد $\dfrac{z_F}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري.

   (ب) ما الذي تستنتجه من السؤال السابق فيما يخص المستقيمين (OF) و (AC) ؟ علّل.
3. نريد التحقق من أنّ النقطة F هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{(O, 3) , (A, \alpha) , (C, 25 - \alpha)\}$ حيث α عدد حقيقي.

   (ا) عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{OF}$ بدلالة α ، $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$.

   (ب) إستنتج قيمة α .
4. النقطة E ، نقطة تقاطع (AC) و (OF) ، هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{(A, \beta) , (C, 4)\}$. أوجد قيمة β .

الجزء الثاني

نعتبر الدوائر الآتية :

- الدائرة $\mathscr{C}_1$ ، المحيطة بالمثلث BOF ، و التي مركزها Ω_1 و نصف قطرها r_1 .
- الدائرة $\mathscr{C}_2$ ، المحيطة بالمثلث OEC ، و التي مركزها Ω_2 و نصف قطرها r_2 .
- الدائرة $\mathscr{C}_3$ ، المحيطة بالمثلث ABC ، و التي مركزها Ω_3 و نصف قطرها r_3 .
- الدائرة $\mathscr{C}_2$ ، المحيطة بالمثلث AEF ، و التي مركزها Ω_4 و نصف قطرها r_4 .

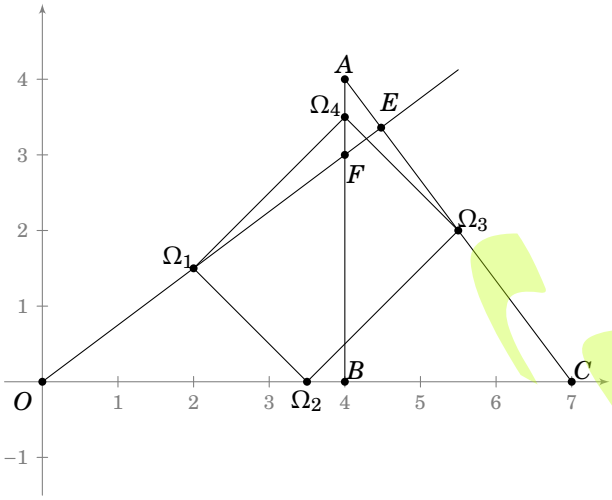
1. أوجد الأعداد z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 لواحق النقط Ω_1 ، Ω_2 ، Ω_3 و Ω_4 على الترتيب.
   أحسب r_1 ، r_2 ، r_3 و r_4 .
2. أحسب العددين $z_4 - z_3$ و $z_2 - z_1$ على الشكل الجبري.
   ما الذي تستنتجه بالنسبة للرباعي $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ ؟
3. أحسب العدد $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}$ على الشكل الجبري.
   ما الذي تستنتجه بالنسبة للرباعي $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ ؟

الحلّ.

الجزء الأول

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.26

1• أنظر الشكل VI.26 .

2• لدينا :

$$\frac{z_F}{z_A - z_C} = \frac{4+3\imath}{(4+4\imath)-7} = \frac{4+3\imath}{-3+4\imath} = \frac{4+3\imath}{\imath(3\imath+4)} = \frac{1}{\imath} = -\imath$$

3• الشعاعان $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{OF}$ متعامدان لأنّ $\frac{z_F - z_O}{z_A - z_C} = -\imath$ منه $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}}\right) = \arg\left(\frac{z_F - z_O}{z_A - z_C}\right) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$

أي $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{OF}$ (أنظر أيضاً اللازمة 1 صفحة 53) .

4• (أ) حسب تعريف مركز المسافات المتناسبة، النقطة F تحقق $(3+\alpha+(25-\alpha))\overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OA}+(25-\alpha)\overrightarrow{OC}$

أي $28\overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OA} + (25-\alpha)\overrightarrow{OC}$ منه $\overrightarrow{OF} = \frac{\alpha}{28}\overrightarrow{OA} + \frac{25-\alpha}{28}\overrightarrow{OC}$.

(ب) لدينا :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OF} = 0 &\iff \frac{\alpha}{28}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{25-\alpha}{28}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC} = 0 \\
&\iff \alpha\begin{pmatrix}4-7\\4-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4-0\\4-0\end{pmatrix} + (25-\alpha)\begin{pmatrix}4-7\\4-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7-0\\0-0\end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \alpha(-3\times4+4\times4) + (25-\alpha)(-3\times7+0\times0) = 0 \\
&\iff 4\alpha - 21(25-\alpha) = 0 \iff \alpha = 21
\end{aligned}$$

(ج) لدينا : $(\beta+4)\overrightarrow{OE} = \beta\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OC}$ و بما أنّ $E \in (OF)$ و $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{OF}$ فإنّ $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{OE}$ منه :

$$\begin{aligned}
0 = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{CA}\cdot(\beta+4)\overrightarrow{OE} \\
&= \overrightarrow{CA}\cdot\left(\beta\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OC}\right) = \beta\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC} \\
&= \beta(-3\times4+4\times4) + 4(-3\times7+0\times0) \\
&= 4\beta - 4\times21
\end{aligned}$$

و بالتالي فإنّ $\beta = 21$.

الجزء الثاني

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 1 مركز الدائرة المحيطة بمثلث هو نقطة تقاطع منصِّفات أضلاعه منه :

$$z_1 = 2 + \frac{3}{2}\imath, \quad z_2 = \frac{7}{2}, \quad z_3 = \frac{11}{2} + 2\imath, \quad z_4 = 4 + \frac{7}{2}\imath$$
$$r_1 = \frac{5}{2}, \quad r_2 = \frac{7}{2}, \quad r_3 = \frac{5}{2}, \quad r_4 = \frac{1}{2}$$

• 2 لدينا : $z_3 - z_4 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\imath$ و $z_2 - z_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\imath$ منه $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} = \overrightarrow{\Omega_4\Omega_3}$ أي $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ متوازي أضلاع.

لدينا :

$$\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\imath}{-2 - 2\imath} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1-\imath}{1+\imath}\right) = -\frac{3}{8}(1-\imath)^2 = \frac{3}{4}\imath$$

منه $\left(\overrightarrow{\Omega_4\Omega_3}, \overrightarrow{\Omega_4\Omega_1}\right) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ أي $\Omega_1\Omega_2\Omega_3\Omega_4$ مستطيل (أنظر أيضاً اللازمة 1 صفحة 53) . ■

163

المستوي منسوب إلى معلم متعامد، متجانس و مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

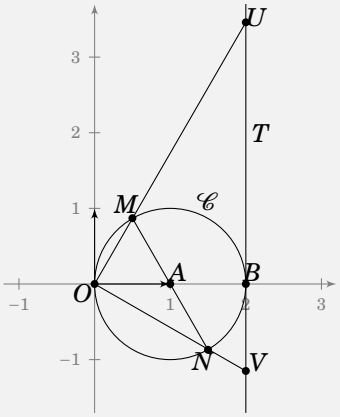
لتكن A النقطة التي لاحقتها 1 و B النقطة ذات اللاحقة 2 .

نعتبر الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها A و نصف قطرها 1 و المستقيم T ، المماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B ، و الذي معادلته $x = 2$.

لكل عدد حقيقي φ بحيث $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ نضع :

$$z_\varphi = (\cos(\varphi) + 1) + \imath\sin(\varphi)$$

أخيراً، لتكن M_φ النقطة التي لاحقتها z_φ .



• 1 أين تتواجد النقطة M_φ عندما : $\varphi = -\pi$ ؟ $\varphi = \pi$ ؟ $\varphi = 0$ ؟

• 2 ليكن $\varphi \in]-\pi, \pi[$.

(أ) أوجد، بدلالة φ ، لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM_\varphi}$.

(ب) برِّر أنّ النقطة M_φ تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}$.

• 3 **فيما يلي، نفرض أنّ : $\varphi = \frac{2\pi}{3}$** .

لتكن M النقطة التي لاحقتها : $z = \frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$ ؛ و لتكن N نظيرة M بالنسبة إلى A .

أوجد Z لاحقة النقطة N .

• 4 حدِّد معادلة ديكارتية للمستقيم $\mathscr{D}$ منصِّف القطعة [MN] .

• 5 نعتبر النقطة U نقطة تقاطع المستقيم (OM) مع المماس T و V نقطة تقاطع المستقيم (ON) مع المماس T .

(أ) أوجد u لاحقة النقطة U و v لاحقة النقطة V .

(ب) أوجد k لاحقة النقطة K منتصف القطعة [UV] .

(ج) إستنتج معادلة ديكارتية للمستقيم Δ منصِّف القطعة [UV] .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

6• (ا) حدِّد ω لاحقة Ω نقطة تقاطع المستقيمين $\mathscr{D}$ و Δ .

(ب) أرسم المستقيمين $\mathscr{D}$ و Δ و الدائرة $\mathscr{C}'$ التي مركزها Ω و تمرّ بالنقطة M .

ما هي النقط الثلاث المذكورة أعلاه، باستثناء النقطة M ، و التي تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}'$ ؟

الحلّ.

1• لدينا : $z_{-\pi} = (1+\cos(-\pi)) + \imath\sin(-\pi) = 0$ منه $M_{-\pi} = O$. بالمثل، $z_\pi = 0$ منه $M_\pi = O$ و $z_0 = 1$ منه $M_0 = B$.

2• (ا) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AM_\varphi}$ هي $z_{M_\varphi} - z_A = z_\varphi - 1 = \cos\varphi + \imath\sin\varphi = e^{\imath\varphi}$.

(ب) بما أنّ $AM_\varphi = |z_\varphi - 1| = |e^{\imath\varphi}| = 1$ فإنّ $M_\varphi \in \mathscr{C}$.

3• لدينا : $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM}$ منه $Z - z_A = -(z_M - z_A)$ منه :

$$Z = -z + 2z_A = -\left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 = \frac{3}{2} - \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4• المنصِّف $\mathscr{D}$ هو مجموعة النقط P بحيث $PM = PN$. ليكن x و y إحداثيَّ النقطة P . لدينا :

$$\begin{aligned} PM = PN &\iff \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2 + y^2 - x - \sqrt{3}y + 1 = x^2 + y^2 - 3x + \sqrt{3}y + 3 \\ &\iff x - \sqrt{3}y - 1 = 0 \end{aligned}$$

إذن معادلة $\mathscr{D}$ هي $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$.

5• (ا) معادلة (OM) من الشكل $y = ax$ حيث a عدد حقيقي.

بما أنّ $M \in (OM)$ فإنّ $\frac{\sqrt{3}}{2} = a \times \frac{1}{2}$ منه $a = \sqrt{3}$ و بالتالي، معادلة (OM) هي $y = \sqrt{3}x$.

ليكن x و y إحداثيَّ النقطة U . بما أنّ $U \in T$ فإنّ $x = 2$ و بما أنّ $U \in (OM)$ فإنّ $y = \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$

إذن $U = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$ أي $u = 2 + 2\imath\sqrt{3}$.

بالمثل، معادلة (ON) من الشكل $y = bx$ حيث b عدد حقيقي.

بما أنّ $N \in (ON)$ فإنّ $-\frac{\sqrt{3}}{2} = b \times \frac{3}{2}$ منه $b = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ إذن معادلة (ON) هي $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

ليكن x و y إحداثيَّ V . بما أنّ $V \in T$ فإنّ $x = 2$ و بما أنّ $V \in (ON)$ فإنّ $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ منه

$V = \left(2, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ أي $v = 2 - \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}$.

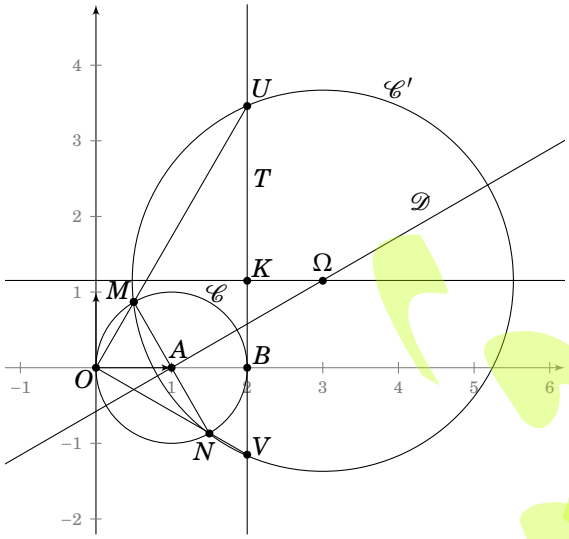
(ب) لدينا :

$$k = \frac{u+v}{2} = \frac{1}{2}\left[2 + 2\imath\sqrt{3} + 2 - \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}\right] = 2 + \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}$$

(ج) معادلة المستقيم (UV) هي $x = 2$ و بالتالي فإنّ معادلة منصِّف القطعة [UV] أي Δ هي من الشكل $y = c$ حيث $c \in \mathbb{R}$. لكن $K \in \Delta$ إذن معادلة Δ هي $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل 27.VI

6• (ا) ليكن x و y إحداثيّيْ Ω . بما أنّ $\Omega \in \Delta$ فإنّ $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. و بما أنّ $\Omega \in \mathscr{D}$ فإنّ $x - \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 = 0$

منه $x = 3$ إذن $\omega = 3 + \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}$.

(ب) أنظر الشكل 27.VI

لدينا : $\Omega \in \Delta$ منه : $\Omega U = \Omega V = \left|\left(2 - \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}\right) - \left(3 + \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{57}}{3}$.

بالمثل، $\Omega \in \mathscr{D}$ منه : $\Omega M = \Omega N = \left|\left(\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(3 + \frac{2\imath\sqrt{3}}{3}\right)\right| = \frac{\sqrt{57}}{3}$.

إذن $\Omega M = \Omega N = \Omega U = \Omega V$ أي أنّ النقط N ، U و V تنتمي إلى الدائرة $\mathscr{C}'$.

■

164 في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، I و B ذوات اللواحق :

$$z_A = 1 \ , \quad z_I = 2 \ , \quad z_B = 3$$

لكل عدد مركب z يختلف عن 2 نضع : $z' = \frac{1}{z-2} + 2$ و نعتبر الدالة F التي ترفق بكل نقطة M من المستوي، تختلف عن I و التي لاحقتها z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' .

1• أوجد المجموعة $\mathscr{E}$ للنقط M بحيث $F(M) = M$. علّل إجابتك.

2• (ا) أحسب، بدلالة z ، لاحقتَيْ الشعاعين $\overrightarrow{IM}$ و $\overrightarrow{IM'}$.

(ب) إستنتج علاقة تربط بين الطولين IM و IM' و علاقة بين الزاويتين $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM}\right)$ و $\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right)$.

3• نعتبر نقطة M تختلف عن I ، عن A و عن B و لتكن z لاحقتها.

(ا) أوجد العدد الحقيقي β بحيث : $\frac{1-z'}{3-z'} = \beta\frac{1-z}{3-z}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ب) إستنتج علاقة بين $\frac{M'A}{M'B}$ و $\frac{MA}{MB}$ و علاقة بين الزاويتين $\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right)$ $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)$.

(ج) نفرض أنّ النقطة M تنتمي إلى المستقيم Δ منصِّف القطعة [AB] . ما الذي تستنتجه بالنسبة للنقطة M' ؟ برِّر إجابتك.

الحلّ. 1• لدينا :

$$F(M) = M \iff z' = z \iff \frac{1}{z-2} + 2 = z$$
$$\iff z - 2 = \frac{1}{z-2} \iff (z-2)^2 = 1 \iff z - 2 = \pm 1$$
$$\iff z = 1 \text{ أو } z = 3 \iff M = A \text{ أو } M = B$$

إذن : $\mathscr{E} = \{A, B\}$.

2• (أ) لاحقة الشعاع $\overrightarrow{IM}$ هي $z_M - z_I$ أي $z - 2$ ؛

و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{IM'}$ هي $z_{M'} - z_I$ أي $z' - 2 = \frac{1}{z-2}$.

(ب) من السؤال السابق نستنتج أنّ : $IM' = \frac{1}{IM}$. من جهة أخرى، لدينا :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM'}\right) = \arg\left(z_{M'} - z_I\right) \pmod{2\pi} = \arg\left(z' - 2\right) \pmod{2\pi} = \arg\left(z' - 2\right) \pmod{2\pi}$$
$$= \arg\left(\frac{1}{z-2}\right) \pmod{2\pi} = -\arg(z-2) \pmod{2\pi} = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{IM}\right)$$

3• (أ) لدينا :

$$\frac{1-z'}{3-z'} = \frac{-1-\frac{1}{z-2}}{1-\frac{1}{z-2}} = \frac{-(z-2)-1}{(z-2)-1} = -\frac{z-1}{z-3} = -\frac{1-z}{3-z}$$

إذن : $\beta = -1$.

(ب) من السؤال السابق نستنتج أنّ : $\frac{M'A}{M'B} = \frac{MA}{MB}$. من جهة أخرى لدينا :

$$\left(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}\right) = \arg\left(\frac{1-z'}{3-z'}\right) \pmod{2\pi} = \arg\left(-\frac{1-z}{3-z}\right) \pmod{2\pi}$$
$$= \left(\arg(-1) + \arg\left(\frac{1-z}{3-z}\right)\right) \pmod{2\pi}$$
$$= \left(\pi + \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right)\right) \pmod{2\pi}$$

(ج) لدينا :

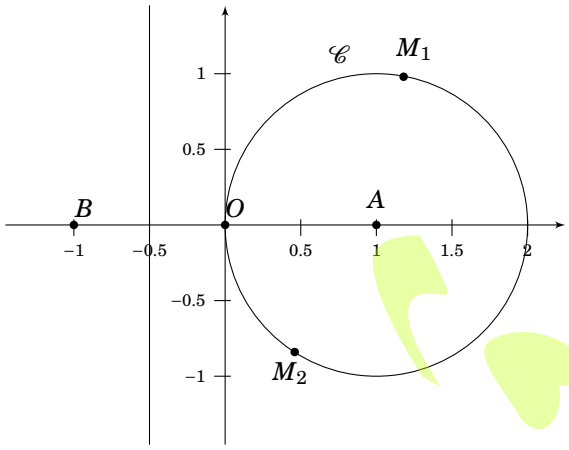
$$M \in \Delta \implies MA = MB \implies \frac{MA}{MB} = 1$$
$$\implies \frac{M'A}{M'B} = 1 \qquad \text{(حسب السؤال السابق)}$$
$$\implies M'A = M'B \implies M' \in \Delta$$

إذن النقطة M' أيضاً تنتمي إلى Δ منصِّف القطعة [AB].

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.28

165

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

لتكن F الدالة التي ترفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث : $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$.

1• (ا) عبِّر عن $|z'|$ بدلالة $|z|$.

(ب) عيِّن عمدةً للعدد z' بدلالة $\arg(z)$ ، عمدة z .

ما الذي يمكن استنتاجه بالنسبة للنقط O ، M و M' ؟

2• نعتبر الدائرة Γ التي مركزها O و نصف قطرها 1 . لتكن M نقطة من Γ لاحقتها z .

(ا) أوجد $|z'|$.

(ب) ما هي صورة الدائرة Γ بالدالة F ؟

3• لتكن A و B صورتَيِّ العددين 1 و -1 على الترتيب و لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي مركزها A و تمر بالنقطة O . لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z .

(ا) ما هو الشرط الذي يجب أن يُحققه العدد z حتى تكون M نقطة من $\mathscr{C}$ ؟

(ب) نفرض أنّ M نقطة من $\mathscr{C}$ تختلف عن O .

(i) أحسب $\left|\frac{z'+1}{z'}\right|$ مُبيِّناً تفاصيل الحساب.

(ii) قارن الطولين BM' و OM' .

(iii) إستنتج أنّ النقطة M' تنتمي إلى مستقيم ثابت (D) يُطلب تعيينه.

(ج) أنشئ على الشكل VI.28 النقطتين M'_1 و M'_2 صورتَيْ M_1 و M_2 على الترتيب.

(د) ما هي صورة الدائرة $\mathscr{C}$ ، باستثناء النقطة O ، بالدالة F ؟

الحلّ.

1• (ا) لدينا : $|z'| = \left|-\frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|\bar{z}|} = \frac{1}{|z|}$.

(ب) لدينا :

$$\arg(z') = \arg(-1) - \arg(\bar{z}) \pmod{2\pi} = \pi - (-\arg(z)) \pmod{2\pi} = \arg(z) + \pi \pmod{2\pi}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

حسب المبرهنة 24 صفحة 52 فإنّ :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}}\right) = \arg\left(\frac{z'-0}{z-0}\right) \pmod{2\pi} = \arg(z') - \arg(z) \pmod{2\pi} = \pi \pmod{2\pi}$$

و هذا يعني أنّ النقط O ، M و M' على استقامة واحدة و أنّ النقطة O تنتمي إلى القطعة المستقيمة $[MM']$.

• 2 (ا) إذا كانت $M \in \Gamma(O,1)$ فإنّ $\|\overrightarrow{OM}\| = 1$ منه $|z| = 1$ و $|z'| = \frac{1}{|z|} = 1$.

(ب) بما أنّ $|z'-0| = |z'| = 1$ فإنّ $\left\|\overrightarrow{OM'}\right\| = 1$ و هذا يعني أنّ $M' \in \Gamma(O,1)$ أي $F(\Gamma) \subset \Gamma$.

من جهة أخرى، إذا كانت $P \in \Gamma$ لاحقتها u فإنّ $|u| = 1$ و $P \in F(\Gamma)$ إذا و فقط إذا وُجدت نقطة M لاحقتها z بحيث $P = F(M)$. لكن :

$$u = -\frac{1}{\bar{z}} \iff \bar{z} = -\frac{1}{u} \iff z = -\frac{1}{\bar{u}}$$

إذن النقطة P ذات اللاحقة u هي صورة النقطة M ذات اللاحقة $-\frac{1}{\bar{u}}$ بالدالة F أي $P \in F(\Gamma)$ و هذا يعني أنّ $\Gamma \subset F(\Gamma)$.

في الأخير : $F(\Gamma) \subset \Gamma$ و $\Gamma \subset F(\Gamma)$ إذن $F(\Gamma) = \Gamma$ أي : صورة Γ بالدالة F هي Γ نفسها.

• 3 (ا) لدينا :

$$M \in \mathscr{C}(A,1) \iff \|\overrightarrow{MA}\| = 1 \iff |z_M - z_A| = 1 \iff |z-1| = 1$$

(ب) بما أنّ $M \neq O$ فإنّ $z \neq 0$ و بالتالي فإنّ z' مُعرَّف.

(i) بما أنّ $M \in \mathscr{C}$ فحسب السؤال السابق فإنّ $|1-z| = 1$ منه :

$$\left|\frac{z'+1}{z'}\right| = \left|1 + \frac{1}{z'}\right| = |1-\bar{z}| = \left|\overline{1-z}\right| = |1-z| = 1$$

(ii) لدينا :

$$\left|\frac{z'+1}{z'}\right| = 1 \iff |z'+1| = |z'-0| \iff \left\|\overrightarrow{BM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|$$

أي : $BM' = OM'$.

(iii) مجموعة النقط M' تُحقق $BM' = OM'$ أي أنّ M' تنتمي إلى المستقيم (D) مُنصِّف القطعة المستقيمة [OB] و الذي معادلته الديكارتية هي : $x = -\frac{1}{2}$.

(iv) النقطة M' صورة M بالدالة F تُحقق : $M' \in [OM]$ و $M' \in (D)$ إذن M' هي نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (OM) . هكذا نُنشِئ النقطتين M'_1 و M'_2 (شكل **VI**.29).

■

166 المستوي المركب $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد، متجانس و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

الجزء الأول

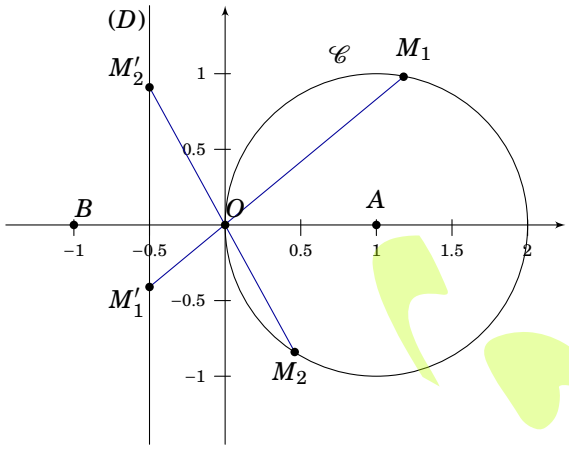
• 1 أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)^2$.

• 2 لتكن A النقطة ذات اللاحقة $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ و B النقطة ذات اللاحقة $z_B = -z_A$.

(ا) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.29

(ب) أنشئ A و B على الشكل VI.30 .

3• لتكن C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و D صورة C بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

(ا) أنشئ النقطتين C و D على الشكل VI.30 .

(ب) أحسب z_C لاحقة النقطة C و اكتبه على الشكل الجبري مُفصِّلاً الإجابة.

(ج) عبِّر عن z_D لاحقة النقطة D بدلالة z_C و z_A .

برِّر أنّ $z_D = \sqrt{2} - 3\imath\sqrt{2}$.

4• ما هي طبيعة الرباعي ABCD ؟ علِّل.

الجزء الثاني

لتكن النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A = \sqrt{2} - \imath\sqrt{2}$ و $z_B = -z_A$ و المعرَّفتين في الجزء الأول و لتكن E النقطة ذات اللاحقة $z_E = -\sqrt{2} - \imath\sqrt{2}$.

ليكن m عدداً حقيقياً غير معدوم و G_m مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{(A, m), (B, -2), (E, 2)\}$.

1• أوجد علاقة تربط بين $\overrightarrow{AG}_m$ و $\overrightarrow{BE}$.

2• في هذا السؤال، نأخذ $m = -4$.

لتكن $\mathscr{E}$ مجموعة النقط M من المستوي $\mathscr{P}$ بحيث : $\left\|-4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}\right\| = 4\sqrt{2}$.

(ا) باستعمال السؤال (1•)، أكتب العلاقة التي تربط بين $\overrightarrow{AG}_{-4}$ و $\overrightarrow{BE}$. أنشئ النقطة G_{-4} على الشكل VI.30 .

(ب) أثبت أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة $\mathscr{E}$.

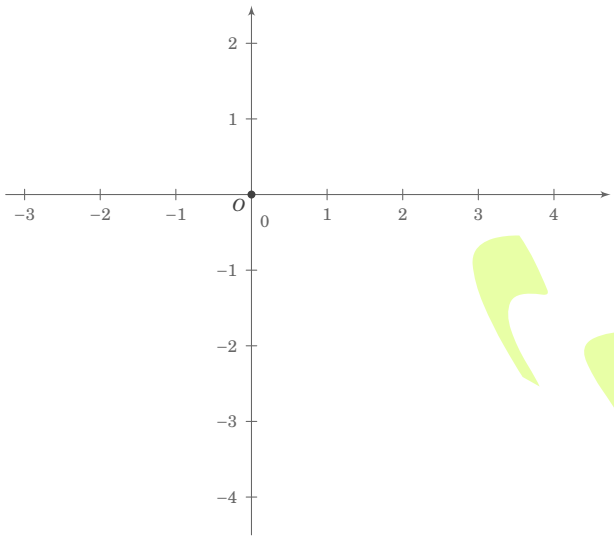
(ج) ما هي المجموعة $\mathscr{E}$ ؟

(د) أنشئ $\mathscr{E}$ على الشكل VI.30 .

3• في هذا السؤال، نأخذ $m = 2$.

لتكن $\mathscr{F}$ مجموعة النقط M من المستوي $\mathscr{P}$ بحيث $\left(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}\right) \cdot \overrightarrow{DA} = -16$ حيث D هي النقطة ذات اللاحقة $z_D = \sqrt{2} - 3\imath\sqrt{2}$ و المعرَّفة في السؤال (3•ج) .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VI.30

(ا) باستعمال السؤال (1•) ، أكتب العلاقة التي تربط بين $\overrightarrow{AG_2}$ و $\overrightarrow{BE}$. حدِّد النقطة G_2 .

(ب) نُبرهن أنّ النقطة M تنتمي إلى $\mathscr{F}$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{MG_2}\cdot\overrightarrow{DA}=a$ حيث a عدد حقيقي. أوجد قيمة a.

(ج) أثبت أنّ A تنتمي إلى $\mathscr{F}$.

(د) نستنتج أنّ النقطة M تنتمي إلى $\mathscr{F}$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DA}=b$ و $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DA}=c$
حيث b و c عددان حقيقيان. حدِّد قيمة b و c .
في هذه الحالة، ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{DA}$ ؟

(هـ) ما هي المجموعة $\mathscr{F}$ ؟ أنشئها على الشكل VI.30 .

الحلّ.

الجزء الأول

1• لدينا :

$$\left(\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\left(\imath\sqrt{2}\right)+\left(\imath\sqrt{2}\right)^2=2-4\imath-2=-4\imath$$

2• (ا) لدينا $z_A=\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}$ منه $|z_A|=\sqrt{2+2}=2$ و إذا كانت $\theta=\arg(z)\pmod{2\pi}$ فإنّ $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
و منه $\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ أي $\arg(z_A)=\theta=-\dfrac{\pi}{4}\pmod{2\pi}$. $z_A=2e^{-\imath\pi/4}$
منه $z_B=-z_A=-2e^{-\imath\pi/4}=2e^{\imath\pi}e^{-\imath\pi/4}=2e^{\imath\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}=2e^{3\imath\pi/4}$.

(ب) أنظر الشكل VI.31 .

3• (ا) أنظر الشكل VI.31 .

(ب) لدينا :

$$z_C=e^{\imath\pi/2}z_B=\imath z_B=-\imath z_A=\imath\left(-\sqrt{2}+\imath\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}-\imath\sqrt{2}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

(ج) لدينا : $z_D - z_A = e^{\imath\pi/2}(z_C - z_A)$ أي $z_D = e^{\imath\pi/2}(z_C - z_A) + z_A = \imath(z_C - z_A) + z_A$ منه :

$$z_D = \imath(z_C - z_A) + z_A = \imath\left(-\sqrt{2} - \imath\sqrt{2} - \sqrt{2} + \imath\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - \imath\sqrt{2} = \sqrt{2} - 3\imath\sqrt{2}$$

• 4 بالإستعانة بالشكل VI.31 ، نلاحظ أنّ الرباعي ABCD متوازي أضلاع. لنثبت ذلك :

لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A = -2z_A = -2\sqrt{2} + 2\imath\sqrt{2}$

و لاحقة الشعاع $\overrightarrow{DC}$ هي $z_C - z_D = -\sqrt{2} - \imath\sqrt{2} - \sqrt{2} + 3\imath\sqrt{2} = -2\sqrt{2} + 2\imath\sqrt{2}$

منه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و هذا يعني أنّ ABCD متوازي أضلاع.

الجزء الثاني

• 1 حسب تعريف مركز المسافات المتناسبة، النقطة G_m تُحقق : $m\overrightarrow{G_mA} - 2\overrightarrow{G_mB} + 2\overrightarrow{G_mE} = \vec{0}$

أي $m\overrightarrow{G_mA} + 2\left(\overrightarrow{BG_m} + \overrightarrow{G_mE}\right) = \vec{0}$ منه $m\overrightarrow{G_mA} + 2\overrightarrow{BG_m} + 2\overrightarrow{G_mE} = \vec{0}$

منه $m\overrightarrow{G_mA} + 2\overrightarrow{BE} = \vec{0}$ أي $\overrightarrow{G_mA} = -\frac{2}{m}\overrightarrow{BE}$ منه $\overrightarrow{AG_m} = \frac{2}{m}\overrightarrow{BE}$.

• 2 (ا) بأخذ $m = -4$ في المساواة السابقة ينتج $\overrightarrow{AG_{-4}} = \frac{2}{-4}\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$. أنظر الشكل VI.31 .

(ب) لدينا :

$$A \in \mathscr{E} \iff \left\|-4\overrightarrow{AA} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}\right\| = 4\sqrt{2}$$

لكن :

$$\left\|-4\overrightarrow{AA} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|-4\vec{0} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|2\overrightarrow{BE}\right\|$$
$$= 2|z_E - z_B| = 2\left|-\sqrt{2} - \imath\sqrt{2} = \sqrt{2} - \imath\sqrt{2}\right| = 2\left|-2\imath\sqrt{2}\right| = 4\sqrt{2}$$

إذن النقطة A تنتمي إلى المجموعة $\mathscr{E}$.

(ج) لدينا :

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{E} &\iff \left\|-4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\left(\overrightarrow{MG_{-4}} + \overrightarrow{G_{-4}A}\right) - 2\left(\overrightarrow{MG_{-4}} + \overrightarrow{G_{-4}B}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG_{-4}} + \overrightarrow{G_{-4}E}\right)\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\overrightarrow{MG_{-4}} - 4\overrightarrow{G_{-4}A} - 2\overrightarrow{G_{-4}B} + 2\overrightarrow{G_{-4}E}\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\overrightarrow{MG_{-4}} - 4\overrightarrow{G_{-4}A} + 2\overrightarrow{BG_{-4}} + 2\overrightarrow{G_{-4}E}\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\overrightarrow{MG_{-4}} - 4\overrightarrow{G_{-4}A} + 2\overrightarrow{BE}\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\overrightarrow{MG_{-4}} - 4\overrightarrow{G_{-4}A} + 2\left(-2\overrightarrow{AG_{-4}}\right)\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\overrightarrow{MG_{-4}} - 4\overrightarrow{G_{-4}A} - 4\overrightarrow{AG_{-4}}\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|-4\overrightarrow{MG_{-4}}\right\| = 4\sqrt{2} \iff 4\left\|\overrightarrow{MG_{-4}}\right\| = 4\sqrt{2} \\
&\iff \left\|\overrightarrow{MG_{-4}}\right\| = \sqrt{2} \iff MG_{-4} = \sqrt{2}
\end{aligned}$$

إذن $\mathscr{E}$ هي الدائرة التي مركزها G_{-4} و نصف قطرها $\sqrt{2}$.

(د) أنظر الشكل VI.31 .

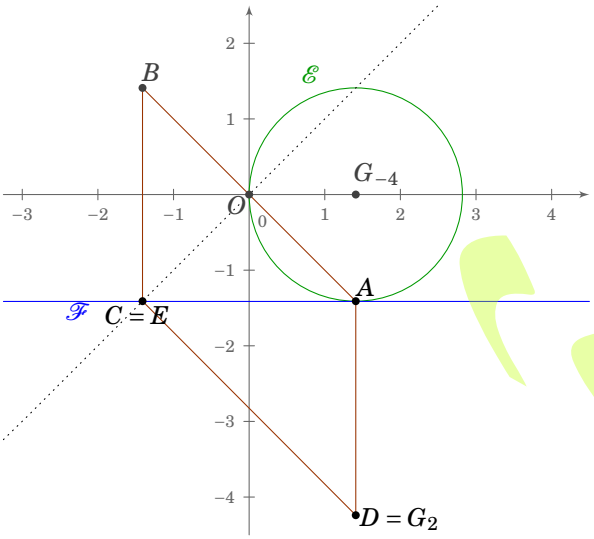
• 3 (ا) بأخذ $m = 2$ في نتيجة السؤال (1•) نجد : $\overrightarrow{AG_2} = \frac{2}{2}\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BE}$. لكن $z_E = z_C = -\sqrt{2} - \imath\sqrt{2}$ منه

$E = C$ و بالتالي فإنّ $\overrightarrow{AG_2} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ أي $G_2 = D$.

و بما أنّ $E = C$ فإنّ الرباعي $ABED = ABCD$ متوازي أضلاع.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.31

(ب) لدينا :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME} &= 2\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A}\right) - 2\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2B}\right) + 2\left(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2E}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MG_2} + 2\overrightarrow{G_2A} - 2\overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2E}\\ &= 2\overrightarrow{MG_2} + 2\overrightarrow{G_2A} + 2\overrightarrow{BG_2} + 2\overrightarrow{G_2E}\\ &= 2\overrightarrow{MG_2} + 2\overrightarrow{G_2A} + 2\overrightarrow{BE}\\ &= 2\overrightarrow{MG_2} + 2\left(-\overrightarrow{BE}\right) + 2\overrightarrow{BE}\\ &= 2\overrightarrow{MG_2}\end{aligned}$$

منه :

$$\left(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME}\right)\cdot\overrightarrow{DA} = -16 \iff 2\overrightarrow{MG_2}\cdot\overrightarrow{DA} = -16 \iff \overrightarrow{MG_2}\cdot\overrightarrow{DA} = -8$$

أي $\boxed{a = -8}$.

(ج) لدينا : $A \in \mathscr{F} \iff \overrightarrow{AG_2}\cdot\overrightarrow{DA} = -8$. لكن $G_2 = D$ منه :

$$\overrightarrow{AG_2}\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -DA^2 = -|z_D - z_A|^2 = -\left(-2\sqrt{2}\right)^2 = -8$$

إذن النقطة A تنتمي إلى المجموعة $\mathscr{F}$.

(د) من السؤال السابق نستنتج أنّ $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} = -8$ و حسب السؤال (3•ب) فإنّ :

$$M \in \mathscr{F} \iff \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DA} = -8 \qquad (\text{نُذكِّر أنّ } G_2 = D)$$

منه : $M \in \mathscr{F} \iff \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DA} = -8 + 8 = 0$ أي $\boxed{b = 0}$.

من جهة أخرى، لدينا :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MD}\right)\cdot\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$$

إذن $\boxed{c = 0}$ و نستنتج أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{DA}$ متعامدان.

(هـ) حسب ما سبق، المجموعة $\mathscr{F}$ هي المستقيم الذي يمر بالنقطة A و يُعامد المستقيم (AD) إذن فهو المستقيم (AE) أي $\boxed{\mathscr{F} = (AE)}$ (شكل VI.31) .

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

167

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نقول عن دالة $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ أنها **تضامنية** إذا كان لكل $z \in \mathbb{C}$ فإنّ $(f \circ f)(z) = z$ حيث $f \circ f$ هي تركيب الدالة f مع نفسها.

الجزء الأول

ليكن A و B عددين حقيقيين.

نعتبر الدالة $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرفة بـ : $F(z) = Az + B\bar{z}$.

- 1. أحسب $F(1)$ و $F(\imath)$.
- 2. نفرض أنه لكل عدد مركب z فإنّ $F(z) = 0$. أثبت أنّ : $A = B = 0$.
- 3. عيِّن A و B حتى يكون، لكل عدد مركب z : $F(z) = z$.

الجزء الثاني

ليكن a و b عددين حقيقيين.

نعتبر الدالة $f_{a,b} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرفة بـ : $f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$.

- 1. أوجد، لكل عدد مركب z ، عبارة $(f_{a,b} \circ f_{a,b})(z)$.
- 2. تكون الدالة $f_{a,b}$ تضامنيةً إذا و فقط إذا حقق العددان a و b جملة معادلتين. أوجد هذه الجملة.
- 3. أوجد جميع الدوال $f_{a,b}$ التضامنية.

الجزء الثالث

نعتبر الدالة $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ المعرفة بـ : $g(z) = e^{\imath\pi/4}\bar{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \imath)\bar{z}$.

- 1. هل الدالة g تضامنية ؟ علِّل إجابتك.

لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها $z = x + \imath y$.

نعتبر النقطة M' ذات اللاحقة $z' = x' + \imath y'$ بحيث : $z' = g(z)$.

(أ) عبِّر عن x' و y' بدلالة x و y .

(ب) (i) أوجد جملة المعادلتين التي يجب أن يحققهما x و y حتى يكون $M' = M$.

(ii) لتكن Δ مجموعة النقط M بحيث $M' = M$.

أثبت أنّ Δ هو المستقيم الذي معادلته $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$. أوجد شعاع توجيه $\vec{u}$ لهذا المستقيم.

(ج) أثبت أنه لكل نقطة M فإنّ الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يعامد الشعاع $\vec{u}$.

(د) (i) أوجد الإحداثيين x_I و y_I للنقطة I منتصف القطعة $[MM']$.

(ii) أثبت أنّ النقطة I تنتمي إلى المستقيم Δ .

(هـ) ما هو التحويل النقطي الذي تكون به M' صورةَ M ؟

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ.

الجزء الأول

1•

لدينا : $F(1) = A \times 1 + B \times \overline{1} = A + B$

و $F(\imath) = A \times \imath + B \times \overline{\imath} = A\imath - B\imath = (A - B)\imath$

2• ليكن $z = x + \imath y$ عدداً مركباً. لدينا :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = 0 &\iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ A(x + \imath y) + B\overline{(x + \imath y)} = 0 \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ A(x + \imath y) + B(x - \imath y) = 0 \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ (A + B)x + \imath y(A - B) = 0 \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ (A + B)x = 0 \quad \text{و} \quad y(A - B) = 0 \\
&\iff A + B = 0 \quad \text{و} \quad A - B = 0 \\
&\iff A = B = 0
\end{aligned}$$

3• ليكن $z = x + \imath y$ عدداً مركباً. لدينا :

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = z &\iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ A(x + \imath y) + B\overline{(x + \imath y)} = x + \imath y \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R},\ (A + B)x + \imath y(A - B) = x + \imath y \\
&\iff \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

ملاحظة 36 : ◁ قد يتساءل القارئ الكريم عن سبب هذا التفصيل (الممل؟) في الجواب إذ بالإمكان إتّباع الطريقة التالية :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ F(z) = z \iff \forall z \in \mathbb{C},\ Az + B\overline{z} = 1 \times z + 0 \times \overline{z} \iff A = 1 \text{ و } B = 0$$

لكن مكتسباتنا لا تسمح لنا باعتبار هذه الطريقة لأنها تعتمد على خاصية أساسية في ميدان الجبر الخطي (خارج عن البرنامج) و هي خاصية **الإستقلال الخطي** .

▷

الجزء الثاني

1• بما أنّ $a, b \in \mathbb{R}$ فإنّ $\overline{a} = a$ و $\overline{b} = b$ منه :

$$\begin{aligned}
\left(f_{a,b} \circ f_{a,b}\right)(z) &= a(az + b\overline{z}) + b\overline{(az + b\overline{z})} = a(az + b\overline{z}) + b\left(\overline{a} \cdot \overline{z} + \overline{b} \cdot \overline{\overline{z}}\right) \\
&= a^2 z + ab\overline{z} + b(a\overline{z} + bz) = \left(a^2 + b^2\right)z + 2ab\overline{z}
\end{aligned}$$

2• الدالة $f_{a,b}$ تضامنية إذا و فقط إذا :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \left(f_{a,b} \circ f_{a,b}\right)(z) = z \iff \forall z \in \mathbb{C},\ \left(a^2 + b^2\right)z + 2ab\overline{z} = z \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$$

حيث استعملنا نتيجة السؤال (3•) من الجزء الأول بأخذ $F = f_{a,b} \circ f_{a,b}$ ، $A = a^2 + b^2$ و $B = 2ab$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3 الدالة $f_{a,b}$ تضامنية إذا و فقط إذا :

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ 2ab=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a=0 \quad \text{أو} \quad b=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ a=0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ b=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b^2=1 \\ a=0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a^2=1 \\ b=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b=\pm 1 \\ a=0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} a=\pm 1 \\ b=0 \end{cases}$$

إذن الدوال $f_{a,b}$ التضامنية هي الدوال $f_{a,b}$ بحيث : $(a,b) \in \{(0,-1),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$.

أي : $f_{1,0}: z \mapsto z$ $\quad f_{-1,0}: z \mapsto -z$ $\quad f_{0,1}: z \mapsto \overline{z}$, $\quad f_{0,-1}: z \mapsto -\overline{z}$.

الجزء الثالث

• 1 لدينا :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (g \circ g)(z) = e^{\imath\pi/4}\overline{\left(e^{\imath\pi/4}\overline{z}\right)} = e^{\imath\pi/4}e^{-\imath\pi/4}\overline{\overline{z}} = e^{\imath(\pi/4-\pi/4)}z = e^{0}z = z$$

إذن الدالة g تضامنية.

• 2 لدينا :

$$z' = g(z) \iff x'+\imath y' = e^{\imath\pi/4}(x-\imath y)$$
$$\iff x'+\imath y' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x-\imath y)$$
$$\iff x'+\imath y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+\imath\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)$$
$$\iff \begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \end{cases}$$

• 3 (ا) لدينا :

$$M' = M \iff z' = z \iff \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) = x \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = y \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\sqrt{2}-2\right)x+\sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x-\left(\sqrt{2}-2\right)y = 0 \end{cases}$$

(ب) لدينا $M = M'$ إذا و فقط إذا :

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}-2\right)x+\sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x-\left(\sqrt{2}-2\right)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \left(\sqrt{2}-1\right)x \\ y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}x = \left(\sqrt{2}-1\right)x \end{cases} \iff y = \left(\sqrt{2}-1\right)x$$

إذن Δ هو المستقيم الذي معادلته : $y = \left(\sqrt{2}-1\right)x$.

معادلة Δ تُكتب أيضاً $\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=0$ إذن أحد أشعة توجيهه هو $\begin{pmatrix} -(-1) \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$ أي $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}$.

إذن الشعاع $\vec{u} = \left(1, \sqrt{2}-1\right)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم Δ .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 4 لدينا :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'}\cdot\vec{u} &= (x'-x)\cdot 1+(y'-y)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)-x\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)-y\right)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1-\sqrt{2}\right)x+y+\left(\sqrt{2}-1\right)x-y\right]=0\end{aligned}$$

إذن، لكل نقطة M من المستوي، الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ يُعامد $\vec{u}$.

• 5 (أ) إذا كانت I منتصف القطعة $[MM']$ فإنّ : $x_I=\frac{x_M+x_{M'}}{2}$ و $y_I=\frac{y_M+y_{M'}}{2}$ منه :

$$x_I=\frac{x_M+x_{M'}}{2}=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+y\right)$$

$$y_I=\frac{y_M+y_{M'}}{2}=\frac{1}{2}\left[y+\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\left(\sqrt{2}-1\right)y\right)$$

(ب) لدينا : $I\in\Delta \iff y_I=\left(\sqrt{2}-1\right)x_I$. لكن :

$$\left(\sqrt{2}-1\right)x_I=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x+y\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\left(\sqrt{2}-1\right)y\right)=y_I$$

إذن النقطة I تنتمي إلى المستقيم Δ .

• 6 حسب ما سبق، القطعة المستقيمة $[MM']$ تُعامد المستقيم Δ و منتصفها I ينتمي إلى Δ إذن النقطة M' هي صورة النقطة M بالتناظر المحوري (العمودي) حول المستقيم Δ .

■

168

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.
لتكن $A(a)$ و $B(b)$ نقطتين من المستوي بحيث $a\neq b$ و ليكن $k\in\mathbb{R}$ حيث $k>0$.
ليكن p و q عددين مركبين غير معدومين و $n\in\mathbb{N}^*$.

• 1 أوجد $\mathscr{E}$ مجموعة النقط M بحيث : $MA=kMB$.

• 2 إستنتج أنّ صور حلول المعادلة $p(z-a)^n+q(z-b)^n=0$ تنتمي إلى دائرة أو مستقيم يُطلب تعيينها.

الحلّ.

• 1 لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي. نميِّز حالتين :

• إذا كان $k=1$ فإنّ :

$$M\in\mathscr{E} \iff MA=MB$$

أي أنّ $\mathscr{E}$ هي منصِّف القطعة المستقيمة $[AB]$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $k \neq 1$ فإنّ :

$$M \in \mathscr{E} \iff MA = kMB \iff |z-a| = k|z-b| \iff |z-a|^2 = k^2|z-b|^2$$
$$\iff (z-a)\overline{(z-a)} = k^2(z-b)\overline{(z-b)}$$
$$\iff \left(1-k^2\right)|z|^2 - \left(\overline{a}-k^2\overline{b}\right)z - \left(a-k^2b\right)\overline{z} + |a|^2 - k^2|b|^2 = 0$$
$$\iff |z|^2 - \frac{\overline{a}-k^2\overline{b}}{1-k^2}z - \frac{a-k^2b}{1-k^2}z + \frac{|a|^2-k^2|b|^2}{1-k^2} = 0$$

بوضع $\alpha = \dfrac{a-k^2b}{1-k^2}$ و $r = -\dfrac{|a|^2-k^2|b|^2}{1-k^2}$ يكون :

$$M \in \mathscr{E} \iff |z|^2 - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z} - r = 0$$
$$\iff (z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha}) - \alpha\overline{\alpha} - r = 0$$
$$\iff |z-\alpha|^2 - |\alpha|^2 - r = 0 \iff |z-\alpha|^2 = |\alpha|^2 + r$$
$$\iff |z-\alpha|^2 = \frac{\left(a-k^2b\right)\left(\overline{a}-k^2\overline{b}\right)}{\left(1-k^2\right)^2} - \frac{|a|^2-k^2|b|^2}{1-k^2}$$
$$\iff |z-\alpha|^2 = \left(\frac{k|a-b|}{1-k^2}\right)^2$$

لتكن Ω صورة α . لدينا :

$$M \in \mathscr{E} \iff \Omega M^2 = \left(\frac{k|a-b|}{1-k^2}\right)^2 \iff \Omega M = \frac{k|a-b|}{\left|1-k^2\right|}$$
$$\iff \Omega M = \frac{k}{\left|1-k^2\right|}AB$$

إذن $\mathscr{E}$ هي الدائرة التي مركزها $\Omega\ (\alpha)$ و نصف قطرها $\dfrac{k}{\left|1-k^2\right|}AB$.

2• نُسمِّي $\mathscr{F}$ مجموعة صور حلول المعادلة $p(z-a)^n + q(z-b)^n$.

لتكن $M\ (z)$ نقطة من المستوي بحيث $z \neq a$ و $z \neq b$. لدينا :

$$M \in \mathscr{F} \implies p(z-a)^n + q(z-b)^n = 0 \implies p(z-a)^n = -q(z-b)^n$$
$$\implies \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^n = -\frac{q}{p} \implies \left|\frac{z-a}{z-b}\right|^n = \left|-\frac{q}{p}\right| \implies \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \sqrt[n]{\left|\frac{q}{p}\right|}$$

بوضع $k = \sqrt[n]{\left|\dfrac{q}{p}\right|}$ يكون :

$$M \in \mathscr{F} \implies \frac{MA}{MB} = k \implies MA = kMB$$

و حسب السؤال السابق :

- إذا كان $k = 1$ أي إذا كان $|q| = |p|$ فإنّ $\mathscr{F}$ مُحتواة في (جزء من) مُنصِّف القطعة المستقيمة $[AB]$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- إذا كان $k \neq 1$ أي إذا كان $|p| \neq |q|$ فإنّ $\mathscr{F}$ مُحتواة في (جزء من) الدائرة التي مركزها $\Omega(\alpha)$ و نصف قطرها $k = \sqrt[n]{\left|\frac{q}{p}\right|}$ و $\alpha = \frac{a - k^2 b}{1 - k^2}$ مع $\frac{k}{\left|1 - k^2\right|} AB$.

■

169

1. عيّن، بالحساب و هندسياً، الأعداد المركبة z التي تُحقق :

(ا) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$ (ب) $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. عمّم هذه النتيجة إلى $a, b, k \in \mathbb{R}$ مع $a \neq b$ ، $k > 0$ و $k \neq 1$:

(ا) $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$ (ب) $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k$

الحلّ. 1. (ا) **بالحساب** : نضع $z = x + iy$ منه :

$$|z-3|^2 = (x-3)^2 + y^2 \quad , \quad |z-5|^2 = (x-5)^2 + y^2$$

و الشرط $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1$ يُكافئ $|z-3|^2 = |z-5|^2$ أي $x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2$ منه $x = 4$.

فالأعداد المركبة التي نبحث عنها هي كل الأعداد المركبة التي جزؤها الحقيقي يساوي $x = 4$.

هندسياً : ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. لتكن A ، B ، M النقط التي لواحقها 3 ، 5 ، z على الترتيب. لدينا :

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1 \iff \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$$

و هذا يعني أنّ M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$. هذا المحور هو المستقيم الذي معادلته $x = 4$، إذن العدد المركب z يُحقق المطلوب إذا و فقط إذا كان $\text{Re}(z) = 4$.

(ب) **بالحساب** : نضع $z = x + iy$ منه :

$$|z-3|^2 = (x-3)^2 + y^2 \quad , \quad |z-5|^2 = (x-5)^2 + y^2$$

و الشرط $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ يُكافئ $|z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2$ أي $x^2 - 6x + 9 + y^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 25 + y^2)$ منه $(x-1)^2 + y^2 = 8$.

فالأعداد المركبة التي نبحث عنها هي الأعداد المركبة $z = x + iy$ التي تُحقق $(x-1)^2 + y^2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$ أي هي الدائرة التي مركزها $(1, 0)$ و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

هندسياً : ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. لدينا :

$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2} \iff |z-3|^2=\frac{1}{2}|z-5|^2 \iff (z-3)\overline{(z-3)}=\frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)}$$

$$\iff z\bar{z}-3z-3\bar{z}+9=\frac{1}{2}(z\bar{z}-5z-5\bar{z}+25) \iff z\bar{z}-(z+\bar{z})=7$$

$$\iff (z-1)(\bar{z}-1)-1=7 \iff |z-1|^2=8 \iff |z-1|=2\sqrt{2}$$

و بالتالي فالمجموعة التي نبحث عنها هي مجموعة النقط التي تبعد عن النقطة $(1,0)$ بمسافة $2\sqrt{2}$ أي هي الدائرة التي مركزها $(1,0)$ و نصف قطرها $2\sqrt{2}$.

2. (أ) **بالحساب** : نضع $z=x+iy$ منه :

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=1 \iff |z-a|^2=|z-b|^2$$

$$\iff (x-a)^2+y^2=(x-b)^2+y^2$$

$$\iff -2ax+a^2=-2bx+b^2$$

$$\iff 2ax-2bx+b^2-a^2=0$$

$$\iff 2(a-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=0$$

$$\iff x=\frac{a+b}{2} \qquad (\text{لأنّ } a\neq b)$$

و هي معادلة محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(a,0)$ و $B(b,0)$.

هندسياً : ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

لتكن A ، B ، M النقط التي لواحقها a ، b ، z على الترتيب. لدينا :

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=1 \iff \|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$$

و هذا يعني أنّ M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$. هذا المحور هو المستقيم الذي معادلته $x=\frac{a+b}{2}$، إذن العدد المركب z يُحقق المطلوب إذا و فقط إذا كان $\mathrm{Re}(z)=\frac{a+b}{2}$.

(ب) **بالحساب** : نضع $z=x+iy$ منه :

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=k \iff |z-a|^2=k^2|z-b|^2$$

$$\iff (x-a)^2+y^2=k^2(x-b)^2+y^2$$

$$\iff x^2-2ax+a^2=k^2\left(x^2-2bx+b^2\right)$$

$$\iff \left(k^2-1\right)x^2+2\left(a-k^2b\right)x+\left(k^2-1\right)y^2=a^2-k^2b^2$$

$$\iff x^2+2\frac{a-k^2b}{k^2-1}x+y^2=\frac{a^2-k^2b^2}{k^2-1} \qquad (\text{لأنّ } k^2\neq 1)$$

$$\iff \left(x+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2-k^2b^2}{k^2-1}+\left(\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)^2$$

$$\iff \left(x+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)^2+y^2=\frac{k^2}{\left(k^2-1\right)^2}(a-b)^2$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$\iff \left(x+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{k(a-b)}{k^2-1}\right)^2$$

و هي معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-\frac{a-k^2b}{k^2-1},0\right)$ و نصف قطرها $\left|\frac{k(a-b)}{k^2-1}\right|$ (قيمة مطلقة) .

هندسياً : ننسب المستوي إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لدينا : $\left|\frac{z-a}{z-b}\right|=k \iff |z-a|^2=k^2|z-b|^2$

$$\iff (z-a)\overline{(z-a)}=k^2(z-b)\overline{(z-b)}$$

$$\iff z\bar{z}-az-a\bar{z}+a^2=k^2\left(z\bar{z}-bz-b\bar{z}+b^2\right)$$

$$\iff \left(k^2-1\right)z\bar{z}+\left(a-k^2b\right)(z+\bar{z})+k^2b^2-a^2=0$$

$$\iff z\bar{z}+\frac{a-k^2b}{k^2-1}(z+\bar{z})+\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=0 \qquad (\text{لأنّ } k^2\neq 1)$$

$$\iff \left(z+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)\left(\bar{z}+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)-\left(\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)^2+\frac{k^2b^2-a^2}{k^2-1}=0$$

$$\iff \left(z+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)\overline{\left(z+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right)}-\frac{k^2}{\left(k^2-1\right)^2}(a-b)^2=0$$

$$\iff \left|z+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right|^2=\left(\frac{k(a-b)}{k^2-1}\right)^2$$

$$\iff \left|z+\frac{a-k^2b}{k^2-1}\right|=\left|\frac{k(a-b)}{k^2-1}\right|$$

و هي معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-\frac{a-k^2b}{k^2-1},0\right)$ و نصف قطرها $\left|\frac{k(a-b)}{k^2-1}\right|$ (قيمة مطلقة) .

■

170 أثبت أنّ مجموعة النقط $z=x+\imath y$ من المستوي المركب و التي تُحقق :
$|z-\imath a|=\lambda|z+\imath a|\ ,\quad \lambda>0\ ,\ a\in\mathbb{C}\ ,$
هي الدائرة التي مركزها النقطة $z=\imath a\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}$ و نصف قطرها $\left|\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right|$ إذا كان $\lambda\neq 1$.
أدرس الحالة $\lambda=1$.

الحلّ. بما أننا نبحث عن مجموعة نقط في المستوي xOy ، فبدايةً يجب التعبير عن المقدارَيْن $|z+\imath a|$ و $|z-\imath a|$ بدلالة الإحداثيّين x و y (لا تنسَ أنّ a عدد مركب) :

$$|z+\imath a|^2=|x+\imath y+\imath a|^2=(x+\imath y+\imath a)(x-\imath y-\imath\bar{a})$$
$$=x^2+y^2+|a|^2+\imath a(x-\imath y)-\imath\bar{a}(x+\imath y)$$
$$|z-\imath a|^2=|x+\imath y-\imath a|^2=(x+\imath y-\imath a)(x-\imath y+\imath\bar{a})$$
$$=x^2+y^2+|a|^2-\imath a(x-\imath y)+\imath\bar{a}(x+\imath y)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و بالتعويض في المعادلة $|x+\imath y-\imath a|=\lambda|x+\imath y+\imath a|$ ينتج :

$$\begin{aligned}|z-\imath a|=\lambda|z+\imath a| &\iff |x+\imath y-\imath a|=\lambda|x+\imath y+\imath a|\\ &\iff |x+\imath y-\imath a|^2=\lambda^2|x+\imath y+\imath a|^2\\ &\iff x^2+y^2+|a|^2-\imath a(x-\imath y)+\imath\overline{a}(x+\imath y)\\ &\qquad =\lambda^2\left(x^2+y^2+|a|^2+\imath a(x-\imath y)-\imath\overline{a}(x+\imath y)\right)\\ &\iff \left(1-\lambda^2\right)x^2-\imath\left(1+\lambda^2\right)(a-\overline{a})x+\\ &\qquad +\left(1-\lambda^2\right)y^2-\left(1+\lambda^2\right)(a+\overline{a})y+\left(1-\lambda^2\right)|a|^2=0\end{aligned}$$

- إذا كان $1-\lambda^2=0$ أي إذا كان $\lambda=1$ فإنّ المعادلة تصبح : $2\imath(a-\overline{a})x-2(a+\overline{a})y=0$ أي $4\operatorname{Im}(a)\cdot x-4\operatorname{Re}(a)\cdot y=0$ و هي معادلة مستقيم (و المستقيم عبارة عن دائرة نصف قطرها يساوي $+\infty$) .
- إذا كان $1-\lambda^2\neq 0$ أي إذا كان $\lambda\neq 1$ ، فبقسمة طرفيّ المعادلة الأخيرة على $1-\lambda^2$ ينتج :

$$\begin{aligned}|z-\imath a|=\lambda|z+\imath a| &\iff x^2-\imath\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(a-\overline{a})x+y^2-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(a+\overline{a})y+|a|^2=0\\ &\iff x^2+2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\frac{(a-\overline{a})}{2\imath}x+y^2-2\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\frac{(a+\overline{a})}{2}y+|a|^2=0\\ &\iff x^2+2\operatorname{Im}(a)\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}x+y^2-2\operatorname{Re}(a)\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}y+|a|^2=0\\ &\iff \left(x+\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\operatorname{Im}(a)\right)^2+\left(y-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\operatorname{Re}(a)\right)^2+|a|^2\\ &\qquad -\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2\left[(\operatorname{Im}(a))^2+(\operatorname{Re}(a))^2\right]=0\\ &\iff \left(x+\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\operatorname{Im}(a)\right)^2+\left(y-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\operatorname{Re}(a)\right)^2+|a|^2\\ &\qquad -\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2|a|^2=0\\ &\iff \left(x+\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\operatorname{Im}(a)\right)^2+\left(y-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\operatorname{Re}(a)\right)^2=\left[\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2-1\right]|a|^2\end{aligned}$$

و هي معادلة من الشكل

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\left[\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2-1\right]|a|^2=\frac{4\lambda^2}{\left(1-\lambda^2\right)^2}|a|^2$$

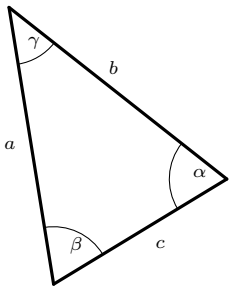
حيث

$$\alpha+\imath\beta=\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}(-\operatorname{Im}(a)+\imath\operatorname{Re}(a))=\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\imath a$$

أي هي معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $z=\alpha+\imath\beta$ و نصف قطرها $\left|\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right|$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VI.32

■

171

1• لتكن a ، b و c أطوال أضلاع مثلث مساحته s . أثبت أنّ :

$$16s^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

2• لتكن α ، β و γ لواحق رؤوس مثلث مساحته s . أثبت أنّ : $s = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\gamma + \overline{\gamma}\alpha\right)\right|$.

الحلّ.

1• لدينا : $s = \frac{1}{2}bc|\sin\alpha|$ و $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (شكل VI.32) منه :

$$\begin{aligned}16s^2 &= 16\times\frac{1}{4}b^2c^2\sin^2\alpha = (2bc)^2\left(1-\cos^2\alpha\right) = (2bc)^2 - (2bc\cos\alpha)^2\\ &= (2bc)^2 - \left(a^2-b^2-c^2\right)^2 = \left(2bc+a^2-b^2-c^2\right)\left(2bc-a^2+b^2+c^2\right)\\ &= \left(a^2-(b-c)^2\right)\left((b+c)^2-a^2\right)\\ &= (a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)\end{aligned}$$

و هو المطلوب.

2• ليكن $z = \rho e^{\imath\theta}$ و $z' = \rho' e^{\imath\theta'}$ عددين مركبين. المقدار :

$$\frac{1}{2}\rho\rho'\left|\sin\left(\theta'-\theta\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\rho\rho' e^{\imath(\theta'-\theta)}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\rho' e^{\imath\theta'}\rho e^{-\imath\theta}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(z'\overline{z}\right)\right|$$

يمثّل مساحة المثلثات التي لواحق رؤوسها هي الأعداد w ، $w+z$ و $w+z'$ حيث w عدد مركب.

في حالتنا : $w = \alpha$ ، $w+z = \beta$ و $w+z' = \gamma$ أي $z = \beta - w = \beta - \alpha$ و $z' = \gamma - w = \gamma - \alpha$ و بالتعويض في المساواة السابقة نجد (نُذكّر أنّ $\operatorname{Im}(\overline{Z}) = -\operatorname{Im}(Z)$ و أنّ $\operatorname{Im}(t) = 0$ إذا كان $t \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}s &= \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(z'\overline{z}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{(\beta-\alpha)}(\gamma-\alpha)\right)\right|\\ &= \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\left(\overline{\beta}-\overline{\alpha}\right)(\gamma-\alpha)\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{\beta}\gamma - \overline{\beta}\alpha - \overline{\alpha}\gamma + \overline{\alpha}\alpha\right)\right|\\ &= \left|\frac{1}{2}\left[\operatorname{Im}\left(\overline{\beta}\gamma\right) - \operatorname{Im}\left(\overline{\beta}\alpha\right) - \operatorname{Im}\left(\overline{\alpha}\gamma\right) + \operatorname{Im}\left(\overline{\alpha}\alpha\right)\right]\right|\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$= \left| \frac{1}{2} \left[\mathrm{Im}\left(\overline{\beta}\gamma\right) + \mathrm{Im}\left(\overline{\overline{\beta}\alpha}\right) + \mathrm{Im}\left(\overline{\overline{\alpha}\gamma}\right) + \mathrm{Im}\left(|\alpha|^2\right) \right] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \left[\mathrm{Im}\left(\overline{\beta}\gamma\right) + \mathrm{Im}\left(\beta\overline{\alpha}\right) + \mathrm{Im}\left(\alpha\overline{\gamma}\right) + 0 \right] \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \mathrm{Im}\left(\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\gamma + \overline{\gamma}\alpha\right) \right|$$

و هو المطلوب.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

7 تمارين للتعمق

172 مثِّل بيانياً في المستوي المركب مجموعات النقط التالية :

1. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$
2. $E = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$
3. $F = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 1\}$
4. $G = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z-2| < 2\}$
5. $H = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = |z+2i|\}$
6. $I = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < |z+2i|\}$

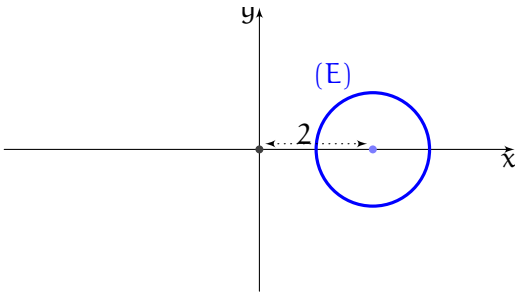
الحلّ. النقطة الأساسية هنا هي معرفة أنّ $|z-w|$ هي المسافة بين النقطتين z و w في المستوي المركب.

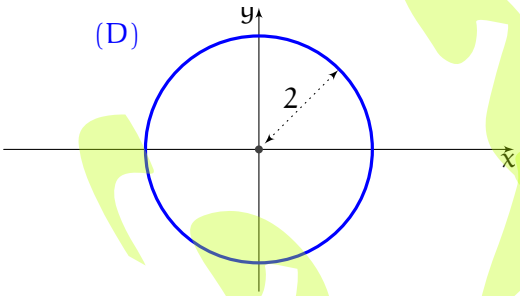
- (D) : $|z| = 2$ هي مجموعة النقط التي تبعد بمسافة 2 عن المبدأ O أي هي الدائرة التي مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها 2.
- (E) : $|z-2| = 1$ هي مجموعة النقط التي تبعد بمسافة 1 عن النقطة 2 أي هي الدائرة التي مركزها $(2,0)$ و نصف قطرها 1.
- (F) : $|z-2| \leq 1$ هي مجموعة النقط التي تبعد بمسافة 1 أو أقلّ عن النقطة 2 أي هي القرص الذي مركزه $(2,0)$ و نصف قطره 1.
- (G) : $1 \leq |z-2| < 2$ هي مجموعة النقط التي تبعد بمسافة أكبر من أو تساوي 1 و أصغر تماماً من 2، عن النقطة 2 أي هي الحلقة التي مركزها $(2,0)$ و نصف قطرها الأصغر 1 و نصف قطرها الأكبر 2 باستثناء الدائرة التي مركزها $(2,0)$ و نصف قطرها 2.
- (H) : $|z-2| = |z+2i|$ هي مجموعة النقط المتساوية المسافة من النقطتين 2 و $-2i$ أي هي منصّف القطعة $[AB]$ حيث $A(2,0)$ و $B(0,-2)$.
- (I) : $|z-2| < |z+2i|$ هي مجموعة النقط الأقرب من النقطة 2 منه من النقطة $-2i$ أي هي نصف المستوي الواقع على يمين (فوق) المستقيم المنصّف للقطعة $[AB]$ باستثناء هذا المنصّف.

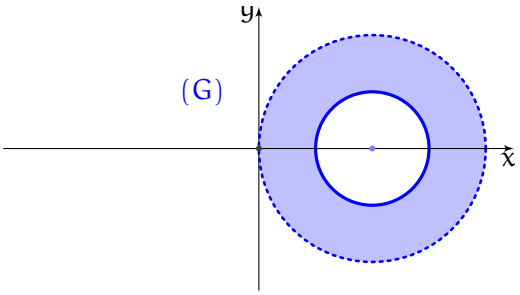
■

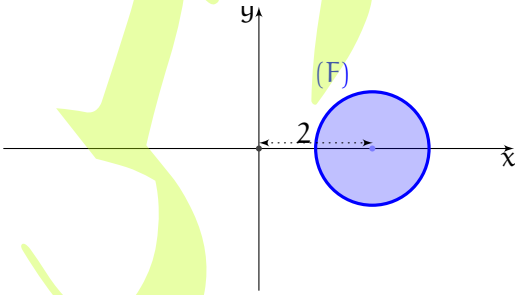
http ://tinyurl.com/Malki1718

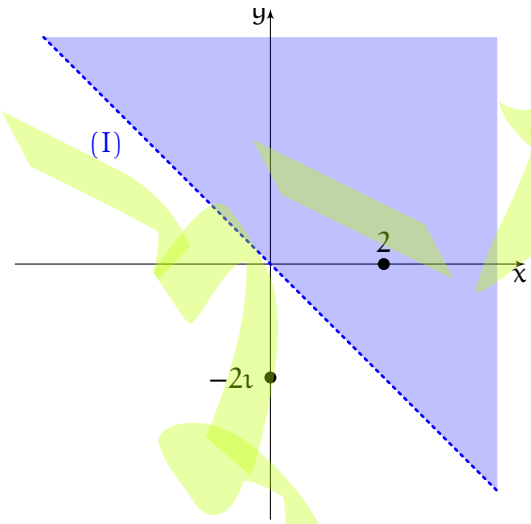
وقف لله تعالى

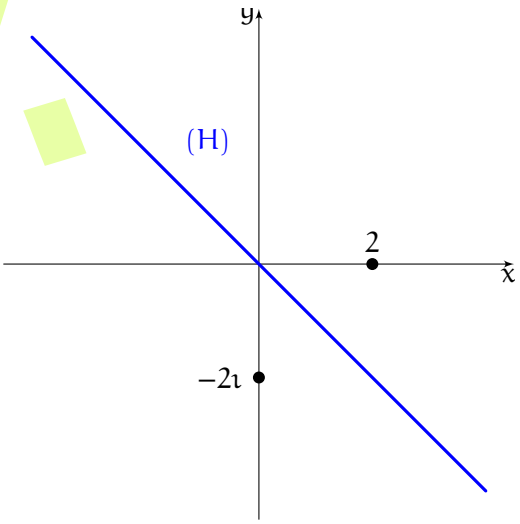












http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

173 ليكن n عدداً طبيعيا.

1• أثبت أنّ العدد $z_1 = (1+\imath)^n + (1-\imath)^n$ حقيقي ثمّ أوجد طويلته حسب قِيَم n .

2• أثبت أنّ العدد $z_2 = (1+\imath)^n - (1-\imath)^n$ تخيلي صِرف ثمّ أوجد طويلته حسب قِيَم n .

الحلّ. نضع $a = 1+\imath$ منه $\overline{a} = 1-\imath$ و بالتالي :

1• لدينا :

$$\overline{z_1} = \overline{a^n + \overline{a}^n} = \overline{a^n} + \overline{\overline{a^n}} = \overline{a^n} + a^n = a^n + \overline{a}^n = z_1$$

إذن z_1 حقيقي. و بما أنّ $\overline{z_1} = z_1$ فإنّ :

$$|z_1|^2 = \overline{z_1} \cdot z_1 = z_1^2 = \left(a^n + \overline{a}^n\right)^2 = a^{2n} + \overline{a}^{2n} + 2a^n\overline{a}^n$$
$$= 2\,\mathrm{Re}\left(a^{2n}\right) + 2\left(a\overline{a}\right)^n = 2\,\mathrm{Re}\left(\left(a^2\right)^n\right) + 2\left(|a|^2\right)^n$$

لكن $a^2 = 2\imath$ منه $|a|^2 = |a^2| = 2$ و بالتالي :

$$|z_1|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,(2\imath)^n + 2\times 2^n$$

و بما أنّ $\imath^n = (-1)^{\frac{n}{2}}$ إذا كان n زوجياً و $\imath^n = 0$ إذا كان n فردياً فإنّ :

$$|z_1|^2 = \begin{cases} 2\,(-2)^{\frac{n}{2}} + 2\times 2^n & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ 2\times 0 + 2\times 2^n & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases} = \begin{cases} 2^{\frac{n+2}{2}}\left((-1)^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{2}}\right) & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ 2^{n+1} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases}$$

منه :

$$|z_1| = \begin{cases} \sqrt{2^{\frac{n+2}{2}}\left((-1)^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{2}}\right)} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ \sqrt{2^{n+1}} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases} = \begin{cases} 2^{\frac{n+2}{4}}\sqrt{(-1)^{\frac{n}{2}} + 2^{\frac{n}{2}}} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases}$$

2• لدينا :

$$\overline{z_2} = \overline{a^n - \overline{a}^n} = \overline{a^n} - \overline{\overline{a^n}} = \overline{a^n} - a^n = -\left(a^n - \overline{a}^n\right) = -z_2$$

إذن z_2 تخيلي صِرف. و بما أنّ $\overline{z_2} = -z_2$ فإنّ :

$$|z_2|^2 = \overline{z_2} \cdot z_2 = -z_2^2 = -\left(a^n - \overline{a}^n\right)^2 = -a^{2n} - \overline{a}^{2n} + 2a^n\overline{a}^n$$
$$= -2\,\mathrm{Re}\left(a^{2n}\right) + 2\left(a\overline{a}\right)^n = -2\,\mathrm{Re}\left(\left(a^2\right)^n\right) + 2\left(|a|^2\right)^n$$

لكن $a^2 = 2\imath$ منه $|a|^2 = |a^2| = 2$ و بالتالي :

$$|z_2|^2 = 2\times 2^n - 2\,\mathrm{Re}\,(2\imath)^n$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بما أنّ $\iota^n = (-1)^{\frac{n}{2}}$ إذا كان n زوجياً و $\iota^n = 0$ إذا كان n فردياً فإنّ :

$$|z_2|^2 = \begin{cases} 2\times 2^n - 2(-2)^{\frac{n}{2}} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ 2\times 2^n - 2\times 0 & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases} = \begin{cases} 2^{\frac{n+2}{2}}\left(2^{\frac{n}{2}} - (-1)^{\frac{n}{2}}\right) & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ 2^{n+1} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases}$$

منه :

$$|z_2| = \begin{cases} \sqrt{2^{\frac{n+2}{2}}\left(2^{\frac{n}{2}} - (-1)^{\frac{n}{2}}\right)} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ \sqrt{2^{n+1}} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases} = \begin{cases} 2^{\frac{n+2}{4}}\sqrt{2^{\frac{n}{2}} - (-1)^{\frac{n}{2}}} & \text{إذا كان } n \text{ زوجياً ؛} \\ 2^{\frac{n+1}{2}} & \text{إذا كان } n \text{ فردياً ؛} \end{cases}$$

ملاحظة 37 : ◁ يمكن تبسيط النتائج السابقة و ذلك باعتبار قِيم بواقي القسمة الإقليدية لـ n على 4 :

- إذا كان $n = 4k$ فإنّ $(-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{2k} = 1$ منه :

$$|z_1| = 2^{\frac{4k+2}{4}}\sqrt{1 + 2^{\frac{4k}{2}}} = 2^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{1+2^{2k}} = 2^k\sqrt{2}\sqrt{1+2^{2k}} = 2^k\sqrt{2^{2k+1}+2}$$

و

$$|z_2| = 2^{\frac{4k+2}{4}}\sqrt{2^{\frac{4k}{2}} - 1} = 2^{k+\frac{1}{2}}\sqrt{2^{2k}-1} = 2^k\sqrt{2}\sqrt{2^{2k}-1} = 2^k\sqrt{2^{2k+1}-2}$$

- إذا كان $n = 4k+1$ فإنّ : $|z_1| = 2^{\frac{4k+1}{2}} = 2^{2k}\sqrt{2} = |z_2|$.
- إذا كان $n = 4k+2$ فإنّ $(-1)^{\frac{n}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$ منه :

$$|z_1| = 2^{\frac{4k+4}{4}}\sqrt{-1 + 2^{\frac{4k+2}{2}}} = 2^{k+1}\sqrt{-1+2^{2k+1}}$$

و

$$|z_2| = 2^{\frac{4k+4}{4}}\sqrt{2^{\frac{4k+2}{2}} - 1} = 2^{k+1}\sqrt{2^{2k+1}-1}$$

- إذا كان $n = 4k+3$ فإنّ : $|z_1| = 2^{\frac{4k+4}{2}} = 2^{2k+2} = |z_2|$.

▷

■

174 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} x + y = 1 + \iota \\ xy = 2 - \iota \end{cases}$.

الحلّ . x و y حلان للمعادلة $z^2 - (x+y)z + xy = 0$ أي $z^2 - (1+\iota) + 2 - \iota = 0$.

لدينا : $\Delta = (-1-\iota)^2 - 4\times 1\times(2-\iota) = -8 + 6\iota$.

ليكن $\delta = a + \iota b$ جذراً تربيعياً للعدد Δ مع $a, b \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\delta^2 = \Delta = -8 + 6\iota \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = |-8+6\iota| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10 \\ a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين الأولى و الثانية ينتج $2a^2 = 10 - 8 = 2$ منه $a = \pm 1$. نختار مثلاً $a = 1$ فيكون (من المعادلة الثالثة) $b = 3$ منه $z_1 = \frac{1+\iota-1-3\iota}{2} = -\iota$ و $z_2 = \frac{1+\iota+1+3\iota}{2} = 1+2\iota$ أي $(x,y) = (-\iota, 1+2\iota)$ أو $(x,y) = (1+2\iota, -\iota)$.

مجموعة الحلول هي إذن : $S = \{(-\iota, 1+2\iota), (1+2\iota, -\iota)\}$.

■

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

175 ليكن x و y عددين مركبين . حلّ في $\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2+y^2 = 10 \end{cases}$

الحلّ. لدينا : $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$. لحلّ الجملة نضع $S = x+y$ و $P = xy$ منه :

$$\begin{cases} xy = 3 \\ x^2+y^2 = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} P = 3 \\ S^2 - 2P = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} P = 3 \\ S^2 = 10+2\times 3 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} P = 3 \\ S = \pm 4 \end{cases}$$

لإيجاد x و y نحلّ المعادلة $t^2 - St + P = 0$ في الحالتين :

- إذا كان $S = -4$ و $P = 3$ فإنّ x و y هما حَلاَّ المعادلة $t^2+4t+3=0$. لدينا $\Delta' = 2^2 - 3 = 1$ إذن للمعادلة حلاّن هما $t_1 = -2-1 = -3$ و $t_2 = -2+1 = -1$. أي أنّ $(x,y) \in \{(-3,-1),(-1,-3)\}$.
- إذا كان $S = 4$ و $P = 3$ فإنّ x و y هما حَلاَّ المعادلة $t^2-4t+3=0$. لدينا $\Delta' = 2^2 - 3 = 1$ إذن للمعادلة حلاّن هما $t_3 = 2-1 = 1$ و $t_4 = 2+1 = 3$. أي $(x,y) \in \{(1,3),(3,1)\}$.

في الأخير، مجموعة حلول الجملة هي : $\mathscr{S} = \{(-3,-1),(-1,-3),(1,3),(3,1)\}$. ■

176

1. أثبت أنه إذا كان $x+y+z = a$ ، $xy+yz+zx = b$ و $xyz = c$ فإن x ، y ، z حلول للمعادلة :
$$Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$$
أوجد x ، y و z إذا كان $a = b = 0$ و $c = -8$.

2. حل في $\mathbb{R}^3$ الجملة : $\begin{cases} x+y+z = 4 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \\ x^3+y^3+z^3 = 1 \end{cases}$.

الحلّ. 1. نعتبر كثير الحدود $P(Z) = Z^3 - aZ^2 + bZ - c$. x ، y و z حلول للمعادلة $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$ إذا و فقط إذا كانت جذوراً لـ P أي إذا و فقط إذا كان $P(Z) = (Z-x)(Z-y)(Z-z)$. لكن :

$$(Z-x)(Z-y)(Z-z) = Z^3 - (x+y+z)Z^2 + (xy+yz+zx)Z - xyz$$

و بالتالي إذا كان $a = x+y+z$ ، $b = xy+yz+zx$ و $c = xyz$ فإنّ x ، y و z جذور لكثير الحدود $P(Z) = Z^3 - aZ^2 + bZ - c$ أي x ، y و z حلول للمعادلة $Z^3 - aZ^2 + bZ - c = 0$.

إذا كان $a = b = 0$ و $c = -8$ فإنّ x ، y و z هي حلول المعادلة $Z^3 = -8$ أي هي الأعداد -2 ، $-2j$ و $-2j^2$.

إذن : $\{x,y,z\} = \{-2,-2j,-2j^2\}$ (توجد $3! = 6$ حلول و هي تبديلات المجموعة $\{-2,-2j,-2j^2\}$) .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 بداية نبحث عن قِيم المقادير a ، b و c ، المُعرّفة في السؤال الأوّل، كما يلي :

لدينا : $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

أي $4=4^2-2(xy+yz+zx)$

منه : $xy+yz+zx=\frac{1}{2}(16-4)=6$

بالمثل : $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3-3(x+y)(x+z)(y+z)$

$=4^3-3(4-z)(4-y)(4-x)$

$=48(x+y+z)-12(xy+yz+zx)+3xyz-128$

$=48(4)-12(6)+3xyz-128$

$=-8+3xyz$

منه : $xyz=\frac{1}{3}\left(\left(x^3+y^3+z^3\right)+8\right)$

$=\frac{1}{3}(9)=3$

و بالتالي x ، y و z هي حلول المعادلة $Z^3-4Z^2+6Z-3=0$.

نلاحظ أنّ $Z=1$ حلّ لها إذن $Z^3-4Z^2+6Z-3=(Z-1)\left(Z^2-3Z+3\right)$.

للمعادلة $Z^2-3Z+3=0$ حلاّن هما $\frac{3\pm\imath\sqrt{3}}{2}$. و بالتالي :

$\{x,y,z\}=\left\{1,\frac{3-\imath\sqrt{3}}{2},\frac{3+\imath\sqrt{3}}{2}\right\}$ (توجد $3!=6$ حلول و هي تبديلات المجموعة $\left\{1,\frac{3-\imath\sqrt{3}}{2},\frac{3+\imath\sqrt{3}}{2}\right\}$).

■

177 حلّ في $\mathbb{R}^2$ الجملة : $\begin{cases}x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6=1\\3x^5y-10x^3y^3+3xy^5=0\end{cases}$.

الحلّ. بما أنّ العددين x و y حقيقيان، فإنّ الجملة السابقة تُكافئ :

$$\left(x^6-15x^4y^2+15x^2y^4-y^6\right)+2\imath\left(3x^5y-10x^3y^3+3xy^5\right)=1+0\imath=1$$

أي

$$x^6+6x^5(\imath y)+15x^4(\imath y)^2+20x^3(\imath y)^3+15x^2(\imath y)^4+6x(\imath y)^5+(\imath y)^6=1$$

و هذه الأخيرة تُكافئ $(x+\imath y)^6=1$.

لكننا نعلم أنّ الجذور السادسة للوحدة هي الأعداد $\omega_k=\cos\frac{k\pi}{3}+\imath\sin\frac{k\pi}{3}$ (مع $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$) و بالتالي فإنّ حلول الجملة المعطاة هي :

$$\left\{\left(x_k=\cos\frac{k\pi}{3}\ ,\ y_k=\sin\frac{k\pi}{3}\right)\ ,\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}\right\}$$

■

178 حلّ في $\mathbb{C}^2$ الجملة $\begin{cases}(1+t)^n=(1-t)^n\\z^2+t^2=1\end{cases}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ عدد طبيعي غير معدوم مُعطى.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. بدايةً، نحلّ المعادلة $(1+t)^n = (1-t)^n$. يكون العدد المركب $t \in \mathbb{C}$ حلاً لهذه المعادلة إذا و فقط إذا وُجد عدد مركب u بحيث $u^n = 1$ و $1 + t = u(1-t)$ أي إذا و فقط إذا وُجد عدد طبيعي $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ بحيث $t = \dfrac{u-1}{u+1}$ أي بحيث $u = e^{2\imath k\pi/n}$. في الأخير : $t = \dfrac{e^{2\imath k\pi/n} - 1}{1 + e^{2\imath k\pi/n}}$ أي بحيث $1 + t = e^{2\imath k\pi/n}(1-t)$. $t = \imath \tan\dfrac{k\pi}{n}$.

- إذا كان n فردياً، فإنه لكل $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ يكون $\cos\dfrac{k\pi}{n} \neq 0$ و بالتالي للمعادلة n حلاً هي الأعداد $\imath \tan\dfrac{k\pi}{n}$ مع $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.
- إذا كان n زوجياً، أي $n = 2p$ فإنه لأجل $k = p$ يكون :

$$\cos\frac{p\pi}{n} = \cos\frac{p\pi}{2p} = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{و} \quad \sin\frac{p\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{2} \neq 0$$

و بالتالي فالمعادلة لا حلّ لها؛ لكن لكل $k \in \{0, 1, \cdots, p-1, p+1, \cdots, n-1\}$ يكون للمعادلة الحل الذي عبارته هي $\imath \tan\dfrac{k\pi}{n}$ و في هذه الحالة، المعادلة تقبل $n-1$ حلاً.

لكل حلّ t للمعادلة السابقة من الشكل $\imath \tan\dfrac{k\pi}{n}$ ، يكون العدد المركب z حلاً للمعادلة الثانية إذا و فقط إذا كان :

$$z^2 = 1 - t^2 = 1 + \tan^2\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{\cos^2\frac{k\pi}{n}}$$

أي إذا و فقط إذا كان $z = \pm\dfrac{1}{\cos\frac{k\pi}{n}}$.

في الأخير، للجملة $2 \times (n-1) = 2n-2$ حلاً إذا كان n زوجياً و $2n$ حلاً إذا كان n فردياً.

■

179 هل النقط A ، B ، C ، D التي لواحقها $-3-2\imath$ ، $-2+2\imath$ ، $1-3\imath$ ، $2+\imath$ على الترتيب تنتمي إلى نفس الدائرة ؟

الحلّ. تنتمي النقط A ، B ، C و D إلى نفس الدائرة إذا و فقط إذا وُجِدت نقطة Ω من المستوي بحيث : $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ ؛ و في هذه الحالة Ω هي مركز هذه الدائرة و ΩA (أو ΩB أو ΩC أو ΩD) نصف قطرها.
لتكن Ω نقطة من المستوي لاحقتها $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{cases} \Omega B = \Omega A \\ \Omega C = \Omega A \\ \Omega D = \Omega A \end{cases} \iff \begin{cases} \Omega B^2 = \Omega A^2 \\ \Omega C^2 = \Omega A^2 \\ \Omega D^2 = \Omega A^2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 + (y+2)^2 \\ (x-1)^2 + (y+3)^2 = (x+3)^2 + (y+2)^2 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = (x+3)^2 + (y+2)^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = x^2 + y^2 + 6x + 4y + 13 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 8y + 5 = 0 \\ 8x - 2y + 3 = 0 \\ 10x + 6y + 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 8y + 5 = 0 \\ 8x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

(المعادلة الثالثة هي مجموع المعادلتين الأُولَيَيْن)

$$\iff \begin{cases} 2x = -8y - 5 \\ 4(-8y - 5) - 2y + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -8y - 5 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

هذا يعني أنه توجد نقطة Ω (وحيدة)، و هي النقطة ذات اللاحقة $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\imath$، بحيث يكون $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$
و بالتالي فالنقط A ، B ، C و D تنتمي كلّها إلى الدائرة التي مركزها Ω و نصف قطرها ΩA مع :

$$\Omega A = \sqrt{\left(-3+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

نتحقق بسهولة من أنّ $\Omega B = \Omega C = \Omega D = \frac{\sqrt{34}}{2}$. ■

180 ما هي قِيَم $a \in \mathbb{R}$ التي من أجلها يكون $x = 1$ حلاً للمعادلة $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ ؟
في هذه الحالة، ما هي الحلول الأخرى ؟

الحلّ. $x = 1$ حل للمعادلة $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ إذا و فقط إذا كان $1^3 + 2 \times 1^2 + 2a \times 1 - a^2 = 0$ أي $a^2 - 2a - 3 = 0$.
لدينا : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$ منه $a_1 = \frac{2-4}{2} = -1$ و $a_2 = \frac{2+4}{2} = 3$.

- إذا كان $a = -1$ فإنّ $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ و بما أنّ $x = 1$ حل لهذه المعادلة فإنّ
$x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ يقبل القسمة على $x - 1$ و بالقسمة الإقليدية (أوأي طريقة أخرى) نجد
$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1)$.

الحلول الأخرى هي حلول المعادلة $x^2 + 3x + 1 = 0$. لدينا : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5$ منه $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$
و $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

- إذا كان $a = 3$ فإنّ $x^3 + 2x^2 + 6x - 9 = 0$ و بما أنّ $x = 1$ حل لهذه المعادلة فإنّ
$x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ يقبل القسمة على $x - 1$ و بالقسمة الإقليدية (أوأي طريقة أخرى) نجد
$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 9)$.

الحلول الأخرى هي حلول المعادلة $x^2 + 3x + 9$. لدينا : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 9 = -27 = \left(3\imath\sqrt{3}\right)^2$ منه
$x_1 = \frac{-3-3\imath\sqrt{3}}{2}$ و $x_2 = \frac{-3+3\imath\sqrt{3}}{2}$.

■

181 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :
(1) $z(z-3)(z+2)(z+5) = 54$

الحلّ. لدينا :

$$(1) \iff (z(z+2))((z-3)(z+5)) = 54 \iff (z^2+2z)(z^2+2z-15) = 54$$

نضع $Z = z^2 + 2z$ فيكون :

$$(1) \iff Z(Z-15) = 54 \iff Z^2 - 15Z - 54 = 0 \iff Z \in \{-3, 18\}$$

إذن $Z = -3$ أو $Z = 18$ مع $Z = z^2 + 2z$ منه :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $Z = -3$ أي $z^2 + 2z + 3 = 0$ فإنّ $\Delta' = (-1)^2 - 3 = -2 = \left(\imath\sqrt{2}\right)^2$ منه $z = -1 - \imath\sqrt{2}$ أو $z = -1 + \imath\sqrt{2}$ ؛
- و إذا كان $Z = 18$ أي $z^2 + 2z - 18 = 0$ فإنّ $\Delta' = (-1)^2 + 18 = 19$ منه $z = -1 - \sqrt{19}$ أو $z = -1 + \sqrt{19}$.

في الأخير، مجموعة حلول المعادلة (1) هي : $\mathscr{S} = \left\{-1 - \imath\sqrt{2}, -1 + \imath\sqrt{2}, -1 - \sqrt{19}, -1 + \sqrt{19}\right\}$. ■

182

حلّ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4 = 0$$

1. بالتعويض عن z^3 بالقيمة 2 ، و من ثَمّ
2. بالتحليل و باستخدام مفكوك (نشر) المقدار $(z + a)^4$ حيث $a \in \mathbb{C}$.

الحلّ. نضع $f(z) = z^7 - 4z^6 + 6z^5 - 6z^4 + 6z^3 - 12z^2 + 8z + 4$.

1. إذا كان $z^3 = 2$ فإنّ :

$z^4 = z^3 \cdot z = 2z$ ، $z^5 = z^3 \cdot z^2 = 2z^2$ ، $z^6 = \left(z^3\right)^2 = 2^2 = 4$ و $z^7 = \left(z^3\right)^2 \cdot z = 2^2 z = 4z$

و بالتعويض في المعادلة نجد :

$$4z - 16 + 12z^2 - 12z + 12 - 12z^2 + 8z + 4 = 0$$

و هي مُحققة تطابُقاً و بالتالي فإنّ $f(z)$ يقبل القسمة على $z^3 - 2$.

2. بالقسمة الإقليدية أو بطريقة مساواة المعامِلات مثلاً، يمكن أن نكتب :

$$f(z) = \left(z^3 - 2\right)\left(az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e\right)$$

و بعد النشر و الترتيب ينتج :

$$f(z) = az^7 + bz^6 + cz^5 + (d - 2a)z^4 + (e - 2b)z^3 - 2cz^2 - 2dz - 2e$$

منه $a = 1$ ، $b = -4$ ، $c = 6$ ، $e - 2b = 6$ ، $d - 2a = -6$ ، $-2c = -12$ ، $-2d = 8$ و $-2e = 4$ أي $a = 1$ ، $b = -4$ ، $c = 6$ ، $d = -4$ و $e = -2$ و بالتالي :

$$f(z) = \left(z^3 - 2\right)\left(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 2\right)$$

باتباع الإقتراح، ننشر المقدار $(z + a)^4$ و نجد :

$$(z + a)^4 = a^4 + 4az^3 + 6a^2z^2 + 4a^3z + a^4$$

و بالمقارنه مع العبارة الأخيرة لكثير الحدود $f(z)$ ، نستنتج أنّه لأجل $a = -1$ يكون :

$$(z - 1)^4 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 2 + 3$$

منه

$$f(z) = \left(z^3 - 2\right)\left(z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 2\right) = \left(z^3 - 2\right)\left[(z - 1)^4 - 3\right]$$

و منه :

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff \left(z^3 - 2\right)\left[(z - 1)^4 - 3\right] = 0 \\ &\iff z^3 - 2 = 0 \quad \text{أو} \quad (z - 1)^4 - 3 = 0 \\ &\iff z^3 = 2 \quad \text{أو} \quad (z - 1)^4 = 3 \\ &\iff z = \sqrt[3]{2}e^{2k\pi\imath/3},\ k = 0, 1, 2 \quad \text{أو} \quad z - 1 = \sqrt[4]{3}e^{2k\pi\imath/4},\ k = 0, 1, 2, 3 \\ &\iff z = \sqrt[3]{2}e^{2k\pi\imath/3},\ k = 0, 1, 2 \quad \text{أو} \quad z = 1 + \sqrt[4]{3}e^{2k\pi\imath/4},\ k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

أي أنّ الحلول السبعة للمعادلة $f(z)=0$ هي :

$$\sqrt[3]{2}\ ,\ \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1\pm\imath\sqrt{3}}{2}\right)\ ,\ 1\pm\sqrt[4]{3}\ ,\ 1\pm\imath\sqrt[4]{3}$$

نلاحظ أنّ الحلول المركبة (غير الحقيقية) تُشكّل أزواجاً مترافقة و هذا مُتوقّع لأنّ معاملات المعادلة حقيقية.

■

183 n عدد طبيعي غير معدوم. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^n+1=0$.

الحلّ.

- إذا كان $n=1$ فإنّ المعادلة تصبح $z+1=0$ أي $z=-1$.
- نفرض أنّ $n\geq 2$ منه المعادلة تصبح $z^n=-1=e^{\imath\pi}$.

نلاحظ أنّ $z_0=e^{\imath\pi/n}$ حلّ لهذه المعادلة و بالتالي فإنّ الحلول الأخرى تُستنتج بضرب هذا الحل الخاص بالجذور النونية للوحدة أي مجموعة الحلول هي :

$$S=\{z_0\omega_k\ ,\quad k=0,1,\cdots,n-1\}=\{e^{\imath\pi/n}e^{2k\imath\pi/n}\ ,\quad k=0,1,\cdots,n-1\}$$

أخيراً : $S=\left\{e^{\imath\frac{(2k+1)\pi}{n}}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots,n-1\right\}$.

■

184 ليكن $n\geq 2$ عدداً طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 . نعتبر المعادلة :

$$(z-1)^n-(z+1)^n=0 \qquad (2)$$

1. أثبت أنّ حلول المعادلة (2) تخيلية صرفة.
2. أثبت أنّه إذا كان z حلاًّ للمعادلة (2) فإنّ $-z$ حلّ لها أيضاً.
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (2) .

الحلّ.

1. ليكن $z\in\mathbb{C}$. لتكن M ، A و B النقط التي لواحقها z ، 1 و -1 على الترتيب. لدينا :

$$\begin{aligned} z \text{ حلّ للمعادلة } (2) &\Longrightarrow (z-1)^n=(z+1)^n \Longrightarrow |(z-1)^n|=|(z+1)^n| \\ &\Longrightarrow |z-1|^n=|z+1|^n \Longrightarrow |z-1|=|z+1| \\ &\Longrightarrow AM=BM \Longrightarrow M \text{ تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة } [AB] \\ &\Longrightarrow M\in(Oy) \Longrightarrow z\in\imath\mathbb{R} \end{aligned}$$

إذن حلول المعادلة (2) تخيلية صرفة.

2. ليكن $z\in\mathbb{C}$. لدينا :

$$(-z-1)^n-(-z+1)^n=(-1)^n\left((z+1)^n-(z-1)^n\right)=-(-1)^n\left((z-1)^n-(z+1)^n\right)$$

منه :

$$\begin{aligned} z \text{ حلّ للمعادلة } (2) &\Longleftrightarrow (z-1)^n-(z+1)^n=0 \\ &\Longleftrightarrow -(-1)^n\left((z-1)^n-(z+1)^n\right)=0 \\ &\Longleftrightarrow (-z-1)^n-(-z+1)^n=0 \\ &\Longleftrightarrow -z \text{ حلّ للمعادلة } (2) \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 3. ليكن $z \in \mathbb{C}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
z \text{ حلّ للمعادلة } (2) &\iff (z-1)^n = (z+1)^n \\
&\iff z+1 = (z-1)\,e^{2\imath k\pi/n} && \text{مع } k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\
&\iff z+1 = (z-1)\,e^{2\imath k\pi/n} && \text{مع } k \in \{1,2,\cdots,n-1\} \quad (k=0 \text{ المعادلة مستحيلة لأجل}) \\
&\iff z = \frac{e^{2\imath k\pi/n}-1}{e^{2\imath k\pi/n}+1} && \text{مع } k \in \{1,2,\cdots,n-1\} \\
&\iff z = \frac{e^{\imath k\pi/n}-e^{-\imath k\pi/n}}{e^{\imath k\pi/n}+e^{-\imath k\pi/n}} && \text{مع } k \in \{1,2,\cdots,n-1\} \\
&\iff z = \frac{2\imath \sin\frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}} && \text{مع } k \in \{1,2,\cdots,n-1\} \\
&\iff z = \imath \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n} && \text{مع } k \in \{1,2,\cdots,n-1\}
\end{aligned}$$

إذن مجموعة الحلول هي : $\mathscr{S} = \left\{ \imath \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n} \ , \quad k = 1,2,\cdots,n-1 \right\}$.

ملاحظة 38 : ◁ إذا كان n زوجياً فإنّ $z = 0$ حلّ للمعادلة (2) و نحصل عليه لأجل $k = \frac{n}{2}$ (إذا كان n زوجياً فإنّ $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$) .

▷

ملاحظة 39 : ◁ بما أنّ دالة ظلّ التمام cotan متباينة على المجال $]0,\pi[$ (مثلاً لأنها مستمرة و متناقصة تماماً على هذا المجال) فإنّ هذه الحلول مختلفة مثنى مثنى بمعنى أنّ المعادلة (2) تقبل $n-1$ حلاً فقط . هل هذا تناقض ؟ **الجواب** : لا، لأنّ درجة كثير الحدود $P(X) = (X-1)^n - (X+1)^n$ هي $n-1$ و ليس n (الحد X^n يختفي بعد النشر) . ▷

■

185 n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+\imath)^n = (z-\imath)^n$.

لاحظ أنّ هذه المعادلة تقبل $n-1$ حلاً، كلها حقيقية.

الحلّ. بدايةً، نلاحظ أنّ $z = \imath$ ليس حلاّ لهذه المعادلة منه

$$(z+\imath)^n = (z-\imath)^n \iff \left(\frac{z+\imath}{z-\imath}\right)^n = 1$$

نضع $Z = \frac{z+\imath}{z-\imath}$ أي $z = \imath\frac{Z+1}{Z-1}$ فيكون :

$$(z+\imath)^n = (z-\imath)^n \iff Z^n = 1 \iff Z = \omega_k \ , \quad k = 0,\cdots,n-1$$

حيث $\omega_k = e^{2\imath k\pi/n}$ هي الجذور النونية للوحدة.

- من أجل $k = 0$ ، $\omega_k = 1$ و المعادلة $\frac{z+\imath}{z-\imath} = 1$ لا حلّ لها.
- من أجل $k \in \{1,2,\cdots,n-1\}$ ، $\omega_k \neq 1$ و المعادلة $\frac{z+\imath}{z-\imath} = \omega_k$ تقبل الحلّ : $z_k = \imath\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1}$.

أي (أنظر التمرين 59 صفحة 126) :

$$z_k = \imath\frac{\omega_k+1}{\omega_k-1} = \imath\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\imath\sin\frac{k\pi}{n}} = \operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R}, \ k = 1,2,\cdots,n-1$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بالعكس، باتباع نفس الحساب نتحقق بسهولة أنّ هذه الأعداد حلول للمعادلة المعطاة.
إذن، مجموعة الحلول هي : $S = \left\{\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}\ ,\quad k = 1, 2, \cdots, n-1\right\}$.
و بما أنّ دالة ظلّ التمام cotan متباينة على المجال $]0, \pi[$ (مثلاً لأنها مستمرة و متناقصة تماماً على هذا المجال) فإنّ هذه الحلول مختلفة مثنى مثنى بمعنى أنّ عدد الحلول هو $n-1$ و هي كلها حقيقية.
ملاحظة 40 : ◁ نسمي (E) هذه المعادلة. لدينا :

$$\begin{aligned} z \text{ حلّ للمعادلة (E)} &\iff (z+\imath)^n = (z-\imath)^n \\ &\iff (-\imath)^n (\imath z - 1)^n = (-\imath)^n (\imath z + 1)^n \\ &\iff (\imath z - 1)^n = (\imath z + 1)^n \\ &\iff \imath z \text{ حلّ للمعادلة } (2) \text{ (تمرين 184 صفحة 268)} \end{aligned}$$

و بالتالي يمكن إستنتاج حلول المعادلة (E) من التمرين 184 . ▷

■

186 ليكن $n \in \mathbb{N}$ عدداً طبيعياً. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$.

الحلّ. للمعادلة معنى إذا و فقط إذا كان : $\cos^k x \neq 0$, $\forall k \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ أي إذا و فقط إذا كان :
$x \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.
فيما يلي نفرض إذن أنّ $x \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. لدينا :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0 &\iff \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{Re}\left(e^{\imath kx}\right)}{\cos^k x} = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{\imath kx}}{\cos^k x}\right) = 0 \\ &\iff \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{e^{\imath x}}{\cos x}\right)^k\right) = 0 \end{aligned}$$

- إذا كان $\frac{e^{\imath x}}{\cos x} = 1$ أي إذا كان $\sin x = 0$ أي $x = 0 \pmod{\pi}$ فإنّ :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

و المعادلة السابقة لا حلّ لها.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• إذا كان $\frac{e^{\imath x}}{\cos x} \neq 1$ أي إذا كان $\sin x \neq 0$ أي $x \neq 0 \pmod{\pi}$ فإنّ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0 &\iff \operatorname{Re}\left(\frac{1-\left(\frac{e^{\imath x}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{\imath x}}{\cos x}}\right) = 0 \\
&\iff \frac{1}{\cos^n x}\operatorname{Re}\left(\frac{\cos^{n+1} x - e^{\imath(n+1)x}}{-\imath \sin x}\right) = 0 \\
&\iff \frac{1}{\cos^n x}\left(\frac{\cos^{n+1} x - \cos((n+1)x) + \imath \sin((n+1)x)}{-\imath \sin x}\right) = 0 \\
&\iff \frac{1}{\cos^n x}\left(\frac{\imath\left(\cos^{n+1} x - \cos((n+1)x)\right) - \sin((n+1)x)}{\sin x}\right) = 0 \\
&\iff \sin((n+1)x) = 0 \\
&\iff (n+1)x = 0 \pmod{\pi} \\
&\iff x = 0 \left(\mod \frac{\pi}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

أي أنّ $x = \frac{k\pi}{n+1}$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $x \neq 0 \pmod{\pi}$ و $x \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

إذن مجموعة الحلول هي : $S = \left\{\frac{k\pi}{n+1},\quad k \in \mathbb{Z} \text{ و } (n+1) \nmid k \text{ و } n+1 \neq \pm 2k\right\}$. ■

187 ليكن $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}^*$. حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta + k\alpha) z^k = 0$ 2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\theta + k\alpha) z^k = 0$

الحلّ. نضع $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta + k\alpha) z^k$ و $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(\theta + k\alpha) z^k$

1) نُذكِّر أنه لكل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}$ منه :

$$\begin{aligned}
C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta + k\alpha) z^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{e^{\imath(\theta+k\alpha)} + e^{-\imath(\theta+k\alpha)}}{2} z^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\imath(\theta+k\alpha)} z^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-\imath(\theta+k\alpha)} z^k \\
&= \frac{1}{2} e^{\imath\theta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{k\imath\alpha} z^k + \frac{1}{2} e^{-\imath\theta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{-k\imath\alpha} z^k \\
&= \frac{1}{2} e^{\imath\theta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{\imath\alpha}\right)^k z^k + \frac{1}{2} e^{-\imath\theta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{-\imath\alpha}\right)^k z^k \\
&= \frac{1}{2} e^{\imath\theta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(z e^{\imath\alpha}\right)^k + \frac{1}{2} e^{-\imath\theta}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(z e^{-\imath\alpha}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} e^{\imath\theta}\left(1 + z e^{\imath\alpha}\right)^n + \frac{1}{2} e^{\imath\theta}\left(1 + z e^{-\imath\alpha}\right)^n
\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و بالتالي فإنّ :

$$\begin{aligned} C_n = 0 &\iff \frac{1}{2}e^{\imath\theta}\left(1+ze^{\imath\alpha}\right)^n + \frac{1}{2}e^{-\imath\theta}\left(1+ze^{-\imath\alpha}\right)^n = 0 \\ &\iff e^{\imath\theta}\left(1+ze^{\imath\alpha}\right)^n + e^{-\imath\theta}\left(1+ze^{-\imath\alpha}\right)^n = 0 \\ &\iff e^{\imath\theta}\left(1+ze^{\imath\alpha}\right)^n + e^{-\imath\theta}\left(1+ze^{-\imath\alpha}\right)^n = 0 \\ &\iff e^{\imath\theta}\left(1+ze^{\imath\alpha}\right)^n = -e^{-\imath\theta}\left(1+ze^{-\imath\alpha}\right)^n \end{aligned}$$

و هنا نُميِّز ثلاث حالات :

- إذا كان $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ $e^{\imath\alpha} = e^{-\imath\alpha} = 1$ منه :

$$C_n = 0 \iff e^{\imath\theta}(1+z)^n = -e^{-\imath\theta}(1+z)^n \iff (1+z)^n = 0 \iff 1+z = 0 \iff z = -1$$

إذن للمعادلة حلّ وحيد و هو $z = -1$.

ملاحظة 41 : ◁ بالتعويض عن $\alpha = 0$ في المعادلة، و بما أنّ $z = -1$ حل لها، نستنتج أنّ :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0}$$

و هي نتيجة معروفة يمكن الحصول عليها أيضاً بملاحظة أنّ : $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.
▷

- إذا كان $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ فإنّ $e^{\imath\alpha} = e^{-\imath\alpha} = -1$ منه :

$$C_n = 0 \iff e^{\imath\theta}(1-z)^n = -e^{-\imath\theta}(1-z)^n \iff (1-z)^n = 0 \iff 1-z = 0 \iff z = 1$$

إذن للمعادلة حلّ وحيد و هو $z = 1$.

- إذا كان $\alpha \neq 0 \pmod{2\pi}$ و $\alpha \neq \pi \pmod{2\pi}$ (أي إذا كان $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$) فإنّ :

$$\begin{aligned} C_n = 0 &\iff e^{\imath\theta}\left(1+ze^{\imath\alpha}\right)^n = -e^{-\imath\theta}\left(1+ze^{-\imath\alpha}\right)^n \\ &\iff \left(\frac{1+ze^{\imath\alpha}}{1+ze^{-\imath\alpha}}\right)^n = -e^{2\imath\theta} \iff \left(\frac{1+ze^{\imath\alpha}}{1+ze^{-\imath\alpha}}\right)^n = e^{-\imath(2\theta-\pi)} \\ &\iff \frac{1+ze^{\imath\alpha}}{1+ze^{-\imath\alpha}} = z_k \quad \Big| \quad z_k = e^{\imath\frac{-(2\theta-\pi)+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ &\iff z = \frac{z_k - 1}{e^{\imath\alpha} - z_k e^{-\imath\alpha}} \quad \Big| \quad z_k = e^{\imath\frac{-(2\theta-\pi)+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ &\iff z = e^{\imath\alpha}\frac{z_k - 1}{e^{2\imath\alpha} - z_k} \quad \Big| \quad z_k = e^{\imath\frac{-2\theta+(2k+1)\pi}{n}}, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\} \end{aligned}$$

و في هذه الحالة، للمعادلة n حلاً.

2• لحل المعادلة الثانية، يمكن إتباع نفس الطريقة (نُذكِّر أنّ $\sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}$) لكن يمكن إستعمال النتيجة السابقة بعد ملاحظة أنّ : $\sin(\theta + k\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta - k\alpha\right)$ أي بالتعويض $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ و $\alpha' = -\alpha$. إذن :

- للمعادلة حلّ وحيد و هو $z = -1$ إذا كان $-\alpha = 0 \pmod{2\pi}$ أي إذا كان $\alpha = 0 \pmod{2\pi}$.
- للمعادلة حلّ وحيد و هو $z = 1$ إذا كان $-\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ أي إذا كان $\alpha = -\pi \pmod{2\pi}$ (أي إذا كان $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$) .
- أمّا إذا كان $-\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ أي إذا كان $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ فإنّ المعادلة تقبل n حلاً و هي :

$$z = e^{-\imath\alpha}\frac{z_k - 1}{e^{-2\imath\alpha} - z_k} \quad \Big| \quad z_k = e^{\imath\frac{-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+(2k+1)\pi}{n}} = e^{\imath\frac{2\theta+2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

■

188 أثبت أنّ حلول المعادلة $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}-nz^n=0$ لها طويلة أصغر من أو تساوي 1 .

الحلّ. ليكن $z\in\mathbb{C}$. نفرض أنّ $|z|>1$. إذن، حسب المتباينة المثلثية :

$$|1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}|\leq 1+|z|+|z^2|+\cdots+|z|^{n-1}<|z|^n+|z|^n+\cdots+|z|^n=n\,|z|^n=|nz^n|$$

أي $|1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}|<|nz^n|$ و بالتالي $nz^n\neq 1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
برهنّا إذن أنه إذا كان $|z|>1$ فإنّ z **ليس حلاًّ** للمعادلة $nz^n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$.
بأخذ **العكس النقيض**، نستنتج أنه إذا كان z حلاًّ للمعادلة $nz^n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ فإنّ $|z|\leq 1$. ■

189 ليكن a و b عددين مركبين حيث $|a|<1$ و $|b|<1$. أثبت أنّ $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$.
أنظر التمرين 190 صفحة 273

الحلّ. إذا كان $|a|<1$ و $|b|<1$ فإنّ $|a|\cdot|b|<1$ منه $|ab|=|a|\cdot|b|<1$ و هذا يستلزم أنّ $\overline{a}b\neq 1$ و $|\overline{a}b|=|\overline{a}|\cdot|b|=|a|\cdot|b|<1$
و بالتالي فالمقدار $\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}$ مُعرَّف.
ليكن a و b عددين مركبين حيث $|a|<1$ و $|b|<1$. لدينا :

$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1 &\iff |a-b|<|1-\overline{a}b| \iff |a-b|^2<|1-\overline{a}b|^2\\ &\iff (\overline{a}-\overline{b})(a-b)<(1-\overline{a}b)(1-a\overline{b})\\ &\iff a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{a}+b\overline{b}<1-a\overline{b}-b\overline{a}+a\overline{a}b\overline{b}\\ &\iff 1-|a|^2-|b|^2+|a|^2|b|^2>0\\ &\iff \left(1-|a|^2\right)\left(1-|b|^2\right)>0\end{aligned}$$

و المتراجحة الأخيرة صحيحة لأنّ $|a|<1$ و $|b|<1$.
نستنتج أنّ : $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|<1$. ■

190 a عدد مركب بحيث $|a|<1$. حدّد مجموعة الأعداد المركبة z التي تُحقق : $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leq 1$.
أنظر التمرين 189 صفحة 273

الحلّ. المقدار $\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$ مُعرّف إذا و فقط إذا كان $z\neq\dfrac{1}{\overline{a}}$ و في هذه الحالة :

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right|\leq 1 \iff |z-a|^2\leq|1-\overline{a}z|^2$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و بما أنه لكل عددين مركبين u و v يكون $|u+v|^2 = |u|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{u}v) + |v|^2$ (تمرين 248 صفحة 348) فإنّ (نُذكّر أنّ $|\overline{a}| = |a|$) :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 &\iff |z-a|^2 \leq |1-\overline{a}z|^2 \\
&\iff |z|^2 + 2\Re\left(\overline{(-a)}z\right) + |-a|^2 \leq |1|^2 + 2\Re\left(\overline{1}(-\overline{a}z)\right) + |-\overline{a}z|^2 \\
&\iff |z|^2 + |a|^2 \leq 1 + |\overline{a}|^2 \cdot |z|^2 \\
&\iff |z|^2 + |a|^2 - 1 - |\overline{a}|^2 \cdot |z|^2 \leq 0 \\
&\iff \left(|a|^2 - 1\right)\left(|z|^2 - 1\right) \geq 0 \\
&\iff |z|^2 - 1 \leq 0 \qquad (\text{لأنّ } |a| < 1) \\
&\iff |z| \leq 1
\end{aligned}$$

إذن : المجموعة التي نبحث عنها هي مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها أصغر من أو تساوي 1 . ■

191 ☼

ليكن n عدداً طبيعيا حيث $n \geq 1$.

نُعرّف المتتاليات $(a_n)_{n\geq 1}$ ، $(b_n)_{n\geq 1}$ ، $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ كما يلي :

$$a_n = 1 + n\imath \quad , \quad b_n = 1 - n\imath$$

$$u_n = \frac{1 + n(n+1) + \imath}{1 + n(n+1) - \imath} \quad , \quad v_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$$

1. أثبت أنّ : $u_n = \dfrac{a_{n+1}b_n}{a_n b_{n+1}}$, $\forall n \geq 1$.
2. إستنتج أنّ : $v_n = \dfrac{1-\imath}{1+\imath} \cdot \dfrac{1+(n+1)\imath}{1-(n+1)\imath}$, $\forall n \geq 1$.
3. أكتب v_n على الشكل الجبري .
4. ليكن θ_n عمدة للعدد v_n $(0 \leq \theta_n < 2\pi)$. إستنتج مما سبق قيمة كل من $\cos\theta_n$ و $\sin\theta_n$.
5. نضع $w_n = \tan\theta_n$. أوجد النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.
6. إستنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n$.

الحلّ. 1. ليكن $n \geq 1$. لدينا :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}b_n}{a_n b_{n+1}} &= \frac{(1+(n+1)\imath)(1-n\imath)}{(1+n\imath)(1-(n+1)\imath)} = \frac{1-n\imath+(n+1)\imath+n(n+1)}{1-(n+1)\imath+n\imath+n(n+1)} \\
&= \frac{n^2+n+1+\imath}{n^2+n+1+\imath} = \frac{1+n(n+1)+\imath}{1+n(n+1)-\imath} = u_n
\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 2 ليكن $n \geq 1$. لدينا :

$$v_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_{n-1} \times u_n = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \cdots \times \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \times \frac{a_n}{b_{n+1}}$$
$$= \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{1-\imath}{1+\imath} \cdot \frac{1+(n+1)\imath}{1-(n+1)\imath}$$

• 3 ليكن $n \geq 1$. لدينا :

$$v_n = \frac{1-\imath}{1+\imath} \cdot \frac{1+(n+1)\imath}{1-(n+1)\imath} = \frac{(1-\imath)^2}{1^2+1^2} \cdot \frac{(1+(n+1)\imath)^2}{1^2+(n+1)^2}$$
$$= \frac{1-2\imath-1}{2} \cdot \frac{1+2(n+1)\imath-(n+1)^2}{n^2+2n+2}$$
$$= -\imath\left[\frac{-n^2-2n+2(n+1)\imath}{n^2+2n+2}\right] = \frac{2n+2+(n^2+2n)\imath}{n^2+2n+2} = \frac{2n+2}{n^2+2n+2} + \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}\imath$$

و هو الشكل الجبري للعدد v_n .

• 4 ليكن $n \geq 1$. لدينا :

$$(2n+2)^2 + (n^2+2n)^2 = n^4+4n^3+8n^2+8n+4 = (n^2+2n+2)^2$$

منه :

$$|v_n| = \sqrt{\frac{(2n+2)^2+(n^2+2n)^2}{(n^2+2n+2)^2}} = \sqrt{\frac{(n^2+2n+2)^2}{(n^2+2n+2)^2}} = 1$$

منه :

$$\cos\theta_n = \frac{\mathrm{Re}(v_n)}{|v_n|} = \frac{2n+2}{n^2+2n+2} \quad \text{و} \quad \sin\theta_n = \frac{\mathrm{Im}(v_n)}{|v_n|} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}$$

ملاحظة 42 : ◁ إن لم نلاحظ أنّ : $n^4+4n^3+8n^2+8n+4 = (n^2+2n+2)^2$ فيكمن الإكتفاء بالشكل المنشور له و لإيجاد الطويلة، نقوم بنشر عبارة المقام $(n^2+2n+2)^2$ و نجد :

$$|v_n| = \sqrt{\frac{(2n+2)^2+(n^2+2n)^2}{(n^2+2n+2)^2}} = \sqrt{\frac{n^4+4n^3+8n^2+8n+4}{n^4+4n^3+8n^2+8n+4}} = 1$$

▷

ملاحظة 43 : ◁ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. بما أنّ $(2n+2)^2+(n^2+2n)^2 = (n^2+2n+2)^2$ فهذا يعني أنّ الثلاثية $(2n+2, n^2+2, n^2+2n+2)$ حل للمعادلة الديوفانتية $x^2+y^2=z^2$. و بما أنّ n كيفي فهذا يعني أنّ هذه المعادلة تقبل عدداً لانهائياً من الحلول.

في الحقيقة، يمكن إثبات أنّ حلول المعادلة الديوفانتية $x^2+y^2=z^2$ هي جميع الثلاثيات $\left(\alpha uv, \frac{\alpha(u^2-v^2)}{2}, \frac{\alpha(u^2+v^2)}{2}\right)$ حيث α عدد طبيعي كيفي، و u و v عددان أوّليان فرديان و مختلفان مع $v < u$.

▷

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ملاحظة 44 : ◁ في القرن السابع عشر، كتب العالم الفرنسي **بيير فيرما** ﴿PIERRE FERMAT﴾ أنّ المعادلة الديوفانتية $x^n + y^n = z^n$ ، حيث $n \geq 3$ ، تقبل حلاً وحيداً و هو الثلاثية $(0,0,0)$ لكنه لم يقدّم إثباتاً لذلك بل اكتفى بالقول في (رسالة كتبها لأحد زملائه) : "إنّ هامش هذه الرسالة لا يتّسع لكتابة البرهان". و ظلت هذه «النظرية» بدون برهان لفترة طويلة رغم كل الجهود التي بذلها العلماء (و هم كُثُر) بعد **فيرما** إلى غاية أواخر القرن العشرين (و بالتحديد نوفمبر 1994) حيث تمكن العالم البريطاني **أندرو وايلز** ﴿ANDREW WILES﴾ من إثباتها مستعملاً كمّاً معتبراً من الرياضيات المتقدمة (و التي تُدرَّس فيما بعد التدرُّج) . ▷

• 5 لأجل $n \geq 1$ لدينا :

$$w_n = \tan\theta_n = \frac{\sin\theta_n}{\cos\theta_n} = \frac{\frac{n^2+2n}{n^2+2n+2}}{\frac{2n+2}{n^2+2n+2}} = \frac{n^2+2n}{2n+2}$$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n}{2n+2}\right) = +\infty$.

• 6 بما أنّ $0 \leq \theta_n < 2\pi$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\theta_n = +\infty$ ، و بما أنّ دالة الظل (tan) مستمرة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\theta_n = \tan\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n\right) = +\infty$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = +\frac{\pi}{2}$.

ملاحظة 45 : ◁ لدينا : $|v_n| = 1$ منه $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = 1$ ، و لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(v_n) = +\frac{\pi}{2}$ ، لهذا نكتب :

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1e^{\imath\pi/2} = \imath$.

▷

■

192 الهدف من التمرين هو دراسة المتتالية $(S_n)_{n\geq 2}$ المعرفة لكل $n \geq 2$ بالعبارة : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

• 1 نضع، لأجل $n \geq 2$ ، $z = e^{\imath\pi/n}$. أحسب المجموع $\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k$.

• 2 أثبت أنه لكل $n \geq 2$: $\frac{2}{1-z} = 1 + \imath\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

• 3 إستنتج أنه لكل $n \geq 2$: $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

• 4 أدرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة لكل $n \geq 2$ بالعبارة : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

الحلّ. • 1 مجموع جزئي لمتتالية هندسية أساسها $z \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-e^{\imath\pi}}{1-z} = \frac{1-(-1)}{1-z} = \frac{2}{1-z}$$

• 2 لدينا لكل $n \geq 2$:

$$1 - z = 1 - e^{\imath\pi/n} = e^{\frac{\imath\pi}{2n}}\left(e^{-\frac{\imath\pi}{2n}} - e^{\frac{\imath\pi}{2n}}\right) = -2\imath e^{\frac{\imath\pi}{2n}} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منه

$$\frac{2}{1-z}=\frac{\imath e^{-\frac{\imath\pi}{2n}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{\imath\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\imath\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=1+\imath\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

• 3 بداية، نلاحظ أنّ

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

($\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=0$ من أجل $k=0$ و $k=n$).

لدينا :

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Im}\left(e^{k\imath\pi/n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Im}\left(z^k\right)=\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{2}{1-z}\right)\\&=\operatorname{Im}\left(1+\imath\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\end{aligned}$$

• 4 لكل $n\geq 2$ لدينا :

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\end{aligned}$$

لكن

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1\qquad\left(x=\frac{\pi}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0\right)$$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$ منه

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{\pi}\times1\times1=\frac{2}{\pi}$$

ملاحظة 46 : ◁ نقول أنّ المتتالية (S_n) تتقارب وَسَطياً (converge en moyenne) نحو $\frac{2}{\pi}$. ▷

■

193 ليكن z و z' عددين مركبين و u أحد الجذرين التربيعيين للعدد zz' . أثبت أنّ :

$$|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|$$

الحلّ. • **الطريقة الأولى** : ليكن a جذراً تربيعياً لـ z و b جذراً تربيعياً لـ z' . لدينا $z=a^2$ و $z'=b^2$ منه $(ab)^2=zz'=u^2$ منه $(u-ab)(u+ab)=0$ أي $u=\pm ab$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بما أنّ نص التمرين لا يتبدّل[1] إذا عوّضنا عن u بـ $-u$ فبإمكاننا أن نأخذ $u = ab$ و بالتالي :

$$\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right| = \left|\frac{a^2+b^2}{2}-ab\right|+\left|\frac{a^2+b^2}{2}+ab\right| = \left|\frac{a^2+b^2-2ab}{2}\right|+\left|\frac{a^2+b^2+2ab}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{(a-b)^2}{2}\right|+\left|\frac{(a+b)^2}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|\left|(a-b)^2\right|+\left|\frac{1}{2}\right|\left|(a+b)^2\right|$$

$$= \frac{1}{2}|a-b|^2+\frac{1}{2}|a+b|^2 = \frac{1}{2}\left[(a-b)(\overline{a}-\overline{b})+(a+b)(\overline{a}+\overline{b})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a\overline{a}-a\overline{b}-b\overline{b}+b\overline{b}+a\overline{a}+a\overline{b}+b\overline{b}+b\overline{b}\right]$$

$$= a\overline{a}+b\overline{b} = |a^2|+|b|^2 = |a^2|+\left|b^2\right| = |z|+|z'|$$

و هو المطلوب.

- **الطريقة الثانية** : نقوم بتربيع الطرفين، و نُذكّر أنه لكلّ عددين مركبين u و v لدينا :

$$\begin{cases} |u+v|^2 = (u+v)(\overline{u}+\overline{v}) = |u|^2+2\,\mathrm{Re}(u\overline{v})+|v|^2 \\ |u-v|^2 = (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) = |u|^2-2\,\mathrm{Re}(u\overline{v})+|v|^2 \\ |u+v|^2+|u-v|^2 = 2|u|^2+2|v|^2 \qquad \text{(بجمع المساوتين أعلاه)} \end{cases}$$

فيكون :

$$\left(\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|\right)^2 = \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|^2+2\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|\cdot\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|^2$$

$$= \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|^2+2\left|\left(\frac{z+z'}{2}-u\right)\left(\frac{z+z'}{2}+u\right)\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|^2$$

$$= \left|\frac{z+z'}{2}-u\right|^2+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|^2+2\left|\left(\frac{z+z'}{2}\right)^2-u^2\right|$$

$$= 2\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2+2|zz'|+2\left|\left(\frac{z+z'}{2}\right)^2-zz'\right|$$

$$= 2\left|\frac{(z+z')^2}{4}\right|+2|z|\cdot|z'|+2\left|\frac{z^2+2zz'+z'^2-4zz'}{4}\right|$$

$$= \left|\frac{(z+z')^2}{2}\right|+2|z|\cdot|z'|+\left|\frac{z^2-2zz'+z'^2}{2}\right|$$

$$= \left|\frac{(z+z')^2}{2}\right|+\left|\frac{(z-z')^2}{4}\right|+2|z|\cdot|z'|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|(z+z')^2\right|+\left|(z-z')^2\right|\right)+2|z|\cdot|z'|$$

$$= \frac{1}{2}\left(|z+z'|^2+|z-z'|^2\right)+2|z|\cdot|z'|$$

[1] و هذا يمكن توقّعه، لأنه إن لم يكن الأمر كذلك لحدد النص أيّ الجذرين نأخذ و إلاّ لكان التمرين خاطئاً!

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$= \frac{1}{2}\left(2|z|^2 + 2|z'|^2\right) + 2|z| \cdot |z'|$$
$$= |z|^2 + |z'|^2 + 2|z| \cdot |z'| = \left(|z| + |z'|\right)^2$$

و بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نصل إلى النتيجة المطلوبة (نُذكِّر أنه في $\mathbb{R}_+$: $x = y \iff x^2 = y^2$).

■

194 أوجد الثلاثيات $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ التي تحقق الجملة : $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$.

أنظر التمرين 195 صفحة 280
أنظر التمرين 210 صفحة 300

الحلّ. **الطريقة الأولى** بالحساب : لدينا

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \iff (\cos a + \cos b + \cos c) + \imath(\sin a + \sin b + \sin c) = 0$$
$$\iff e^{\imath a} + e^{\imath b} + e^{\imath c} = 0$$

منه $e^{\imath a} + e^{\imath b} = -e^{\imath c}$. بأخذ الطويلة ينتج $|e^{\imath a} + e^{\imath b}| = |-e^{\imath c}| = 1$.
لكن $e^{\imath a} + e^{\imath b} = e^{\imath a/2}e^{\imath b/2}\left(e^{\imath(a-b)/2} + e^{-\imath(a-b)/2}\right)$ منه :

$$1 = \left|e^{\imath a/2}e^{\imath b/2}\left(e^{\imath(a-b)/2} + e^{-\imath(a-b)/2}\right)\right|$$
$$= \left|e^{\imath a/2}\right| \cdot \left|e^{\imath b/2}\right| \cdot \left|e^{\imath(a-b)/2} + e^{-\imath(a-b)/2}\right| = 1 \cdot 1 \cdot \left|2\cos\frac{a-b}{2}\right|$$

أي $\left|2\cos\frac{a-b}{2}\right| = 1$ منه $\left|\cos\frac{a-b}{2}\right| = \frac{1}{2}$ و بالتالي $\frac{a-b}{2} = \pm\frac{\pi}{3} \pmod{\pi}$ أي $a - b = \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ منه $b = a \pm \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ أي $e^{\imath b} = e^{\imath(a \pm 2\pi/3)}$. نضع $j = e^{2\imath\pi/3}$ فيكون :

- $e^{\imath c} = -\left(e^{\imath a} + e^{\imath b}\right) = -(1 + j)\,e^{\imath a} = j^2 e^{\imath a}$ منه $e^{\imath b} = je^{\imath a}$ ؛
- أو $e^{\imath c} = -\left(e^{\imath a} + e^{\imath b}\right) = -\left(1 + j^2\right)e^{\imath a} = je^{\imath a}$ منه $e^{\imath b} = j^2 e^{\imath a}$

و بالتالي :
$$\left.\begin{array}{ll} b = a + \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} & \text{و} \quad c = a + \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ \text{أو} \quad b = a + \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi} & \text{و} \quad c = a + \frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}. \end{array}\right\}$$

بالعكس :

- إذا كان $e^{\imath b} = je^{\imath a}$ و $e^{\imath c} = j^2 e^{\imath a}$ فإنّ :
$$e^{\imath a} + e^{\imath b} + e^{\imath c} = e^{\imath a}\left(1 + j + j^2\right) = 0$$
- و إذا كان $e^{\imath b} = j^2 e^{\imath a}$ و $e^{\imath c} = je^{\imath a}$ فإنّ :
$$e^{\imath a} + e^{\imath b} + e^{\imath c} = e^{\imath a}\left(1 + j^2 + j\right) = 0$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

في الأخير ، مجموعة الحلول هي :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(a, a+\frac{2\pi}{3}+2k\pi, a+\frac{4\pi}{3}+2\ell\pi\right) \ ; \ (a,k,\ell) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$
$$\bigcup \left\{\left(a, a+\frac{4\pi}{3}+2k\pi, a+\frac{2\pi}{3}+2\ell\pi\right) \ ; \ (a,k,\ell) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$

الطريقة الثانية : يمكن البحث بطريقة هندسية. نضع $u = e^{\imath a}$ ، $v = e^{\imath b}$ و $w = e^{\imath c}$ و لتكن A ، B ، C لواحقها على الترتيب. بما أنّ $|w-0| = |v-0| = |u-0| = 1$ فإنّ الأعداد u ، v و w هي لواحق ثلاثة نقط تقع على الدائرة التي مركزها النقطة O (مبدأ المعلم) و نصف قطرها 1 .

لدينا $u+v+w = 0$ أي $\frac{1}{3}(u+v+w) = 0$ و هذا يعني أنّ النقطة O (صورة العدد 0) هي مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C أي $O = G$ هي مركز ثقل المثلث ABC و هذا يعني أنّ متوسّطات هذا المثلث هي أيضاً محاور أضلاعه .
إذن فالمثلث ABC متقايس الأضلاع.

بالعكس، إذا كان المثلث ABC متقايس الأضلاع فمن الواضح أنّ مركز ثقله هو مركز الدائرة المحيطة به أي أنّ $u+v+w = 0$.

نستنتج أنّ الثلاثية (a,b,c) حلّ للمعادلة $e^{\imath a}+e^{\imath b}+e^{\imath c} = 0$ إذا و فقط إذا كان المثلث، الذي لواحق رؤوسه هي $e^{\imath a}$، $e^{\imath b}$ و $e^{\imath c}$ ، متقايس الأضلاع أي مجموعة الحلول هي :

$$\mathscr{S} = \left\{\left(a, a+\frac{2\pi}{3}+2k\pi, a+\frac{4\pi}{3}+2\ell\pi\right) \ ; \ (a,k,\ell) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$
$$\bigcup \left\{\left(a, a+\frac{4\pi}{3}+2k\pi, a+\frac{2\pi}{3}+2\ell\pi\right) \ ; \ (a,k,\ell) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\right\}$$

هذا التمرين حالة خاصة من التمرين 210 صفحة 300. ■

195 لتكن x ، y و z أعداداً حقيقية تُحقق : $e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z} = 0$. أثبت أنّ :
$e^{2\imath x}+e^{2\imath y}+e^{2\imath z} = 0$

أنظر التمرين 210 صفحة 300
أنظر التمرين 194 صفحة 279

الحلّ. **الطريقة الأولى** : نقسم طرفي المساواة $e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z} = 0$ على $e^{\imath x}$ فنجد $1+e^{\imath\alpha}+e^{\imath\beta} = 0$ مع $\alpha = y-x$ و $\beta = z-x$. منه :

$$e^{\imath\alpha}+e^{\imath\beta} = -1 \iff (\cos\alpha+\cos\beta)+\imath(\sin\alpha+\sin\beta) = -1+0\cdot\imath$$
$$\iff \begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta = -1\\ \sin\alpha+\sin\beta = 0\end{cases}$$

من المعادلة $\sin\alpha+\sin\beta = 0$ نستنتج أنّ $\alpha = -\beta \pmod{2\pi}$ أو $\alpha = \pi+\beta \pmod{2\pi}$.
إذا كان $\alpha = \pi+\beta \pmod{2\pi}$ فإنّه بالتعويض في المعادلة $\cos\alpha+\cos\beta = -1$ نجد $0 = -1$ و هذا تناقض .
إذا كان $\alpha = -\beta \pmod{2\pi}$ فإنّه بالتعويض في المعادلة $\cos\alpha+\cos\beta = -1$ نجد $2\cos\alpha = -1$
منه $\alpha = \pm\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$. و بالتالي فإنّ $e^{\imath\alpha} = e^{2\imath\pi/3} = j$ أو $e^{\imath\alpha} = e^{-2\imath\pi/3} = j^2$ منه :

$$1+e^{2\imath\alpha}+e^{2\imath\beta} = 1+e^{2\imath\pi/3}+e^{-2\imath\pi/3} = 1+j+j^2 = 0$$
أو
$$1+e^{2\imath\alpha}+e^{2\imath\beta} = 1+e^{-2\imath\pi/3}+e^{2\imath\pi/3} = 1+j^2+j = 0$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

أي $e^{2\imath x}+e^{2\imath y}+e^{2\imath z}=0$ أي $e^{2\imath x}\left(1+e^{2\imath\alpha}+e^{2\imath\beta}\right)=0$ منه $1+e^{2\imath\alpha}+e^{2\imath\beta}=0$.

الطريقة الثانية : نلاحظ أنّ $(e^{\imath x})^2=e^{2\imath x}$ و بالتالي يمكن تربيع طرفي المساواة الأولى للحصول على حدود الطرف الأول من المساواة الثانية. لكن :

$$(e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z})^2=e^{2\imath x}+e^{2\imath y}+e^{2\imath z}+2\left(e^{\imath(x+y)}+e^{\imath(y+z)}+e^{\imath(z+x)}\right)$$

كيف يمكن التخلص من الحدود الإضافية ؟ الجواب : باستغلال الخاصية $|e^{\imath x}|=|e^{\imath y}|=|e^{\imath z}|=1$ علماً أنه إذا كان $|u|=1$ فإنّ $\overline{u}=\dfrac{1}{u}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z}=0 &\Longrightarrow \overline{e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z}}=0\\
&\Longrightarrow \overline{e^{\imath x}}+\overline{e^{\imath y}}+\overline{e^{\imath z}}=0\\
&\Longrightarrow \frac{1}{e^{\imath x}}+\frac{1}{e^{\imath y}}+\frac{1}{e^{\imath z}}=0\\
&\Longrightarrow \frac{e^{\imath(x+y)}+e^{\imath(y+z)}+e^{\imath(z+x)}}{e^{\imath(x+y+z)}}=0\\
&\Longrightarrow e^{\imath(x+y)}+e^{\imath(y+z)}+e^{\imath(z+x)}=0
\end{aligned}$$

و بالتالي :

$$0=(e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z})^2=e^{2\imath x}+e^{2\imath y}+e^{2\imath z}+2\left(e^{\imath(x+y)}+e^{\imath(y+z)}+e^{\imath(z+x)}\right)=e^{2\imath x}+e^{2\imath y}+e^{2\imath z}$$

الطريقة الثالثة : يمكن البحث بطريقة هندسية. نضع $a=e^{\imath x}$ ، $b=e^{\imath y}$ و $c=e^{\imath z}$ و لتكن A ، B ، C لواحقها على الترتيب. بما أنّ $|c-0|=|b-a|=|a-0|=1$ فإنّ الأعداد a ، b و c هي لواحق ثلاثة نقط تقع على الدائرة التي مركزها النقطة O (مبدأ المعلم) و نصف قطرها 1 .

لدينا $a+b+c=0$ أي $\dfrac{1}{3}(a+b+c)=0$ و هذا يعني أنّ النقطة O (صورة العدد 0) هي مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C أي $O=G$ هي مركز ثقل المثلث ABC و هذا يعني أنّ متوسّطات المثلث هي أيضاً محاور أضلاعه و بالتالي فالمثلث ABC متقايس الأضلاع.

نضع $j=e^{2\imath\pi/3}$ (نُذكّر أنّ $j^3=1$ و $1+j+j^2=0$) . حسب خواص المثلث المتقايس الأضلاع فإنّ $b=ja$ و $c=j^2a$ (أو $b=j^2a$ و $c=ja$) .

نفرض أنّ $b=ja$ و $c=j^2a$ منه

$$e^{2\imath x}+e^{2\imath y}+e^{2\imath z}=a^2+b^2+c^2=a^2+j^2a^2+j^4a^2=a^2\left(1+j^2+j^4\right)=0$$

لأنّ $j^4=j$ و $1+j+j^2=0$ و هو المطلوب.

يمكن أيضاً تطبيق نتيجة التمرين 210 صفحة 300 لإثبات أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

الطريقة الرابعة : لدينا $e^{\imath x}+e^{\imath y}+e^{\imath z}=0$ منه $e^{\imath x}+e^{\imath y}=-e^{\imath z}$ و هذا يعني أنّ $|e^{\imath x}+e^{\imath y}|=|-e^{\imath z}|=1$. لكن :

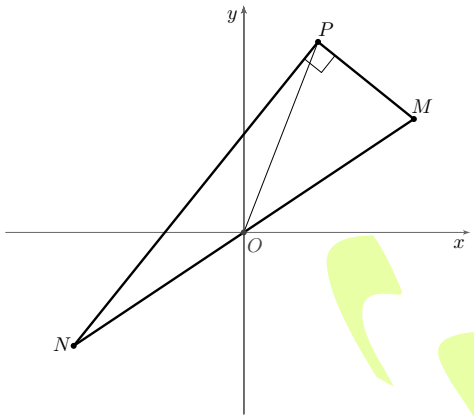
$$\begin{aligned}
|e^{\imath x}+e^{\imath y}|^2&=(e^{\imath x}+e^{\imath y})\,\overline{(e^{\imath x}+e^{\imath y})}=(e^{\imath x}+e^{\imath y})\,(e^{-\imath x}+e^{-\imath y})\\
&=1+e^{\imath(y-x)}+e^{-\imath(y-x)}+1=2+2\cos(y-x)
\end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\begin{aligned}
|e^{\imath x}+e^{\imath y}|=1 &\iff |e^{\imath x}+e^{\imath y}|^2=1 \iff 2+2\cos(y-x)=1\\
&\iff \cos(y-x)=-\frac{1}{2} \iff y-x=\pm\frac{2\pi}{3}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)
\end{aligned}$$

- إذا كان $y-x=\dfrac{2\pi}{3}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$ فإنّ $e^{\imath y}=e^{\imath(x+\frac{2\pi}{3})}=je^{\imath x}$ و $e^{\imath z}=-e^{\imath x}-e^{\imath y}=(-1-j)\,e^{\imath x}=j^2e^{\imath x}$ و هذا يعني أنّ المثلث الذي لواحق رؤوسه $e^{\imath x}$ ، $e^{\imath y}$ ، $e^{\imath z}$ هو مثلث متقايس الأضلاع.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.1

- إذا كان $y-x=-\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}$ فإنّ $e^{iy}=e^{i\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}=j^2e^{ix}$ و $e^{iz}=-e^{ix}-e^{iy}=\left(-1-j^2\right)e^{ix}=je^{ix}$ و هذا يعني أنّ المثلث الذي لواحق رؤوسه e^{ix} ، e^{iy} ، e^{iz} هو مثلث متقايس الأضلاع.

في كل الحالات، هذا المثلث متقايس الأضلاع و نتمم الحل بنفس الطريقة السابقة. ■

196

ليكن $z\in\mathbb{C}^*$ و u ، v الجذرين التربيعيين للعدد z .
أوجد مجموعة الأعداد $z\in\mathbb{C}^*$ بحيث تُشكّل النقط التي لواحقها z ، u ، v مثلثاً قائما في النقطة التي لاحقتها z .

الحلّ. **الطريقة الأولى** : (هندسية) نستعين بالشكل VII.1.
لتكن P النقطة ذات اللاحقة z ، M النقطة ذات اللاحقة u و N النقطة ذات اللاحقة v .
لدينا $z=u^2=v^2$ و $v=-u$ إذن مبدأ المعلم O هو منتصف القطعة [MN] .
المثلث MNP قائم الزاوية في الرأس P إذا و فقط إذا إنتمت النقطة P إلى الدائرة التي مركزها O و MN قطر لها أي إذا و فقط إذا كان $OM=OP$. لكن :

$$\begin{aligned}
OM=0P &\iff |u|=|z| \iff |u|=|u^2| \iff |u|=|u|^2 \\
&\iff |u|=0 \quad \text{أو} \quad |u|=1 \\
&\iff |u|=1 \qquad (z\neq 0 \text{ لأنّ } u\neq 0) \\
&\iff |u|^2=1 \\
&\iff |z|=1
\end{aligned}$$

إذن المجموعة التي نبحث عنها هي مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 .
الطريقة الثانية : (حسابية) المثلث MNP قائم في P إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{PM}\perp\overrightarrow{PN}$ و حسب المبرهنة 25صفحة 53 ، يتحقق هذا إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Re}\left((u-z)\cdot\overline{(v-z)}\right)=0$. لكن :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left((u-z)\cdot\overline{(v-z)}\right)=0 &\iff \operatorname{Re}\left(\left(\overline{u}-\overline{u}^2\right)\left(-u-u^2\right)\right)=0 \\
&\iff \frac{1}{2}\left[\left(\left(\overline{u}-\overline{u}^2\right)\left(-u-u^2\right)+\overline{\left(\left(\overline{u}-\overline{u}^2\right)\left(-u-u^2\right)\right)}\right)\right]=0 \\
&\iff \left(\overline{u}-\overline{u}^2\right)\left(-u-u^2\right)+\left(u-u^2\right)\left(-\overline{u}-\overline{u}^2\right)=0 \\
&\iff -\overline{u}u-\overline{u}u^2+\overline{u}^2u+\overline{u}^2u^2-u\overline{u}-u\overline{u}^2+u^2\overline{u}+u^2\overline{u}^2=0
\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$\iff -|u|^2+\left|u^2\right|^2-|u|^2+\left|u^2\right|^2=0$$
$$\iff -2|u|^2+2|u|^4=0$$
$$\iff |u|^2=0 \quad \text{أو} \quad |u|^2=1$$
$$\iff |u|^2=1 \qquad (z\neq 0 \text{ لأنّ } u\neq 0)$$
$$\iff |z|=1$$

و نصل إلى نفس النتيجة. ■

197 a ، b ، c و d أعداد حقيقية. حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين :

1• $z+|z|=a+\imath b$ 2• $z-|z|=c+\imath d$

الحلّ. 1• نُميِّز حالتين :

• إذا كان $a+\imath b=0$ أي إذا كان $a=b=0$ فإنّ المعادلة تُصبح : $z=-|z|$. و بالتالي، إمّا $z=0$ أو $|z|\,e^{\imath\arg(z)}=-|z|=|z|\,e^{\imath\pi}$ أي إمّا $z=0$ أو $\arg(z)=\pi \pmod{2\pi}$.
إذن مجموعة الحلول هي مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $\mathbb{R}_-$ (و $0\in\mathbb{R}_-$) .

• إذا كان $a+\imath b\neq 0$ فحسب ما سبق، فإنّ $z\notin\mathbb{R}_-$.
نضع $a+\imath b=re^{\imath\varphi}$ مع $r>0$ و $-\pi<\varphi\leq\pi$ و نبحث عن الحلول على الشكل $z=\rho e^{\imath\theta}$ مع $\rho>0$ و $-\pi<\theta<\pi$ ($z\notin\mathbb{R}_-$ لأنّ $\theta\neq\pm\pi$) . لدينا :

$$z+|z|=a+\imath b \iff \rho e^{\imath\theta}+\rho=re^{\imath\varphi} \iff \rho\left(1+e^{\imath\theta}\right)=re^{\imath\varphi}$$
$$\iff \rho e^{\imath\theta/2}\left(e^{-\imath\theta/2}+e^{\imath\theta/2}\right)=re^{\imath\varphi} \iff 2\rho e^{\imath\theta/2}\cos\frac{\theta}{2}=re^{\imath\varphi}$$

بما أنّ $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ فإنّ $\cos\frac{\theta}{2}>0$ و حسب المبرهنة 8 صفحة 20 فإنّ العدد $2\rho e^{\imath\theta/2}\cos\frac{\theta}{2}$ مكتوب على شكله الأسي إذن : $2\rho\cos\frac{\theta}{2}=r$ و $\frac{\theta}{2}=\varphi \pmod{2\pi}$. لكن $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ ، إذن إذا كان $\varphi\notin\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ فالمعادلة لا تقبل أيّ حلّ. لكن :

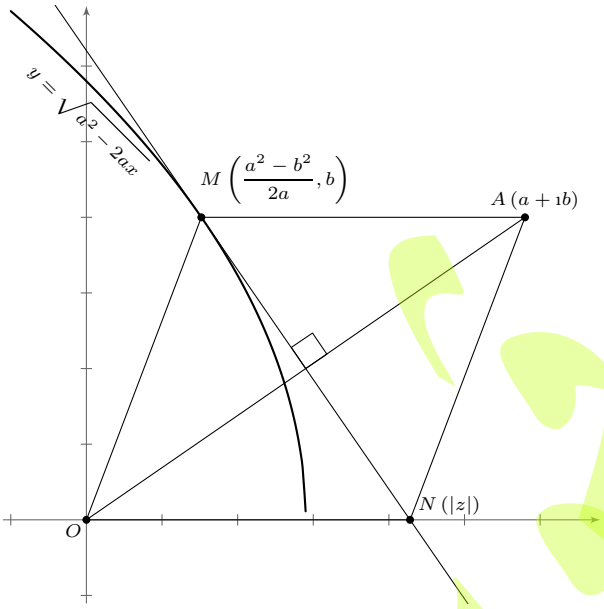
$$\varphi\notin\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\iff \cos\frac{\theta}{2}\leq 0 \iff \operatorname{Re}(a+\imath b)\leq 0 \iff a\leq 0$$

إذن المعادلة لا تقبل أيّ حلّ إذا كان $a\leq 0$.
إذا كان $a>0$ فإنّ $\theta=2\varphi \pmod{2\pi}$ و منه : $\rho=\frac{r}{2\cos\varphi}$

$$z=\frac{r}{2\cos\varphi}e^{2\imath\varphi}=\frac{r}{2\cos\varphi}\left(\cos(2\varphi)+\imath\sin(2\varphi)\right)$$
$$=\frac{r}{2\cos\varphi}\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2\imath\cos\varphi\sin\varphi\right)=\frac{r^2}{2r\cos\varphi}\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+2\imath\cos\varphi\sin\varphi\right)$$
$$=\frac{1}{2a}\left((r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2+2\imath(r\cos\varphi)(r\sin\varphi)\right)=\frac{1}{2a}\left(a^2-b^2+2\imath ab\right)=\frac{a^2-b^2}{2a}+\imath b$$

إذن للمعادلة حل وحيد و هو : $z=\frac{a^2-b^2}{2a}+\imath b$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل **2.VII**

ملاحظة 47 : ◁ يمكن أيضاً إستعمال االشكل الجبري لإيجاد الحلول : نضع $z = x + \imath y$ و نُذكِّر أنّ $|z| \leq \text{Re}(z)$ أي $x + \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$ و بما أنّ $z \notin \mathbb{R}_-$ فإنّ $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$ منه :

$$z + |z| = a + \imath b \iff x + \sqrt{x^2+y^2} + \imath y = a + \imath b \iff \begin{cases} x + \sqrt{x^2+y^2} = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن، إذا كان $a \leq 0$ فالمعادلة لا تقبل أيّ حلّ (لأنّ $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$) . إذن $a > 0$ منه :

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2+y^2} = a \\ y = b \end{cases} \iff \begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = a^2 \\ y = b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x\overbrace{\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)}^{=a} = a^2 - y^2 \\ y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{a^2-b^2}{2a} \\ y = b \end{cases}$$

و نصل إلى نفس النتيجة : للمعادلة حل وحيد و هو $z = \dfrac{a^2-b^2}{2a} + \imath b$.

▷

الشكل **2.VII** يُبيِّن موضع النقطة $M(z)$ بدلالة موضع النقطة $A(a+\imath b)$ (فاصلتها a موجبة تماماً) . الرباعي ONAM مُعيَّن. بتعبير أدقّ، النقطة $N(|z|)$ هي نقطة تقاطع نصف المستقيم $x \geq 0, y = 0$ مع محور القطعة المستقيمة $[OA]$ و النقطة $M(z)$ هي نظيرة N بالنسبة إلى المستقيم (OA) . علاوةً على ذلك، لدينا :

$$x + \sqrt{x^2+y^2} = a \iff (x-a)^2 = x^2+y^2 \iff y^2 = a^2 - 2ax$$

إذن النقطة $M(z)$ تنتمي إلى المنحنى (قطع مكافئ) الذي معادلته : $y^2 = a^2 - 2ax$.

• 2 لدينا :

$$z - |z| = c + \imath d \iff -z + |z| = -c - \imath d \iff -z + |-z| = -c - \imath d \iff Z + |Z| = a + \imath b$$

حيث $Z = -z$ ، $a = -c$ و $b = -d$.

و حسب السؤال الأول :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- إذا كان $a+\imath b=0$ أي إذا كان $-c-\imath d=0$ أي إذا كان $c=d=0$ فإنّ الحلول هي الأعداد $z\in\mathbb{R}_-$ أي $z\in\mathbb{R}_+$.
مجموعة الحلول هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}_+$ (و $0\in\mathbb{R}_+$).
- إذا كان $a+\imath b\neq 0$ أي إذا كان $-c-\imath d\neq 0$ أي إذا كان $c+\imath d\neq 0$ فإنه ليس للمعادلة أيّ حلّ إذا كان $a\leq 0$ أي إذا كان $c\geq 0$ ؛ و للمعادلة حلّ وحيد إذا كان $a>0$ أي إذا كان $c<0$ و هذا الحل هو $z=\dfrac{a^2-b^2}{2a}+\imath b=\dfrac{c^2-d^2}{-2c}-\imath d$ أي $z=\dfrac{d^2-c^2}{2c}-\imath d$.

■

198 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
لتكن $\mathscr{C}$ الدائرة التي مركزها $\Omega\,(\omega)$ و نصف قطرها r (حيث $r>0$).

1. أثبت أنه مهما تكن النقطة $M\,(z)$ من المستوي فإنّ :
$$M\in\mathscr{C}\iff\exists\theta\in\mathbb{R}\,,\ z=\omega+re^{\imath\theta}$$

2. إستنتج أنه إذا كانت $A\,(a)$ ، $B\,(b)$ ، $C\,(c)$ و $D\,(d)$ نقطاً من $\mathscr{C}$ فإنّ :
$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)\pmod{\pi}$$

3. أثبت أنه مهما تكن النقطة $M\,(z)$ من المستوي فإنّ :
$$M\in\mathscr{C}\iff|z|^2-\omega\bar{z}-\bar{\omega}z+|\omega|^2=r^2$$

الحلّ. 1. لتكن $M\,(z)$ نقطة من المستوي. لدينا :

$$M\in\mathscr{C}\iff\Omega M=r\iff|z-\omega|=r\iff\exists\theta\in\mathbb{R}\,,\ z-\omega=re^{\imath\theta}\iff\exists\theta\in\mathbb{R}\,,\ z=\omega+re^{\imath\theta}$$

2. لتكن $A\,(a)$ ، $B\,(b)$ ، $C\,(c)$ و $D\,(d)$ نقطاً من $\mathscr{C}$. حسب السؤال السابق لدينا :
$$a=\omega+re^{\imath\alpha}\ ،\ b=\omega+re^{\imath\beta}\ ،\ c=\omega+re^{\imath\gamma}\ \text{و}\ d=\omega+re^{\imath\delta}$$
حيث α ، β ، γ و δ أعداد حقيقية. منه :
$$\frac{c-a}{c-b}=\frac{r\left(e^{\imath\gamma}-e^{\imath\alpha}\right)}{r\left(e^{\imath\gamma}-e^{\imath\beta}\right)}=\frac{e^{\imath\gamma}-e^{\imath\alpha}}{e^{\imath\gamma}-e^{\imath\beta}}$$
نضع $\dfrac{c-a}{c-b}=\rho e^{\imath\theta}$ (حيث $\rho>0$) منه : $\rho e^{\imath\theta}=\dfrac{e^{\imath\gamma}-e^{\imath\alpha}}{e^{\imath\gamma}-e^{\imath\beta}}$. بأخذ المرافق في طرفيّ هذه المساواة ينتج :
$$\rho e^{-\imath\theta}=\frac{e^{-\imath\gamma}-e^{-\imath\alpha}}{e^{-\imath\gamma}-e^{-\imath\beta}}=\frac{\frac{1}{e^{\imath\gamma}}-\frac{1}{e^{\imath\alpha}}}{\frac{1}{e^{\imath\gamma}}-\frac{1}{e^{\imath\beta}}}=\frac{e^{\imath\alpha}-e^{\imath\gamma}}{e^{\imath\alpha}\cdot e^{\imath\gamma}}\cdot\frac{e^{\imath\beta}\cdot e^{\imath\gamma}}{e^{\imath\beta}-e^{\imath\gamma}}=\rho r^{\imath\theta}\cdot e^{\imath(\beta-\alpha)}$$
منه $\rho e^{2\imath\theta}=\rho e^{\imath(\alpha-\beta)}$ و بما أنّ $\rho>0$ فإنّ $e^{2\imath\theta}=e^{\imath(\alpha-\beta)}$ منه $2\theta=\alpha-\beta\pmod{2\pi}$ و بقسمة الطرفين على 2 ينتج : $\theta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\pmod{\pi}$ أي $\arg\left(\dfrac{c-a}{c-b}\right)=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\pmod{\pi}$.
نبرهن بالمثل أنّ : $\arg\left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)=\dfrac{\alpha-\beta}{2}\pmod{\pi}$.
في الأخير : $\arg\left(\dfrac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(\dfrac{d-a}{d-b}\right)\pmod{\pi}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 3 لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي. لدينا :

$$M \in \mathscr{C} \iff |z-\omega| = r \iff |z-\omega|^2 = r^2 \iff (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2$$
$$\iff (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = r^2 \iff z\overline{z} - z\overline{\omega} - \omega\overline{z} + \omega\overline{\omega} = r^2$$
$$\iff |z|^2 - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z + |\omega|^2 = r^2$$

■

199 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

• 1 لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوي. أثبت أنّ : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{2}\left(z\overline{z'} + \overline{z}z'\right)$.

• 2 نعتبر النقط $A(a)$ ، $B(b)$ و $M(z)$. أثبت أنّ : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left[(z-a)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{z}-\overline{a})(b-a)\right]$.

• 3 تطبيق :

(ا) ليكن a و b عددين مركبين طويلتهما 1 بحيث $a \neq b$ و لتكن A و B لاحقتيهما على الترتيب. لتكن C نقطة لاحقتها c. نعتبر المستقيم (Δ) المار بالنقطة $C(c)$ و العمودي على المستقيم (AB) . أثبت أنه مهما تكن النقطة $M(z)$ فإنّ :

$$M \in (\Delta) \iff z - ab\overline{z} = c - ab\overline{c}$$

(ب) نعتبر النقط $A(a)$ ، $B(b)$ ، $C(c)$ و $D(d)$ بحيث $|a-b| = |c-d| = 1$. أثبت أنّ :

$$(AB) \perp (CD) \iff (b-a)^2 + (d-c)^2 = 0$$

(ج) نعتبر النقط $A(a)$ ، $B(b)$ و $C(c)$ بحيث $a \neq b$ و $|a| = |b|$. لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB) . أثبت أنّ :

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c - ab\overline{c}}{b-a}\right)$$

الحلّ. • 1 لاحقة $\overrightarrow{OM}$ هي $z - 0 = z$ و لاحقة $\overrightarrow{OM'}$ هي $z' - 0 = z'$ ، و حسب المبرهنة 25 صفحة 53 لدينا :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \text{Re}\left(\overline{z} \cdot z'\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{z} \cdot z' + \overline{\overline{z} \cdot z'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{z} \cdot z' + z \cdot \overline{z'}\right)$$

• 2 يمكن إثبات هذه النتيجة بنفس الطريقة السابقة أو كما يلي : لتكن C النقطة التي تحقق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$ و D النقطة التي تحقق $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OD}$. إذا كانت c لاحقة C و كانت d لاحقة D فإنّ $c - 0 = b - a$ أي $c = b - a$ و $d - 0 = z - a$ أي $d = z - a$ و حسب السؤال السابق :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(c\overline{d} + d\overline{c}\right) = \frac{1}{2}\left[(b-a)\overline{(z-a)} + (z-a)\overline{(b-a)}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(z-a)(\overline{b}-\overline{a}) + (\overline{z}-\overline{a})(b-a)\right]$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

3• (ا) بما أنّ $|a|=|b|=1$ فإنّ $\overline{a}=\frac{1}{a}$ و $\overline{b}=\frac{1}{b}$. لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z . لدينا :

$$M\in(\Delta)\iff \overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=0\iff \frac{1}{2}\left[(z-c)(\overline{b}-\overline{a})+(\overline{z}-\overline{c})(b-a)\right]=0$$
$$\iff (z-c)(\overline{b}-\overline{a})+(\overline{z}-\overline{c})(b-a)=0=\iff (z-c)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+(\overline{z}-\overline{c})(b-a)=0$$
$$\iff \frac{a-b}{ab}\left[z-c-ab(\overline{z}-\overline{c})\right]=0\iff z-c-ab\overline{z}+ab\overline{c}=0$$
$$\iff z-ab\overline{z}=c-ab\overline{c}$$

(ب) بما أنّ $|b-a|=|d-c|=1$ فإنّ $\overline{b-a}=\frac{1}{b-a}$ و $\overline{d-c}=\frac{1}{d-c}$ منه :

$$(AB)\perp(CD)\iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0\iff \frac{1}{2}\left[(b-a)(\overline{d}-\overline{c})+(\overline{b}-\overline{a})(d-c)\right]=0$$
$$\iff (b-a)\overline{(d-c)}+\overline{(b-a)}(d-c)=0\iff \frac{b-a}{d-c}+\frac{d-c}{b-a}=0$$
$$\iff \frac{b-a}{d-c}=-\frac{d-c}{b-a}\iff (b-a)^2=-(d-c)^2$$
$$\iff (b-a)^2+(d-c)^2=0$$

(ج) لتكن h لاحقة H . بما أنّ C تنتمي إلى المستقيم العمودي على (AB) في H فحسب السؤال (3•ا) يكون : $c-ab\overline{c}=h-ab\overline{h}$. و بما أنّ $H\in(AB)$ فإنّ $\overrightarrow{AH}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}\overrightarrow{AB}$ منه $h-a=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}(b-a)$ أي $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{h-a}{b-a}$ و هذا يعني أنّ $\frac{h-a}{b-a}\in\mathbb{R}$ منه $\overline{\left(\frac{h-a}{b-a}\right)}=\frac{h-a}{b-a}$ أي $\frac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{h-a}{b-a}$.

لكن $|a|=|b|=1$ إذن $\overline{a}=\frac{1}{a}$ و $\overline{b}=\frac{1}{b}$ منه $\frac{\overline{h}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}=\frac{\overline{h}-\overline{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=ab\cdot\frac{\overline{h}-\overline{a}}{a-b}$ أي $\frac{h-a}{b-a}=ab\cdot\frac{\overline{h}-\overline{a}}{a-b}$

منه $h-a=-ab(\overline{h}-\overline{a})$ أي $h+ab\overline{h}=a+a\overline{a}b=a+b$ (لأنّ $a\overline{a}=|a|^2=1$) .

في الأخير، لدينا : $c-ab\overline{c}=h-ab\overline{h}$ و $h+ab\overline{h}=a+b$. بجمع هاتين المساوتين طرفاً إلى طرف ينتج : $2h=a+b+c-ab\overline{c}$ منه $(h-a)=\frac{1}{2}(b-a+c-ab\overline{c})$ و بالتالي :

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{1}{2}(b-a+c-ab\overline{c})}{b-a}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{c-ab\overline{c}}{b-a}\right)$$

■

200 في هذا التمرين، a ، b و c ثلاثة أعداد مركبة مختلفة مثنى مثنى. سنفرض أننا لا نعرف أيّ شيء عن المثلثات المتقايسة الأضلاع سوى التعريف التالي :

تعريف : نقول عن المثلث abc أنه :

- مباشر إذا كان الأساس $\left(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac}\right)$ مباشراً أي إذا كان للزاوية $\left(\overrightarrow{ab},\overrightarrow{ac}\right)$ قياس في $]0,\pi[$.
- متقايس الأضلاع إذا كان $|a-b|=|b-c|=|c-a|$.

و هدفنا هو إثبات بعض النتائج المعروفة و المستخدمة (دون إثبات) حول المثلثات المتقايسة الأضلاع.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

ليكن A طويلة و α عمدةً للعدد $\frac{c-a}{b-a}$ بمعنى $\frac{c-a}{b-a} = Ae^{i\alpha}$. بالمثل، نعتبر الأعداد الحقيقية B ، C ، β و γ المعرفة بالعلاقات : $\frac{a-b}{c-b} = Be^{i\beta}$ و $\frac{b-c}{a-c} = Ce^{i\gamma}$.
أخيراً، نضع $j = e^{2i\pi/3}$ (و نُذكّر أنّ $j^3 = 1$ و $1 + j + j^2 = 0$).

1• (ا) أثبت أنّ : $ABC = 1$ و $\alpha + \beta + \gamma = \pi \pmod{2\pi}$. هل يُعتبر هذا إكتشافاً جديداً ؟

(ب) تحقق من أنّ : $Ae^{i\alpha} + \frac{1}{Be^{i\beta}} = 1$ ، $Be^{i\beta} + \frac{1}{Ce^{i\gamma}} = 1$ و $Ce^{i\gamma} + \frac{1}{Ae^{i\alpha}} = 1$.

2• فيما يلي، نُثبت التكافؤ :
المثلث abc متقايس الأضلاع $\iff$ للزوايا $\left(\vec{ab}, \vec{ac}\right)$ ، $\left(\vec{bc}, \vec{ba}\right)$ و $\left(\vec{ca}, \vec{cb}\right)$ نفس القياس بتردد 2π

(ا) نفرض أنّ المثلث abc متقايس الأضلاع.

(i) أثبت أنّ : $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$.

(ii) ماذا تستنتج ؟

(ب) نفرض أنه للزوايا $\left(\vec{ab}, \vec{ac}\right)$ ، $\left(\vec{bc}, \vec{ba}\right)$ و $\left(\vec{ca}, \vec{cb}\right)$ نفس القياس بتردد 2π

(i) أثبت أنّ α يساوي $-\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{\pi}{3}$ أو π بتردد 2π .

(ii) أثبت أنه بالضرورة $\alpha \neq \pi \pmod{2\pi}$.

(iii) إستنتج أنّ : $A \cdot B = B \cdot C = C \cdot A = 1$. ماذا يمكن إستخلاصه ؟

3• (ا) أثبت التكافؤ : المثلث abc متقايس الأضلاع و مباشر $\iff$ $a - b = e^{i\pi/3}(c - b)$.

(ب) أثبت التكافؤ : المثلث abc متقايس الأضلاع و مباشر $\iff$ $a + bj + cj^2 = 0$.

الحلّ.

1• (ا) لدينا :

$$(Ae^{i\alpha})\left(Be^{i\beta}\right)\left(Ce^{i\gamma}\right) = ABCe^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = \frac{c-a}{b-a} \times \frac{a-b}{c-b} \times \frac{b-c}{a-c} = -1 = e^{i\pi}$$

منه $ABC = 1$ و $\alpha + \beta + \gamma = \pi \pmod{2\pi}$.

في حالة ما إذا كان $\left(\vec{ab}, \vec{ac}\right) = \alpha \pmod{2\pi}$ ، $\left(\vec{bc}, \vec{ba}\right) = \beta \pmod{2\pi}$ و $\left(\vec{ca}, \vec{cb}\right) = \gamma \pmod{2\pi}$
فهذا يعني أنّ مجموع زوايا (مُوجّهة كما ينبغي في حالتنا هذه) مثلث يساوي π (أي 180°) بتردد 2π و هي نتيجة معروفة.

(ب) بالحساب :

$$Ae^{i\alpha} + \frac{1}{Be^{i\beta}} = \frac{c-a}{b-a} + \frac{c-b}{a-b} = \frac{c-a}{b-a} - \frac{c-b}{b-a} = \frac{c-a-c+b}{b-a} = 1$$

$$Be^{i\beta} + \frac{1}{Ce^{i\gamma}} = \frac{a-b}{c-b} + \frac{a-c}{b-c} = \frac{a-b}{c-b} - \frac{a-c}{c-b} = \frac{a-b-a+c}{c-b} = 1$$

$$Ce^{i\gamma} + \frac{1}{Ae^{i\alpha}} = \frac{b-c}{a-c} + \frac{b-a}{c-a} = \frac{b-c}{a-c} - \frac{b-a}{a-c} = \frac{b-c-b+a}{a-c} = 1$$

2• (ا) (i) المثلث abc متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $A = B = C = 1$ و بالتالي فالمساويات المبرهنة في السؤال (1•ب) تصبح : $e^{i\alpha} + e^{-i\beta} = 1$ ، $e^{i\beta} + e^{-i\gamma} = 1$ و $e^{i\gamma} + e^{-i\alpha} = 1$.

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بأخذ الجزء الحقيقي لطرفي كل مساواة من هذه المساويات ينتج :

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = 1 \\ \cos\beta + \cos\gamma = 1 \\ \cos\gamma + \cos\alpha = 1 \end{cases}$$

بطرح المعادلة الثانية من الأولى نجد $\cos\alpha - \cos\gamma = 0$ ،
و بطرح المعادلة الثالثة من الثانية نجد $\cos\beta - \cos\alpha = 0$ منه $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$.

(ii) بأخذ الجزء التخيلي للمساويات السابقة نجد :
$\sin\alpha - \sin\beta = 0$ ، $\sin\beta - \sin\gamma = 0$ و $\sin\gamma - \sin\alpha = 0$ أي $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$.
من هذه النتيجة و نتيجة السؤال (i) السابق نستنتج أنّ : $\alpha = \beta = \gamma \pmod{2\pi}$ (لأنّ لها نفس الجيب sin ، و نفس جيب التمام cos) و هو المطلوب.
[لأنّ، بالتعريف :
$\left(\vec{ab}, \vec{ac}\right) = \alpha \pmod{2\pi}$ ، $\left(\vec{bc}, \vec{ba}\right) = \beta \pmod{2\pi}$ و $\left(\vec{ca}, \vec{cb}\right) = \gamma \pmod{2\pi}$.]

(ب) (i) لدينا فرضاً : $\alpha = \beta = \gamma \pmod{2\pi}$ و حسب السؤال الأول : $\alpha + \beta + \gamma = \pi \pmod{2\pi}$ منه
$3\alpha = 3\beta = 3\gamma = \pi \pmod{2\pi}$ أي $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3} \left(\bmod \frac{\pi}{3}\right)$.
بترديد 2π هذا يعني أنّ α ، β و γ تساوي كلها $-\frac{\pi}{3}$ أو $\frac{\pi}{3}$ أو π .

(ii) إذا كان $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$ فإنّ $\beta = \pi \pmod{2\pi}$ أيضاً منه :

$$1 = Ae^{i\alpha} + \frac{1}{Be^{i\beta}} = -A - \frac{1}{B} = -\left(A + \frac{1}{B}\right) \leq 0$$

و هذا تناقض، إذن لا يمكن أن يكون $\alpha = \pi \pmod{2\pi}$.

(iii) بأخذ الجزء التخيلي للمساويات المبرهنة في السؤال (1•ب) نجد :

$$\left(A - \frac{1}{B}\right)\sin\alpha = \left(B - \frac{1}{C}\right)\sin\alpha = \left(C - \frac{1}{A}\right)\sin\alpha = 0$$

لكن حسب السؤالين (i) و (ii) السابقين فإنّ $\sin\alpha \neq 0$ منه $A - \frac{1}{B} = B - \frac{1}{C} = C - \frac{1}{A} = 0$ منه
$AB = BC = CA = 1$. لكن ABC إذن $A = B = C = 1$ أي $|a-b| = |b-c| = |c-a|$ و
حسب التعريف، فالمثلث abc متقايس الأضلاع.

3• (أ) نفرض أنّ المثلث abc متقايس الأضلاع و مباشر. إذن فللزاوية $\left(\vec{bc}, \vec{ba}\right)$ ، و التي تساوي β بترديد 2π ، قياس في المجال $]0, \pi]$. و حسب نتيجة السؤالين (i) و (ii) فإنّ هذا القياس هو $\beta = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. من جهة أخرى، و بما أنّ $|a-b| = |c-b|$ (لأنّ المثلث abc متقايس الأضلاع)، فإنّ $B = \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1$ منه
$\frac{a-b}{c-b} = Be^{\beta} = e^{i\pi/3}$.

بالعكس، إذا فرضنا أنّ $\frac{a-b}{c-b} = e^{i\pi/3}$ فهذا يعني أنّ $\left(\vec{bc}, \vec{ba}\right) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ (أي أنّ المثلث abc مباشر) و أنّ $|a-b| = |c-b|$. لكن
$\frac{a-c}{c-b} = \frac{(a-b)+(b-c)}{c-b} = \frac{a-b}{c-b} + \frac{b-c}{c-b} = e^{i\pi/3} - 1$
و

$$\left|\frac{a-c}{c-b}\right| = \left|e^{i\pi/3} - 1\right| = \left|e^{i\pi/6}\left(e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6}\right)\right| = \left|2ie^{i\pi/6}\sin\frac{\pi}{6}\right| = 1$$

منه $|b-c| = |c-a|$ أي المثلث abc متقايس الأضلاع و مباشر.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

(ب) بتطبيق النتيجة السابقة و العلاقتين $e^{\imath\pi/3} = -j^2$ و $1 + j + j^2 = 0$ نجد :

$$\begin{aligned} \text{المثلث abc متقايس الأضلاع و مباشر} &\iff a - b = e^{\imath\pi/3}(c - b) \\ &\iff a - b = -j^2(c - b) \\ &\iff a + (-1 - j^2)b + cj^2 = 0 \\ &\iff a + bj + cj^2 = 0 \end{aligned}$$

■

201 ما هو الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن تحققه الأعداد المركبة a ، b ، c لواحق النقط A ، B ، C على الترتيب حتى يكون المثلث ABC متقايس الأضلاع ؟ أنظر التمرين 202 صفحة 290

الحلّ. بدايةً، نُذكِّر أنّ :

$$1 + j + j^2 = 0\,, \quad j^3 = 1$$
$$e^{\imath\pi/3} = e^{\imath\pi/3 + 2\imath\pi} = e^{\imath\pi + 4\imath\pi/3} = e^{\imath\pi}\left(e^{2\imath\pi/3}\right)^2 = -j^2$$
$$e^{-\imath\pi/3} = e^{-\imath\pi/3 + 2\imath\pi} = e^{\imath\pi - 2\imath\pi/3} = e^{\imath\pi} \cdot e^{2\imath\pi/3} = -j$$

نُميّز حالتين : المثلث ABC مباشر أو غير مباشر.

- المثلث ABC متقايس الأضلاع و مباشر إذا و فقط إذا كان BA صورة BC بالدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{3}$ أي إذا و فقط إذا كان $a - b = e^{\imath\pi/3}(c - b)$ أي إذا و فقط إذا كان $a - b = -j^2(c - b)$ أي إذا و فقط إذا كان $a - (1 + j^2)b + j^2c = 0$ أي إذا و فقط إذا كان $a + bj + cj^2 = 0$.
- المثلث ABC متقايس الأضلاع و غير مباشر إذا و فقط إذا كان BA صورة BC بالدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ أي إذا و فقط إذا كان $a - b = e^{-\imath\pi/3}(c - b)$ أي إذا و فقط إذا كان $a - b = -j(c - b)$ أي إذا و فقط إذا كان $a - (1 + j)b + jc = 0$ أي إذا و فقط إذا كان $a + bj^2 + cj = 0$.

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $a + bj + cj^2 = 0$ أو $a + bj^2 + cj = 0$ أي إذا و فقط إذا كان $\left(a + bj + cj^2\right)\left(a + bj^2 + cj\right) = 0$. لكن :

$$\begin{aligned} \left(a + bj + cj^2\right)\left(a + bj^2 + cj\right) &= a^2 + b^2 + c^2 + j(ab + ac + bc) + j^2(ab + ac + bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + \left(j + j^2\right)j(ab + ac + bc) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) \end{aligned}$$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$ أي إذا و فقط إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

■

202 لتكن A ، B و C ثلاثة نقط من المستوي مختلفة مثنى مثنى ، لواحقها a ، b و c على الترتيب.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

نضع $j = e^{2i\pi/3}$ و نُذكّر أنّ $j^3 = 1$ و $1 + j + j^2 = 0$. أثبت أنّ :

ABC متقايس الأضلاع $\iff$ $az^2 + bz + c = 0$ حلّ للمعادلة j أو j^2

$\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

$\iff (b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$

$\iff \dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b} = 0$

أنظر التمرين 201 صفحة 290

الحلّ. لدينا :

ABC متقايس الأضلاع $\iff$ $C = \mathscr{R}_{A,\pi/3}(B)$ أو $C = \mathscr{R}_{A,-\pi/3}(B)$

$\iff c - a = \left(-j^2\right)(b-a)$ أو $c - a = (-j)(b-a)$

$\iff \left(-1-j^2\right)a + j^2 b + c = 0$ أو $(-1-j)a + jb + c = 0$

$\iff ja + j^2 b + c = 0$ أو $j^2 + jb + c = 0$

$\iff \left(j^2\right)^2 a + j^2 b + c = 0$ أو $j^2 a + jb + c = 0$

$\iff az^2 + bz + c = 0$ حلّ للمعادلة j أو j^2

منه :

ABC متقايس الأضلاع $\iff$ $ja + j^2 + c = 0$ أو $j^2 + jb + c = 0$

$\iff \left(ja + j^2 b + c\right)\left(j^2 + jb + c\right) = 0$

$\iff a^2 + b^2 + c^2 + \left(j + j^2\right)(ab + ac + bc) = 0$

$\iff a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$

$\iff a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

منه :

ABC متقايس الأضلاع $\iff$ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$

$\iff 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$

$\iff b^2 - 2ab + a^2 + c^2 - 2bc + b^2 + a^2 - 2ac + c^2 = 0$

$\iff (b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$

و أيضاً :

ABC متقايس الأضلاع $\iff$ $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$

$\iff -a^2 + ab + ac - bc - b^2 + bc + ba - ac - c^2 + ca + cb - ab = 0$

$\iff (c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) = 0$

$\iff \dfrac{(c-a)(a-b) + (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$\iff \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0$$

ملاحظة 48 : ◁ في التكافؤ الأخير، من الأسهل الإنطلاق من $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0$ ثم نُوحِّد المقامات و نُبسِّط الحسابات حتّى نصل إلى $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$. ▷

■

203 ☼

نضع :

$$S=\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\cdots\ ,\quad T=\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\binom{n}{7}+\cdots\ ,\quad U=\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\binom{n}{8}+\cdots$$

• 1 أثبت أنّ : $1+j+j^2=0$.

• 2 باستعمال دستور ثنائي الحد، أثبت أنّ :
$$\begin{cases} S+T+U=(1+1)^n \\ S+jT+j^2U=(1+j)^n \\ S+j^2T+jU=\left(1+j^2\right)^n \end{cases}$$

• 3 إستنتج قيمة كل من S ، T و U .

أنظر التمرين 215 صفحة 306

الحلّ.

• 1 نعلم أنّ $j^3=1$ أي $\left(1+j+j^2\right)(j-1)=0$ و بما أنّ $j\neq 1$ فإنّ : $1+j+j^2=0$.

• 2 نستعمل دستور ثنائي الحد لنشر $(1+x)^2$ مع $x=1$ ، $x=j$ و $x=j^2$:

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}+\cdots=S+T+U$$

$$\begin{aligned}(1+j)^n&=\binom{n}{0}+j\binom{n}{1}+j^2\binom{n}{2}+j^3\binom{n}{3}+j^4\binom{n}{4}+j^5\binom{n}{5}+\cdots\\&=\binom{n}{0}+j\binom{n}{1}+j^2\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+j\binom{n}{4}+j^2\binom{n}{5}+\cdots\\&=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\cdots\right]+j\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\cdots\right]+j^2\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\cdots\right]\\&=S+jT+j^2U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(1+j^2\right)^n&=\binom{n}{0}+j^2\binom{n}{1}+j^4\binom{n}{2}+j^4\binom{n}{3}+j^8\binom{n}{4}+j^{10}\binom{n}{5}+\cdots\\&=\binom{n}{0}+j^2\binom{n}{1}+j\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+j^2\binom{n}{4}+j\binom{n}{5}+\cdots\\&=\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\cdots\right]+j^2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{4}+\cdots\right]+j\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{5}+\cdots\right]\\&=S+j^2T+jU\end{aligned}$$

• 3 نُطبِّق نتيجة التمرين 14 صفحة 80 مع :

$$a=(1+1)^n=2^n\ ،\quad b=(1+j)^n=\left(-j^2\right)^n\quad و\quad c=\left(1+j^2\right)^n=(-j)^n$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

و نُذكِّر أنّ $j^2 = \bar{j}$ و $-j = e^{i\pi} \cdot e^{2i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$ فيكون :

$$S = \frac{1}{3}[a+b+c] = \frac{1}{3}\left[2^n + \left(-j^2\right)^n + (-j)^n\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + \left(-\bar{j}\right)^n + (-j)^n\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\mathrm{Re}\left((-j)^n\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{-ni\pi/3}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos n\frac{\pi}{3}\right)$$
$$T = \frac{1}{3}\left[a+bj^2+cj\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + j^2\left(-j^2\right)^n + j(-j)^n\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + \bar{j}\left(-\bar{j}\right)^n + j(-j)^n\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\mathrm{Re}\left(j(-j)^n\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{2i\pi/3}e^{-ni\pi/3}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(-\frac{(n-2)\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$$
$$U = \frac{1}{3}\left[a+bj+cj^2\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + j\left(-j^2\right)^n + j^2(-j)^n\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + \bar{j}^2\left(-\bar{j}\right)^n + j^2(-j)^n\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\mathrm{Re}\left(j^2(-j)^n\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{4i\pi/3}e^{-ni\pi/3}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\left(-\frac{(n-4)\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$$

■

204

ABC مثلث مباشر.
DBA مثلث مباشر،متساوي الساقين و قائم في D.
ACE مثلث مباشر، متساوي الساقين و قائم في E.
نُنشئ النقطة L بحيث $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB}$.

1. أرسم الشكل.
2. أثبت أنّ المثلث EDL مباشر، متساوي الساقين و قائم في E.

الحلّ. 1. **الشكل** : لإنشاء المثلث المباشر، القائم في D و المتساوي الساقين DBA، نُنشئ (نحو الجهة الخارجية) المربع الذي أحد أضلاعه AB، فتكون نقطة تقاطع قُطريه هي الرأس D .

نُنشئ بنفس الطريقة المثلث ACE .

لإنشاء النقطة L، نُنشئ متوازي الأضلاع DBLC كما يلي : نُنشئ النقطة I منتصف القطعة [BC] ثمّ نصف المستقيم [DI) . النقطة I هي أيضاً منتصف القطعة [DL] .

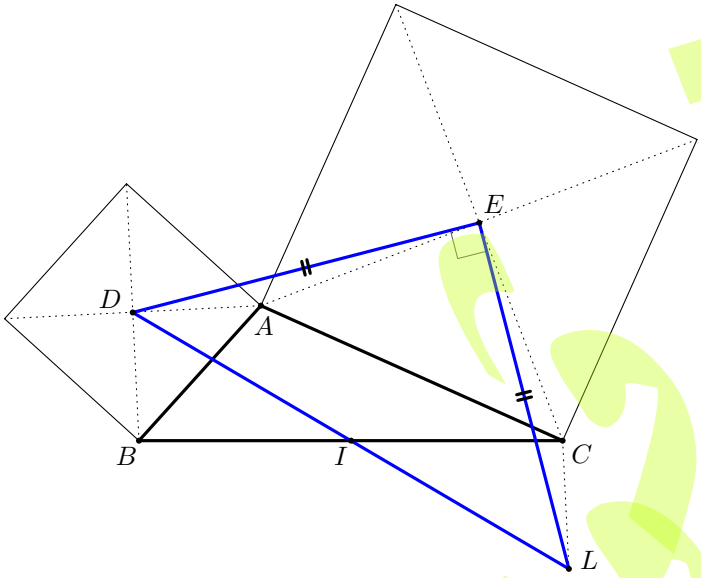
أنظر الشكل VII.3 .

2. ننسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. لتكن a، b، c، d و e و ℓ لواحق النقط A، B، C، D، E و L على الترتيب.

بما أنّ A هي صورة B بالدوران $\mathscr{R}\left(D, \frac{\pi}{2}\right)$ فإنّ : $a - d = i(b-d)$ (نُذكر أنّ $e^{i\pi/2} = i$).

بالمثل في المثلث ACE : $c - e = i(a-e)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.3

و بما أنّ L هي صورة C بالإنسحاب ذي الشعاع $\overrightarrow{DB}$ فإنّ : $\ell - c = b - d$ أي $\ell = c + b - d$.

لإثبات أنّ المثلث EDL مباشر، متساوي الساقين و قائم في E يكفي أن نُثبت أنّ النقطة L هي صورة D بالدوران $\mathscr{R}'\left(E, \frac{\pi}{2}\right)$ أي أنّ $\ell - e = \imath(d - e)$.

لكن :

$$\ell - e = (c + b - d) - e = c - e + b - d = \imath(a - e) - \imath(a - d) = \imath(d - e)$$

نستنتج أنّ المثلث EDL مباشر، متساوي الساقين و قائم في E .

■

205

ABCD رباعي كيفي و مباشر . نُنشئ، نحو الجهة الخارجية لهذا الرباعي، المربعات التي مراكزها P ، Q ، R و S أحد أضلاعها [AB] ، [BC] ، [CD] ، [DA] على الترتيب. (شكل VII.4)

الهدف من التمرين هو إثبات أنّ قُطرَي الرباعي PQRS متعامدان و لهما نفس الطول.

ننسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. لتكن a، b، c، d، p، q، r و s لواحق النقط A، B، C، D، P، Q، R و S على الترتيب.

1• أثبت أنه في المربع المرسوم على [AB] لدينا : $p = \frac{a - \imath b}{1 - \imath}$.

أوجد عبارة مشابهة لكل من q، r و s باستعمال المربعات الثلاثة الأخرى.

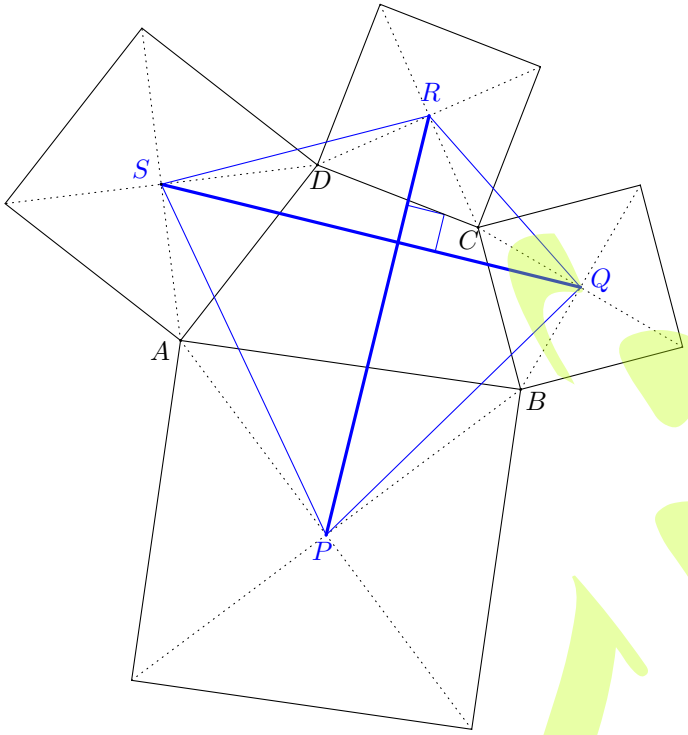
2• أحسب : $\frac{s - q}{r - p}$. ماذا تستنتج ؟

الحلّ. 1• بما أنّ الرباعي ABCD مباشر و P مركز المثلث المرسوم خارجياً على [AB] فإنّ A هي صورة B بالدوران $\mathscr{R}\left(P, \frac{\pi}{2}\right)$ منه $a - p = \imath(b - p)$ أي $a - \imath b = p - \imath p$ منه $p = \frac{a - \imath b}{1 - \imath}$.

بالمثل : $q = \frac{b - \imath c}{1 - \imath}$ ، $r = \frac{c - \imath d}{1 - \imath}$ و $s = \frac{d - \imath a}{1 - \imath}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VII.4

• 2 مما سبق نستنتج أنّ :

$$\frac{s-q}{r-p}=\frac{d-b+\imath(c-a)}{c-a+\imath(b-d)}=\frac{\imath[-\imath(d-b)+c-a]}{c-a+\imath(b-d)}=\imath$$

هذا يُثبت أنّ المستقيمين (PR) و (QS) متعامدان. و بما أنّ $\left|\frac{s-q}{r-p}\right|=|\imath|=1$ فإنّ PR = QS أي :

قُطرا الرباعي PQRS متعامدان و لهما نفس الطول.

ملاحظة 49 : هذه النتيجة تُعرف باسم «نظرية **فون أوبل**»(Théorème de Von Aubel) .

■

206 ABCD متوازي أضلاع . نُنشئ على الضلعين BC و CD ، نحو الجهة الخارجية، المثلثين BCE و CDF المتقايسين الأضلاع. أثبت أنّ المثلث AEF متقايس الأضلاع.

الحلّ. نضع $j=e^{2\imath\pi/3}$ و نذكّر أنّ : $j^3=1$ و $1+j+j^2=0$.

لتكن a ، b ، c ، d ، e و f لواحق النقط A ، B ، C ، D ، E و F على الترتيب.

بما أنّ ABCD متوازي أضلاع فإنّ $b-a=c-d$ أي $a+c=b+d$.

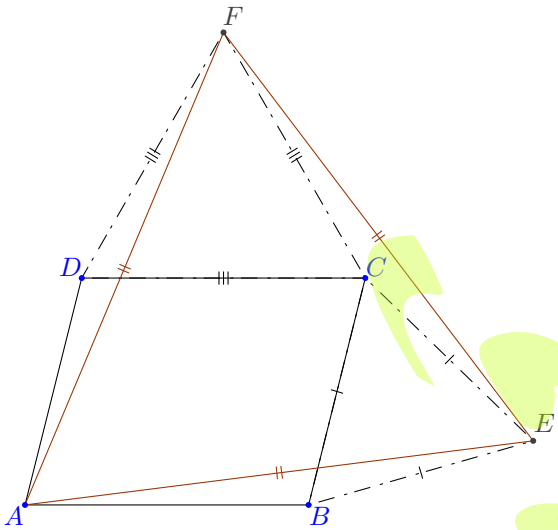
المثلث BCE متقايس الأضلاع و غير مباشر إذن E هي صورة C بالدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ أي

منه : $e-b=e^{-\imath\pi/3}(c-b)=-j(c-b)$

$$e=b-j(c-b)=(1+j)b-jc=-j^2b-jc$$

بالمثل CDF متقايس الأضلاع و غير مباشر إذن F هي صورة D بالدوران الذي مركزه C و زاويته $-\frac{\pi}{3}$ منه $f=-j^2c-jd$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل **5.VII**

حتى نبرهن أنّ المثلث AEF متقايس الأضلاع، يكفي أن نبرهن أنّ $f+ja+j^2e=0$ (و في هذه الحالة AEF مباشر) أو $f+j^2a+je=0$ (و في هذه الحالة AEF غير مباشر) و هذا حسب التمرين 201 صفحة 290.
لكن نلاحظ على الشكل **5.VII** أنّ AEF مباشر إذن يكفي أن نبرهن أنّ : $f+ja+j^2e=0$. لدينا :

$$f+ja+j^2e=\left(-j^2c-jd\right)+ja+j^2\left(-j^2b-jc\right)=-j^2c-jd+ja-j^4b-j^3c$$
$$=ja-jb-\left(1+j^2\right)c-jd=ja-jb+jc-jd=j(a-b+c-d)=0$$

(لأنّ $a+c=b+d$) إذن المثلث AEF متقايس الأضلاع (و مباشر).

■

207 ☼ ABC مثلث. نُنشئ المربع غير المباشر ABDE و المربع المباشر ACFG . ليكن M منتصف القطعة [BC].
أثبت أنّ : $(EG)\perp(AM)$. (شكل **6.VII**).

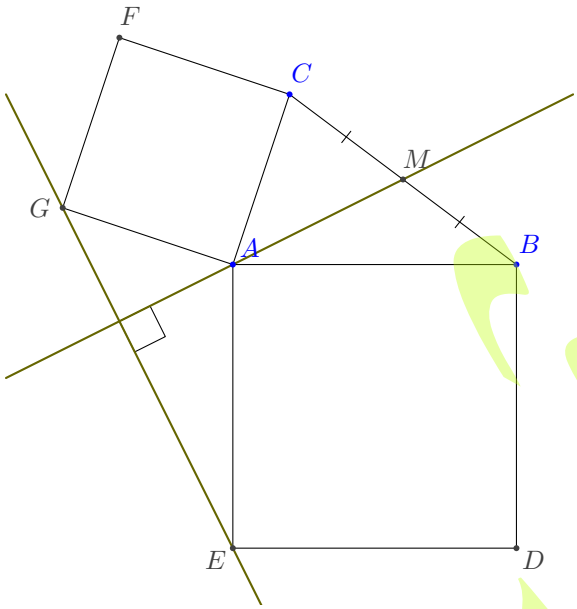
الحلّ. لتكن a ، b ، c ، d ، e ، f ، g و m لواحق النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ، G و M على الترتيب.
بما أنّ M منتصف القطعة [BC] فإنّ $m=\dfrac{b+c}{2}$.
المربع ABDE غير مباشر إذن الشعاع $\overrightarrow{AE}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ أي $e-a=e^{-i\pi/2}(b-a)$ منه $e=a-i(b-a)$.
المربع ACFG مباشر إذن الشعاع $\overrightarrow{AG}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{AC}$ بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ أي $g-a=e^{i\pi/2}(c-a)$ منه $g=a+i(c-a)$. منه :

$$g-e=(a+i(c-a))-(a-i(b-a))=i(c+b-2a)=2i\left(\frac{b+c}{2}-a\right)$$
$$=2i(m-a)=2e^{i\pi/2}(m-a)$$

و هذا يعني أنّ الشعاع $\overrightarrow{GE}$ هو صورة الشعاع $\overrightarrow{MA}$ بتشابه مباشر (نسبته 2 و) زاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ، و بالتالي $(GE)\perp(MA)$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.6

208

ABC مثلث (كيفي) مباشر. نُنشئ، نحو الجهة الخارجية لهذا المثلث، المربعات التي مراكزها P ، Q و R و أحد أضلاعها [AB] ، [BC] و [CA] على الترتيب. (شكل VII.7)

ننسب المستوي إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لتكن a، b، c، p، q و r لواحق النقط A، B، C، P، Q و R على الترتيب.

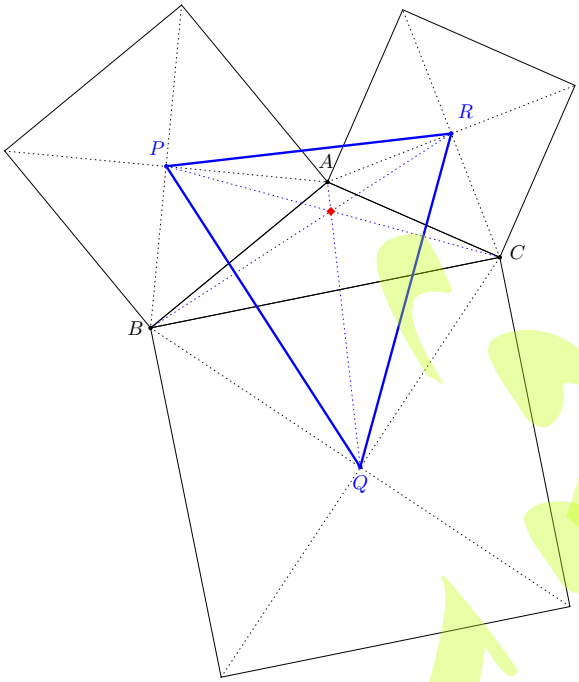
1. أثبت أنّ المثلثين ABC و PQR لهما نفس مركز الثقل.
2. أثبت أنه في المربع المرسوم على [AB] لدينا : $p=\frac{a-\imath b}{1-\imath}$.
   أوجد عبارة مشابهة لكل من q و r باستعمال المربعين الآخرين.
3. أثبت أنّ المستقيمين (AQ) و (PR) متعامدان.

إستنتج أنّ المستقيمات (AQ) ، (BR) و (CP) متقاطعة في نقطة واحدة (تُدعى **نقطة فِكتِن** — Point de Vecten).

الحلّ.

1. بما أنّ A هي صورة B بالدوران $\mathscr{R}\left(P,\frac{\pi}{2}\right)$ فإنّ : $a-p=\imath(b-p)$.
   بالمثل : $b-q=\imath(c-q)$ و $c-r=\imath(a-r)$.
   بجمع هذه المساويات طرفاً إلى طرف ينتج :
   $$a+b+c-(p+q+r)=\imath(a+b+c-(p+q+r))$$
   أي : $a+b+c=p+q+r$ منه $\frac{a+b+c}{3}=\frac{p+q+r}{3}$ و هذا يعني أنّه للمثلثين ABC و PQR نفس مركز الثقل.
2. من المساواة $a-p=\imath(b-p)$ نستنتج أنّ $p=\frac{a-\imath b}{1-\imath}$.
   بالمثل : $q=\frac{b-\imath c}{1-\imath}$ و $r=\frac{c-\imath a}{1-\imath}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل 7.VII

• 3 لدينا : $\iota = \dfrac{c-a+\iota(b-a)}{b-a+\iota(a-c)}$. نستنتج أنّ المستقيمين (PR) و (AQ) متعامدان أي أنّ :

(AQ) هو العمود النازل من A في المثلث PQR

باتباع نفس الطريقة نُثبت أنّ (BR) و (CP) هما العمودين الآخرين في المثلث PQR . و بما أنّ أعمدة أيِّ مثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي (مركز ثقل هذا المثلث) فإنّ :

المستقيمات (AQ) ، (BR) و (CP) متقاطعة في نقطة واحدة

■

209 المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الأوّل : خصوصيات المثلث المتقايس الأضلاع

نضع $j = e^{\frac{2\iota\pi}{3}}$ و لتكن U ، V و W ثلاثة نقط من المستوي لواحقها u ، v و w على الترتيب.

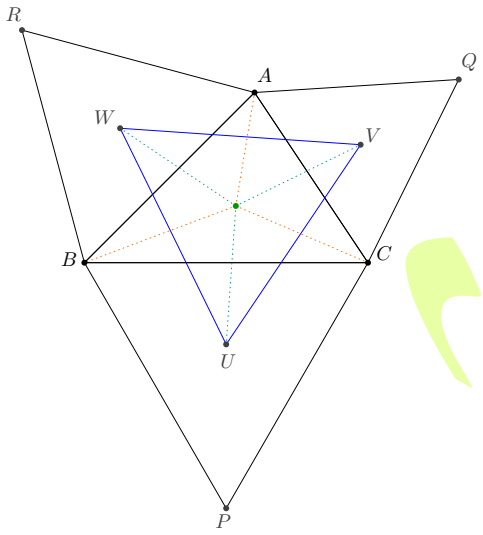
• 1 أثبت أنّ : UVW متقايس الأضلاع و مباشر $\iff u - v = -j^2(w-v)$.

• 2 أثبت أنّ : UVW متقايس الأضلاع و مباشر $\iff u + jv + j^2w = 0$.

الجزء الثاني : نظرية **نابوليون** (Théorème de Napoléon)

ABC مثلث (كيفي) مباشر. نُنشئ، النقط P ، Q و R بحيث تكون المثلثات BPC ، CQA و ARB متقايسة الأضلاع و مباشرة. لتكن U ، V و W مراكز ثقل BPC ، CQA و ARB على الترتيب.
برهن أنّ المثلث UVW متقايس الأضلاع و له نفس مركز الثقل مع ABC .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.8

الحلّ.

الجزء الأوّل : خصوصيات المثلث المتقايس الأضلاع

- 1 إذا كان المثلث UVW متقايس الأضلاع و مباشراً فإنّ U هي صورة W بالدوران $\mathscr{R}\left(V, \frac{\pi}{3}\right)$ أي : $u - v = e^{i\pi/3}(w - v)$.
لكن : $e^{i\pi/3} = e^{i\pi}e^{-2i\pi/3} = -e^{-2i\pi/3} = -e^{4i\pi/3} = -j^2$ منه $u - v = -j^2(w - v)$.
بالعكس، إذا كان $u - v = -j^2(w - v) = e^{i\pi/3}(w - v)$ فإنّ U هي صورة W بالدوران $\mathscr{R}\left(V, \frac{\pi}{3}\right)$ أي أنّ المثلث UVW متقايس الأضلاع و مباشر.

- 2 إذا كان المثلث UVW متقايس الأضلاع و مباشراً فحسب ما سبق لدينا :
$u - v = -j^2(w - v)$ أي $u + \left(-1 - j^2\right)v + j^2w = 0$.
لكن $1 + j + j^2 = 0$ أي $-1 - j^2 = j$ منه $u + jv + j^2w = 0$.
بالعكس، إذا كان $u + jv + j^2w = 0$ فإنّ $u + \left(-1 - j^2\right)v + j^2w = 0$ أي $u - v = -j^2(w - v)$، و حسب السؤال الأوّل فإنّ المثلث UVW متقايس الأضلاع و مباشر.

الجزء الثاني : إثبات نظرية **نابوليون**

فرضاً لدينا :

$$a - w = j(b - w) \quad (3)$$
$$b - u = j(c - u) \quad (4)$$
$$c - v = j(a - v) \quad (5)$$

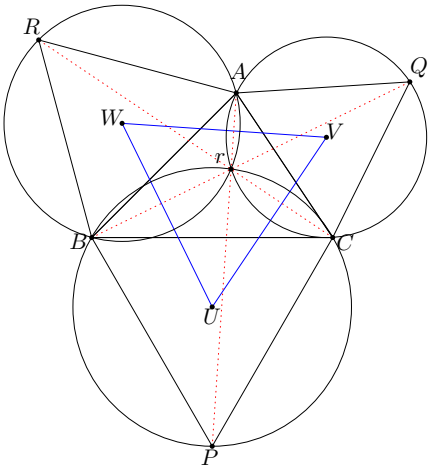
بجمع هذه المساويات طرفاً إلى طرف ينتج : $a + b + c - (u + v + w) = j(a + b + c - (u + v + w))$
منه $a + b + c = u + v + w$ و هذا يعني أنّ المثلث UVW له نفس مركز الثقل مع المثلث ABC.
من المعادلة (3) نستنتج أنّ : $w = \frac{a - jb}{1 - j}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بالمثل مع (4) و (5) : $u=\dfrac{b-jc}{1-j}$ و $v=\dfrac{c-ja}{1-j}$ ؛ منه :

$$u+jv+j^2w=\frac{a-jb+j(b-jc)+j^2(c-ja)}{1-j}=\frac{a-jb+jb-j^2c+j^2c-a}{1-j}=0$$

و حسب الجزء الأوّل من التمرين فإنّ المثلث UVW متقايس الأضلاع و مباشر.



ملاحظة 50 : ◁ يمكن إثبات أنّ المستقيمات (AP)، (BQ) و (CR) تتقاطع في نقطة واحدة T تُدعى **نقطة طوريتشلي** (Point de Torricelli). لهذه النقطة عدة خواص منها : النقطة T هي نقطة تقاطع الدوائر المحيطة بالمثلثات ABR ، ACQ و BCP ؛ هي أيضاً النقطة التي تجعل المسافة $MA+MB+MC$ أصغر ما يمكن (عندما تكون زوايا المثلث أصغر من $120°$) — كما في الشكل المقابل. ▷

■

210 المستوي $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد متجانس و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j})$.

لتكن A ، B و C ثلاثة نقط من $\mathscr{P}$ لواحقها a ، b و c على الترتيب بحيث $|a|=|b|=|c|$.

أثبت أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا و فقط إذا كان $a+b+c=0$. أنظر التمرين 195 صفحة 280

الحلّ. نضع $R=|a|=|b|=|c|$ ، $a=Re^{i\alpha}$ ، $b=Re^{i\beta}$ و $c=Re^{i\gamma}$.

• 1 إذا كان $a+b+c=0$ فإنّ $Re^{i\alpha}+Re^{i\beta}+Re^{i\gamma}=0$ منه $1+e^{i(\beta-\alpha)}+e^{i(\gamma-\alpha)}=0$ و بالمساواة بين الأجزاء التخيلية فإنّ $\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\alpha)=0$ أي :

$\beta-\alpha=-(\gamma-\alpha)\ (\text{mod } 2\pi)$ أو $\beta-\alpha=\pi-(-(\gamma-\alpha))\ (\text{mod } 2\pi)$.

- إذا كان $\beta-\alpha=-(\gamma-\alpha)\ (\text{mod } 2\pi)$ فبالمساواة بين الأجزاء الحقيقية ينتج :

$1+\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=0$. لكن : $\beta-\alpha=-(\gamma-\alpha)\ (\text{mod } 2\pi)$ منه :

$1+2\cos(\gamma-\alpha)=0$ أي $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\gamma-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$.

- إذا كان $\beta-\alpha=\pi+(\gamma-\alpha)\ (\text{mod } 2\pi)$ فإنّ $1+\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=0$ منه $1+\cos(\beta-\alpha)-\cos(\beta-\alpha)=0$ أي $1=0$؛ إذن لا يمكن أن يكون $\beta-\alpha=-(\gamma-\alpha)\ (\text{mod } 2\pi)$.

في الأخير، $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\gamma)=-\dfrac{1}{2}$ أي $\beta-\alpha=\alpha-\gamma=\pm\dfrac{2\pi}{3}$ منه :

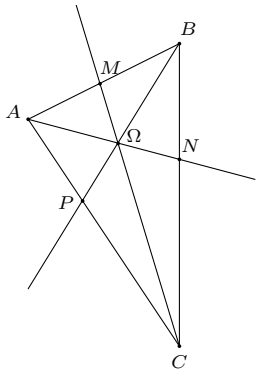
$(c=j^2a$ و $b=ja)$ أو $(c=ja$ و $b=j^2a)$.

و هذا يعني أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

• 2 نفرض أنّ ABC متقايس الأضلاع .

من المساواة $|c-0|=|b-0|=|a-0|$ نستنتج أنّ النقط A ، B و C متساوية المسافة عن النقطة O ، مبدأ المعلم، أي أنّ O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.9

و بما أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع فإنّ O هي أيضاً مركز ثقل هذا المثلث منه $\frac{1}{3}(a+b+c)=0$ أي $a+b+c=0$.

■

211 المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط $A(a)$ ، $B(b)$ ، $C(c)$ ، $M(z)$ ، $N(u)$ و $P(v)$ بحيث تمثّل النقط M ، N و P نقط تقاطع المنصفات الداخلية لزوايا المثلث ABC مع [AB] ، [BC] و [AC] على الترتيب (شكل VII.9) .

نضع $\alpha=BC$ ، $\beta=AC$ و $\gamma=AB$.

1. أثبت أنّ : $u=\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c$.
2. ليكن $\Omega(\omega)$ مركز الدائرة التي تمس داخلياً أضلاع المثلث ABC . أثبت أنّ : $\omega=\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}$.
3. بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع إذا و فقط كان : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

أنظر التمرين 212 صفحة 302

الحلّ.

1. بما أنّ $N\in[BC]$ فإنّ $\overrightarrow{BN}=\frac{BN}{BC}\overrightarrow{BC}$. لكن N هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي للزاوية $\hat{A}$ مع القطعة المستقيمة [BC] إذن $\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC}$ أي $BN=\frac{AB}{AC}CN$.

و بما أنّ $BC=BN+NC$ فإنّ $BC=\frac{AB}{AC}CN+CN=\frac{AB+AC}{AC}CN$

منه $BN=\frac{AC}{AB+AC}BC=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}BC$. لكن الشعاعين $\overrightarrow{BN}$ و $\overrightarrow{BC}$ متوازيان و لهما نفس الإتجاه

إذن $\overrightarrow{BN}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}$ أي $u-b=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}(c-b)$ منه : $u=\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c$.

2. بما أنّ مركز الدائرة التي تمس داخلياً أضلاع مثلث هي نقطة تقاطع المنصفات الداخلية لزواياه فإنّ $\Omega\in[AN]$ منه $\overrightarrow{A\Omega}=\frac{A\Omega}{AN}\overrightarrow{AN}$. لكن $(C\Omega)$ هو المنصف الداخلي للزاوية $\hat{C}$ في المثلث ACN إذن $\frac{A\Omega}{N\Omega}=\frac{CA}{CN}$ أي

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

منه $AN = A\Omega + \frac{CN}{AC}A\Omega = \frac{CA+CN}{CA}A\Omega$ فإنّ $AN = A\Omega + \Omega N$. و بما أنّ $N\Omega = \frac{CN}{CA}A\Omega$

$A\Omega = \frac{CA}{CA+CN}AN = \frac{\beta}{\beta+CN}AN$.

لكن، و من السؤال السابق، لدينا : $CN = \frac{\beta}{\gamma}BN$ و $BN = \frac{\gamma\alpha}{\beta+\gamma} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$ إذن :

$$A\Omega = \frac{\beta}{\beta+CN}AN = \frac{\beta}{\beta+\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}}AN = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\beta+\gamma}}AN = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}AN$$

و بما أنّ الشعاعين $\overrightarrow{A\Omega}$ و $\overrightarrow{AN}$ متوازيان و لهما نفس الإتجاه فإنّ $\overrightarrow{A\Omega} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AN}$ أي $\omega - a = \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}(u-a)$.

لكن $u = \frac{\beta}{\beta+\gamma}b + \frac{\gamma}{\beta+\gamma}c$ إذن : $\omega = \frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha+\beta+\gamma}$.

• 3 لدينا :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} \iff (a-0)+(b-0)+(c-0) = (z-0)+(u-0)+(v-0)$$
$$\iff a+b+c = z+u+v \iff (z-a)+(u-b)+(v-c)$$

لكن : $u-b = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}(c-b)$ ، $z-a = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(b-a)$ و $v-c = \frac{\alpha}{\gamma+\alpha}(a-c)$ منه :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} \iff \frac{\beta}{\alpha+\beta}(b-a)+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}(c-b)+\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}(a-c) = 0$$
$$\iff \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\overrightarrow{BC}+\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{CA} = \vec{0}$$
$$\iff \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$\iff \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\gamma}{\beta+\gamma}-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$\iff \begin{cases}\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma}{\beta+\gamma}=0\\ \frac{\gamma}{\beta+\gamma}-\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}=0\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}\\ \frac{\gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma+\alpha}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\beta^2=\alpha\gamma\\ \gamma^2=\alpha\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\frac{\gamma^2}{\beta}\\ \beta^2=\frac{\gamma^2}{\beta}\gamma\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\frac{\gamma^2}{\beta}\\ \beta^3=\gamma^3\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases}\alpha=\frac{\gamma^2}{\beta}\\ \beta=\gamma\end{cases} \iff \alpha=\beta=\gamma$$
$$\iff \text{المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}$$

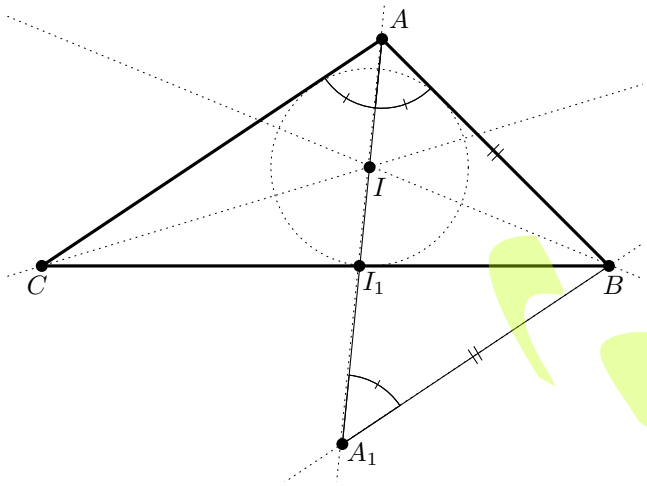
■

212 ABC مثلث. نضع $a = BC$ ، $b = CA$ و $c = AB$. ليكن I مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث (نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلية). أثبت أنّ النقطة I هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A(a), B(b), C(c)\}$.

أنظر التمرين 211 صفحة 301

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VII.10

الحلّ. ليكن Δ_1 منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ و I_1 نقطة تقاطع Δ_1 و (BC) . من الواضح أنّ المستقيمين Δ_1 و (AC) غير متوازيين (لأنهما يتقاطعان في النقطة A) .
المستقيم الموازي لـ (AC) و المار بالنقطة B يقطع Δ_1 في النقطة A_1 .
الزاويتان $\widehat{CAA_1}$ و $\widehat{AA_1B}$ متبادلتان داخلياً إذن متقايستان و بالتالي فإنّ $\widehat{CAA_1} = \widehat{A_1AB}$ منه $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AB}$ و هذا يعني أنّ المثلث ABA_1 متساوس الساقين عند الرأس B . حسب نظرية **طاليس** (Thalès) فإنّ :

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{A_1B}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

و بما أنّ النقطة I_1 تقع بين النقطتين B و C فهذا يعني أنّ : $b\overrightarrow{I_1B} + c\overrightarrow{I_1C} = \vec{0}$ أي أنّ I_1 هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{B\,(b)\,,\,C\,(c)\}$.
لتكن I_2 نقطة تقاطع منصف الزاوية $\widehat{ABC}$ مع (AC) و I_3 نقطة تقاطع منصف الزاوية $\widehat{ACB}$ مع (AB) . بنفس الطريقة نبرهن أنّ : $a\overrightarrow{I_2A} + c\overrightarrow{I_2C} = \vec{0}$ أي أنّ النقطة I_2 هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A\,(a)\,,\,C\,(c)\}$ ؛
و أنّ $a\overrightarrow{I_3A} + b\overrightarrow{I_3B} = \vec{0}$ أي أنّ النقطة I_3 هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A\,(a)\,,\,B\,(b)\}$.
لتكن I' مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A(a), B(b), C(c)\}$. نعلم أنه بإمكاننا التعويض عن النقطتين $B\,(b)$ و $C\,(c)$ بمركز مسافتيهما المتناسبة $I_1\,(b+c)$ و بالتالي I' هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A\,(a)\,,\,I_1\,(b+c)\}$.
بالمثل، I' هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{B\,(b)\,,\,I_2\,(a+c)\}$ و للجملة $\{C\,(c)\,,\,I_3\,(a+b)\}$.
هذا يعني أنّ I' تنتمي إلى المستقيمات (AI_1) ، (BI_2) و (CI_3) . لكن هذه المستقيمات هي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث ABC و نعلم أنها تتقاطع في نقطة واحدة هي I إذن $I' = I$.
هكذا نكون قد أثبتنا أنّ النقطة I هي مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A(a), B(b), C(c)\}$. ■

213

1. حل في $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} u+v = -\dfrac{1}{2} \\ uv = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

2. نضع $\omega = e^{2i\pi/5}$. أثبت أنّ : $\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
إستنتج (بالإستعانة بصِيغ **أولر**) أنّ : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = -\dfrac{1}{2}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 3 أثبت أنّ :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

و

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

• 4 إستنتج أنّ : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}$.

• 5 أثبت أنّ : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ و $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

الحلّ. • 1 نتّبع طريقة التعويض : من المعادلة الأولى نجد : $v=-u-\frac{1}{2}$ ؛ بالتعويض في المعادلة الثانية نجد :

$u\left(-u-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ أي $4u^2+2u-1=0$ و هي معادلة من الدرجة الثانية حلولها : $u_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

و $u_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$، منه $v_1=-u_1-\frac{1}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ و $v_2=-u_2-\frac{1}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

نستنتج أنّ الجملة تقبل حلّين : $(u,v)=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4},\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$ و $(u,v)=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$.

• 2 مجموع 5 حدود الأولى لمتتالية هندسية أساسها $r=\omega\neq 1$ إذن :

$$\omega^0+\omega^1+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\frac{1-\omega^5}{1-\omega}=0 \qquad (\text{لأنّ } \omega^5=1)$$

أي $1+e^{2\imath\pi/5}+e^{4\imath\pi/5}+e^{6\imath\pi/5}+e^{8\imath\pi/5}=0$

لكن $\frac{6\pi}{5}=-\frac{4\pi}{5}\pmod{2\pi}$ و $\frac{8\pi}{5}=-\frac{2\pi}{5}\pmod{2\pi}$ منه

$1+e^{2\imath\pi/5}+e^{4\imath\pi/5}+e^{-4\imath\pi/5}+e^{-2\imath\pi/5}=0$ و بتطبيق صِيغ **أولر** ينتج :

$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$ أي $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}$.

• 3 لدينا :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

• 4 نجمع المساوتين السابقتين طرفاً إلى طرف لنجد : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

أي $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

• 5 نضع $u=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ و $v=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. حسب ما سبق لدينا : $\begin{cases}u+v=-\frac{1}{2}\\ uv=-\frac{1}{4}\end{cases}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

لكن $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ (لأنّ $\frac{2\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) و $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$ (لأنّ $\frac{4\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$)

منه (السؤال الأوّل) : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ و $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

■

214 **إنشاء الخماسي المنتظم بالمسطرة و المدور**

1• نضع $z = e^{2i\pi/5}$ ، $a = z + z^4$ و $b = z^2 + z^3$. أوجد المعادلة من الدرجة الثانية التي حلولها هي a و b ثم استنتج قِيَم كلّ من $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ، $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ، $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ، $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2• الدائرة التي مركزها النقطة Ω ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}$ و التي تمر بالنقطة M ذات اللاحقة i تقطع المحور (Ox) في النقطتين I و J . أثبت أنّ $\overline{OI} + \overline{OJ} = \overline{OI} \cdot \overline{OJ} = -1$ ثمّ استنتج إنشاءً، بالمدور و المسطرة (غير المدرّجة)، للخماسي المنتظم الذي تقع رؤوسه على الدائرة ذات المركز O و نصف القطر 1 ، و أحد رؤوسه النقطة ذات اللاحقة 1 .

الحلّ. 1• لدينا $z^5 = 1$ و $|1| = 1$ منه $z^4 = \frac{1}{z} = \frac{z^5}{z}$ بالمثل $\bar{z}^3 = z^2$ إذن $a = z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$

و $b = z^2 + \bar{z}^2 = 2\,\mathrm{Re}(z^2) = 2\,\mathrm{Re}(e^{4i\pi/5}) = 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

بما أنّ 1 ، z ، z^2 ، z^3 و z^4 هي الجذور الخامسة للوحدة في $\mathbb{C}$ فإنّ $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ منه

$a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$. من جهة أخرى :

$$ab = (z + z^4)(z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z^3 + z^4 + z \cdot z^5 + z^2 \cdot z^5$$
$$= z^3 + z^4 + z + z^2 = a + b = -1$$

أي $a + b = -1$ و $ab = -1$ إذن a و b هما حلاّ المعادلة $X^2 + X - 1 = 0$ أي يساويان $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. لكن $a = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ لأنّ $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ إذن $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ منه $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ و $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

بما أنّ $\sin\frac{2\pi}{5} > 0$ فإنّ :

$$\sin\frac{2\pi}{5} = +\sqrt{1 - \cos^2\frac{2\pi}{5}} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

و بما أنّ $\sin\frac{4\pi}{5} > 0$ فإنّ :

$$\sin\frac{4\pi}{5} = +\sqrt{1 - \cos^2\frac{4\pi}{5}} = \sqrt{1 - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

من جهة أخرى :

$$\cos\frac{\pi}{5} = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

و

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

في الأخير :

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\quad;\quad \cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\quad;\quad \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$
$$\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\quad;\quad \sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\quad;\quad \sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

• 2 نصف قطر الدائرة التي مركزها Ω و تمر بالنقطة M هو :

$$\Omega M=\sqrt{\Omega O^2+OM^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

إذن :
$$\overline{OI}=\overline{O\Omega}+\overline{\Omega I}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

و
$$\overline{OJ}=\overline{O\Omega}+\overline{\Omega J}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

أي :
$$\overline{OI}=2\cos\frac{2\pi}{5}=a$$

و
$$\overline{OJ}=2\cos\frac{4\pi}{5}=b$$

منه :
$$\overline{OI}+\overline{OJ}=a+b=-1$$

و
$$\overline{OI}\cdot\overline{OJ}=ab=-1$$

معادلة محور القطعة المستقيمة [OI] هي $x=\frac{1}{2}\overline{OI}=\cos\frac{2\pi}{5}$ و بالتالي فهذا المحور يقطع الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1في نقطتين فاصلتاهما $\cos\frac{2\pi}{5}$ و ترتيبتاهما $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$ أي في النقطتين $\left(\cos\frac{2\pi}{5},-\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ و $\left(\cos\frac{2\pi}{5},\sin\frac{2\pi}{5}\right)$ اللتين هما رأسان للخماسي المنتظم.

بالمثل، معادلة محور القطعة [OJ] هي $x=\frac{1}{2}\overline{OJ}=\cos\frac{4\pi}{5}$ و بالتالي فهذا المحور يقطع الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 1 في نقطتين فاصلتهما $\cos\frac{4\pi}{5}$ و ترتيبتاهما $\pm\sin\frac{4\pi}{5}$ أي في النقطتين $\left(\cos\frac{4\pi}{5},-\sin\frac{4\pi}{5}\right)$ و $\left(\cos\frac{4\pi}{5},\sin\frac{4\pi}{5}\right)$ اللتين هما رأسان للخماسي المنتظم.

هكذا نكون قد تحصلنا على أربعة رؤوس للخماسي المنتظم. الرأس الخامس هو النقطة $(1,0)$. (شكل VII.11).

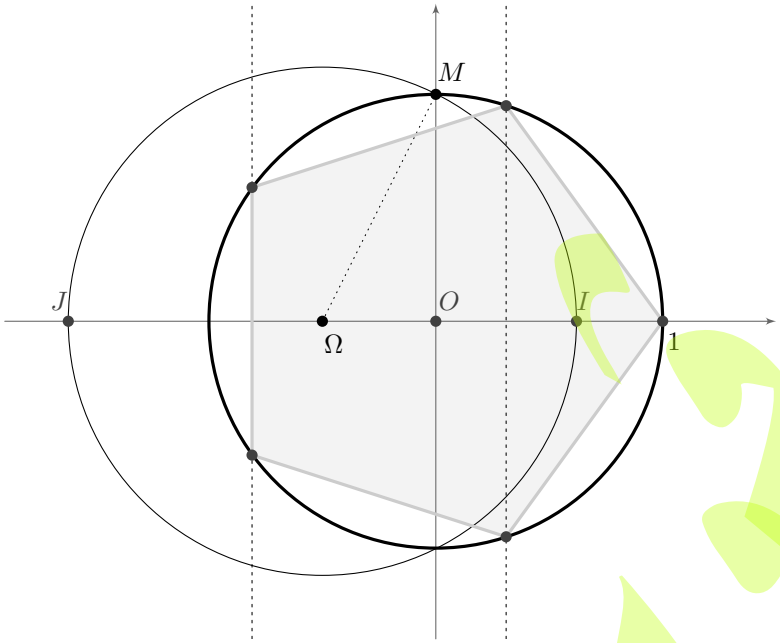
215 باتباع نفس طريقة التمرين 203 صفحة 292 ، أحسب المجاميع الآتية :

$$\begin{cases} S=\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots \\ T=\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots \\ U=\binom{n}{2}+\binom{n}{6}+\binom{n}{10}+\cdots \\ V=\binom{n}{3}+\binom{n}{7}+\binom{n}{11}+\cdots \end{cases}.$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VII.11

الحلّ. ننشر $(1+x)^n$ باستعمال مفكوك ثنائي الحد، ثمّ نُطبّق النتيجة على $x=1$ ، $x=\imath$ ، $x=-1$ و $x=-\imath$:

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n}{5}+\cdots = S+T+U+V\\
(1+\imath)^n &= \binom{n}{0}+\imath\binom{n}{1}+\imath^2\binom{n}{2}+\imath^3\binom{n}{3}+\imath^4\binom{n}{4}+\imath^5\binom{n}{5}+\cdots\\
&= \binom{n}{0}+\imath\binom{n}{1}-\binom{n}{2}-\imath\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\imath\binom{n}{5}+\cdots = S+\imath T-U-\imath V\\
(1-1)^n &= \binom{n}{0}+(-1)\binom{n}{1}+(-1)^2\binom{n}{2}+(-1)^3\binom{n}{3}+(-1)^4\binom{n}{4}+(-1)^5\binom{n}{5}+\cdots\\
&= \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots = S-T+U-V\\
(1-\imath)^n &= \binom{n}{0}+(-\imath)\binom{n}{1}+(-\imath)^2\binom{n}{2}+(-\imath)^3\binom{n}{3}+(-\imath)^4\binom{n}{4}+(-\imath)^5\binom{n}{5}+\cdots\\
&= \binom{n}{0}-\imath\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\imath\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\imath\binom{n}{5}+\cdots = S-\imath T-U+\imath V
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
S+T+U+V=2^n & (1)\\
S+\imath T-U-\imath V=(1+\imath)^n & (2)\\
S-T+U-V=0 & (3)\\
S-\imath T-U+\imath V=(1-\imath)^n & (4)
\end{cases}$$

بجمع (1) + (2) + (3) + (4) نجد $4S=2^n+(1+\imath)^n+(1-\imath)^n$ منه :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2^n+(1+\imath)^n+\overline{(1+\imath)^n}}{4} = \frac{2^n+2\operatorname{Re}\left((1+\imath)^n\right)}{4}\\
&= \frac{2^n+2\operatorname{Re}\left(\sqrt{2}^n e^{n\imath\pi/4}\right)}{4} = \frac{2^n+2\sqrt{2}^n\cos n\frac{\pi}{4}}{4}
\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بجمع $(4)\times\imath - (3) + (2)\times\imath - (1)$ نجد :

$$T = \frac{2^n - \imath(1+\imath)^n + \imath(1-\imath)^n}{4} = \frac{2^n - 2\operatorname{Re}\left(\imath(1+\imath)^n\right)}{4}$$
$$= \frac{2^n - 2\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{4}\right)}{4} = \frac{2^n + 2\sqrt{2}^n \sin n\frac{\pi}{4}}{4}$$

بجمع $(4) - (3) + (2) - (1)$ نجد :

$$U = \frac{2^n - (1+\imath)^n - (1-\imath)^n}{4} = \frac{2^n - 2\operatorname{Re}\left((1+\imath)^n\right)}{4}$$
$$= \frac{2^n - 2\operatorname{Re}\left(\sqrt{2}^n e^{n\imath\pi/4}\right)}{4} = \frac{2^n - 2\sqrt{2}^n \cos n\frac{\pi}{4}}{4}$$

بجمع $(4)\times\imath - (3) - (2)\times\imath + (1)$ نجد :

$$V = \frac{2^n + \imath(1+\imath)^n - \imath(1-\imath)^n}{4} = \frac{2^n + 2\operatorname{Re}\left(\imath(1+\imath)^n\right)}{4}$$
$$= \frac{2^n + 2\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\frac{\pi}{4}\right)}{4} = \frac{2^n - 2\sqrt{2}^n \sin n\frac{\pi}{4}}{4}$$

■

216 نُذكّر أنّ : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (مفكوك ثنائي الحد) حيث $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

1• باستعمال دستور **موافر**، أثبت أنّ :

$$S_1(n) = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{2m} = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}, \quad n-1 \le 2m \le n$$

2• أوجد عبارة مُمَاثِلة للمجموع :

$$S_2(n) = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{2m+1}, \quad n-1 \le 2m+1 \le n$$

ثمّ تَحقق من هذه النتيجة لأجل $n = 6$ ، $n = 7$ و $n = 8$.

الحلّ. بما أننا بصدد البحث عن مجموع معاملات ثنائي الحد رُتَبها كلها زوجية أو كلها فردية، فعلينا اختيار قيمة خاصة للمتغيّر x بحيث يكون للمقدار x^k خصوصيات ترتبط بشفعية (زوجية أو فردية) العدد الطبيعي k . و من السهل ملاحظة أنّ الوحدة التخيلية $\imath$ تتمتع بهذه الميزة : فالعدد $\imath^k$ حقيقي إذا كان k زوجياً ، و تخيلي صرف إذا كان k فردياً.

1• نأخذ إذن $x = \imath$ و نكتب $1 + \imath = \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}$ ثمّ نُطبّق دستور **موافر** فنجد :

$$\sqrt{2}^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \imath \sin\frac{n\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}e^{\imath\pi/4}\right)^n = (1+\imath)^n$$
$$= \binom{n}{0} + \imath\binom{n}{1} + \imath^2\binom{n}{2} + \imath^3\binom{n}{3} + \imath^4\binom{n}{4} + \imath^5\binom{n}{5} + \cdots$$
$$= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots\right] + \imath\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots\right]$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

أي أنّ المجموع $S_1(n) = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{2m}$ حيث $n-1 \leq 2m \leq n$ يساوي الجزء الحقيقي للعدد $\left(\sqrt{2}e^{\imath\pi/4}\right)^n$ منه :

$$S_1(n) = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{2m} = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}, \quad n-1 \leq 2m \leq n$$

• 2. ممّا سبق، نستخلص مباشرةً أنّ المجموع $S_2(n) = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{2m+1}$ حيث $n-1 \leq 2m \leq n$ يساوي الجزء التخيلي للعدد $\left(\sqrt{2}e^{\imath\pi/4}\right)^n$ أي :

$$S_2(n) = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots + (-1)^m \binom{n}{2m+1} = 2^{n/2} \sin\frac{n\pi}{4}, \quad n-1 \leq 2m+1 \leq n$$

لأجل $n = 6$ ، $n = 7$ و $n = 8$ ، و بالحساب المباشر نجد :

$$S_2(6) = \binom{6}{1} - \binom{6}{3} + \binom{6}{5} = 6 - 20 + 6 = -8 = 2^{6/2} \sin\frac{6\pi}{4}$$
$$S_2(7) = \binom{7}{1} - \binom{7}{3} + \binom{7}{5} - \binom{7}{7} = 7 - 35 + 21 - 1 = -8 = 2^{7/2} \sin\frac{7\pi}{4}$$
$$S_2(8) = \binom{8}{1} - \binom{8}{3} + \binom{8}{5} - \binom{8}{7} = 8 - 56 + 56 - 8 = 0 = 2^{8/2} \sin\frac{8\pi}{4}$$

■

217

• 1. أوجد جذور كثير الحدود $P_n(X) = (1+\imath X)^n - (1-\imath X)^n$ لأجل $n \in \mathbb{N}^*$.

• 2. إستنتج، عندما يكون n فردياً، قيمة المجموع $\sum_{k=0}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

الحلّ. • 1. لدينا :

$$P_n(z) = 0 \iff (1+\imath z)^n = (1-\imath z)^n$$

لكن $z = -\imath \iff 1 - \imath z = 0$ و في هذه الحالة فإنّ $(1+\imath z)^n = 2^n$ و $(1-\imath z)^n = 0$ أي أنّ $z = -\imath$ ليس حلاً للمعادلة $(1+\imath z)^n = (1-\imath z)^n$ و بالتالي بإمكاننا قسمة طرفيها على $(1-\imath z)^n$ فيكون :

$$P_n(z) = 0 \iff (1+\imath z)^n = (1-\imath z)^n \iff \frac{(1+\imath z)^n}{(1-\imath z)^n} = 1$$
$$\iff \left(\frac{1+\imath z}{1-\imath z}\right)^n = 1 = e^{2\imath\pi/n}$$
$$\iff \frac{1+\imath z}{1-\imath z} = e^{2\imath k\pi/n}, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$
$$\iff \imath z\left(1+e^{2\imath k\pi/n}\right) = e^{2\imath k\pi/n} - 1, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$

لكن $1 + e^{2\imath\theta} = 2e^{\imath\theta}\cos\theta$ و $e^{2\imath\theta} - 1 = 2\imath e^{\imath\theta}\sin\theta$. بأخذ $\theta = \frac{k\pi}{n}$ ينتج :

$$P_n(z) = 0 \iff \imath z\left(1+e^{2\imath k\pi/n}\right) = e^{2\imath k\pi/n} - 1, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$
$$\iff 2\imath z e^{\imath k\pi/n}\cos\frac{k\pi}{n} = 2\imath e^{\imath k\pi/n}\sin\frac{k\pi}{n}, \quad k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لكن :

$$\cos\frac{k\pi}{n}=0 \iff \frac{k\pi}{n}=\frac{\pi}{2} \iff k=\frac{n}{2} \text{ و } n \text{ زوجي}$$

منه :

- إذا كان n زوجياً فإنّ جذور كثير الحدود $P_n(X)$ هي الأعداد $z_k=\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ مع $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ و $k\neq\frac{n}{2}$ (عدد الحلول هو $n-1$).
- إذا كان n فردياً فإنّ جذور كثير الحدود $P_n(X)$ هي الأعداد $z_k=\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ مع $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ (عدد الحلول هو n).

2• نعلم أنه (مبرهنة 46 صفحة 383) إذا كان $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ كثير حدود بمعاملات مركبة درجته $n\geq 1$ فإنه يقبل n جذراً في $\mathbb{C}$ و أنّ مجموع هذه الجذور هو $\sigma_1=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$. في مثالنا :

$$P_n(X)=\left[\imath^n z^n+n\imath^{n-1}z^{n-1}+\cdots\right]-\left[(-\imath)^n z^n+n(-\imath)^{n-1}z^{n-1}+\cdots\right]$$

إذا كان n فردياً فإنّ $n-1$ زوجي و بالتالي $(-\imath)^n=-\imath^n$ و $(-\imath)^{n-1}=\imath^{n-1}$ منه :

$$P_n(X)=\left[\imath^n z^n+n\imath^{n-1}z^{n-1}+\cdots\right]-\left[-\imath^n z^n+n\imath^{n-1}z^{n-1}+\cdots\right]=2\imath^n z^n+0\cdot z^{n-1}+\cdots$$

إذن :

$$\sum_{0}^{n-1}\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sigma_1=-\frac{0}{2\imath^n}=0$$

■

218

1• أوجد كل الأعداد الطبيعية $n\in\mathbb{N}$ بحيث : $\left(1+\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n-\left(1-\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n=0$.

2• إستنتج أنه في هذه الحالة : $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2k+1}(-1)^k 3^{-k}=0$.

الحلّ. إذا حاولنا نشر الحد الأول من مساواة السؤال (1) بتطبيق دستور ثنائي الحد، فإننا نحصل على مساواة السؤال (2) و هذه الأخيرة يصعب إثباتها بصفة مباشرة و بالتالي يجب البحث عن طريقة أخرى.
لكن، الكتابة الأسية (أو المثلثية) هي الأنسب عند التعامل مع جداء أعداد مركبة : نستخدم إذن الشكل الأسي ... و نتذكر أنّ $\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

1• لدينا :

$$1+\frac{\imath}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\imath\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\imath\pi/6}$$

و

$$1-\frac{\imath}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\imath\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\imath\pi/6}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

منه

$$\left(1+\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n-\left(1-\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n=0 \iff \left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\imath\pi/6}\right)^n-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\imath\pi/6}\right)^n=0$$
$$\iff \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left[e^{\imath n\pi/6}-e^{-\imath n\pi/6}\right]=0$$
$$\iff \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\left[2\imath\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right]=0$$
$$\iff \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$$
$$\iff n=0 \pmod 6$$

إذن الأعداد التي تحقق المطلوب هي مضاعفات العدد 6 .

• 2 نطبق دستور ثنائي الحد :

$$\left(1+\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^k$$
$$\left(1-\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^k \quad \text{و}$$

منه

$$\left(1+\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n-\left(1-\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{\imath^k-(-\imath)^k}{\sqrt{3}^k}\right]$$

في المجموع السابق، إذا كان k زوجياً فإنّ $\imath^k-(-\imath)^k=0$ و بالتالي لا تبقى إلاّ الحدود ذات الرتبة الفردية و بما أننا نعتبر الحالة $n=0 \pmod 6$ فإنّ $\frac{n}{2}\in\mathbb{N}$ منه (بما أنّ n زوجي، فإنّ الحد الأخير في المجموع السابق ينعدم) :

$$\left(1+\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n-\left(1-\frac{\imath}{\sqrt{3}}\right)^n=0 \iff \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{\imath^k-(-\imath)^k}{\sqrt{3}^k}\right]=0$$
$$\iff \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2m+1}\left[\frac{\imath^{2m+1}-(-\imath)^{2m+1}}{\sqrt{3}^{2m+1}}\right]=0$$
$$\iff \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2m+1}\left[\frac{\imath\times(\imath^2)^m-(-\imath)\times\left((-\imath)^2\right)^m}{\sqrt{3}\times\left(3^{1/2}\right)^{2m}}\right]=0$$
$$\iff \frac{\imath}{\sqrt{3}}\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2m+1}\frac{(-1)^m+(-1)^m}{3^m}=0$$
$$\iff \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2m+1}2(-1)^m3^{-m}=0$$
$$\iff \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{2m+1}(-1)^m3^{-m}=0$$

و هو المطلوب.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

■

219 n عدد طبيعي بحيث $n \geq 2$ و $\omega = e^{2\imath\pi/n}$.

1• أثبت أنه لكل عدد مركب $z \in \mathbb{C}$ بحيث $z \neq 1$ فإنّ : $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$.

2• برِّر أنّ المساواة السابقة تبقى صحيحة لأجل $z = 1$.

3• إستنتج المساواة : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

الحلّ. 1• بما أنّ حلول المعادلة $z^n - 1 = 0$ هي الأعداد 1 ، ω ، ω^2 ، ... ، ω^{n-1} فإنّ :

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k)$$

لكن : $z^n - 1 = (z-1)\left(1+z+z^2+\cdots z^{n-1}\right)$ منه :

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = (z-1)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell\right)$$

إذا كان $z \neq 1$ ، فباختزال الحد $z-1$ ينتج : $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$.

2• الدالتان $x \longmapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x-\omega^k)$ و $x \longmapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ مستمرتان (متصلتان) على $\mathbb{R}$ (كثيرًا حدود) و متطابقتان (متساويتان) على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ و بالتالي لهما نفس النهاية عندما يؤول المتغيّر x إلى 1 أي :

$$\lim_{x\to 1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-\omega^k) = \lim_{x\to 1}\sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$$

و بما أنّ هذه النهاية موجودة و منتهية (بالإستمرارية) فإنّ المساواة السابقة تبقى صحيحة لأجل $z = 1$.

3• من أجل $z = 1$ ، نتيجة السؤال الأول تُكتب : $\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell = n$. لكن :

$$1-\omega^k = 1-e^{2\imath k\pi/n} = -2\imath e^{\imath k\pi/n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

و

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{\imath k\pi/n} = e^{\imath\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k} = e^{\imath\frac{\pi}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2}} = e^{\imath(n-1)\pi/2} = \imath^{n-1}$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منه :

$$\begin{aligned} n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) &= \prod_{k=1}^{n-1}\left(-2\imath e^{\imath k\pi/n}\sin\frac{k\pi}{n}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot \imath^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1} e^{\imath k\pi/n}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\ &= (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot \imath^{n-1}\cdot \imath^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\ &= (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot \imath^{2n-2}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\ &= (-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}\cdot (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \\ &= 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

(لأنّ $\imath^{2n-2} = (\imath^2)^{n-1} = (-1)^{n-1}$ و $(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-1} = 1$).

في الأخير : $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

■

220

ليكن $n\in\mathbb{N}$ و $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$. نضع، لكل $z\in\mathbb{C}$: $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

لتكن $\mathbb{U}$ مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 ؛ و ليكن $M\in\mathbb{R}_+$ بحيث مهما يكن $u\in\mathbb{U}$ فإنّ : $|P(u)|\leq M$.

أخيراً، نضع $\omega = e^{\frac{2\imath\pi}{n+1}}$.

1. أحسب المجموع $\sum_{k=0}^{n}\omega^{pk}$ لكل $p\in\mathbb{Z}$.

2. ليكن $q\in\{0,1,\cdots,n\}$. بسّط المجموع $\sum_{k=0}^{n} P\left(\omega^k\right)\omega^{-kq}$ ثمّ استنتج المتباينة $|a_q|\leq M$.

الحلّ. 1. ليكن $p\in\mathbb{Z}$. بما أنّ ω جذر من الرتبة $n+1$ للوحدة فإنّ $\omega^p = 1$ إذا كان $p = 0 \pmod{n+1}$ منه :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\omega^{pk} &= \sum_{k=0}^{n}(\omega^p)^k \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} 1^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 & \text{إذا كان } p = 0 \pmod{n+1} \text{ (لأنه في هذه الحالة } \omega^p = 1\text{)؛} \\ \frac{(\omega^p)^{n+1}-1}{\omega^p-1} = \frac{e^{2p\imath\pi}-1}{\omega^p-1} = 0 & \text{إذا كان } p\neq 0 \pmod{n+1} \text{ (لأنه في هذه الحالة } \omega^p\neq 1\text{)؛} \end{cases} \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 لدينا :

$$\sum_{k=0}^{n} P\left(\omega^k\right)\omega^{-kq} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m\left(\omega^k\right)^m\right)\omega^{-kq} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m\omega^{km}\omega^{-kq}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m\omega^{k(m-q)}\right) = \sum_{m=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_m\omega^{k(m-q)}\right)$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\left(a_m\sum_{k=0}^{n}\omega^{k(m-q)}\right) = \sum_{m=0}^{n}\left(a_q\times 1\right)$$
$$= (n+1)\,a_q$$

المساواة ما قبل الأخيرة ناتجة عن تطبيق نتيجة السؤال الأول على المجموع $\sum_{k=0}^{n}\omega^{pk}$ حيث $p = m-q$ و الحالة الوحيدة التي يكون فيها $m-q=0 \pmod{n+1}$ هي عندما يكون $m-q=0$ أي عندما يكون $m=q$ لأنّ :

$$m\in\{0,1,2,\cdots,n\} \implies m-q\in\{-q,-q+1,-q+2,\cdots,-q+n\}$$

إذن لكل $m\in\{1,2,\cdots,n\}$ فإنّ $0<|m-q|<n+1$ منه :

$$|(n+1)\,a_q| = \left|\sum_{k=0}^{n} P\left(\omega^k\right)\omega^{-kq}\right|$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|P\left(\omega^k\right)\omega^{-kq}\right| \qquad \text{(بتطبيق المتباينة المثلثية المعممة)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left|P\left(\omega^k\right)\right|\cdot\left|\omega^{-kq}\right| \qquad \text{(حسب خواص الطويلة)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left|P\left(\omega^k\right)\right| \qquad \left(\text{لأنّ } \left|\omega^{-kq}\right|=1\right)$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n} M \qquad \left(\text{لأنّ } \omega^k\in\mathbb{U}\right)$$
$$= (n+1)\,M$$

و باختزال العامل المشترك (الموجب تماماً) $(n+1)$ ينتج : $|a_q|\leq M$.

■

221

• 1 حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية (z هو المجهول، a عدد حقيقي و n عدد طبيعي) :
$(z+1)^n = \cos 2n\alpha + i\sin 2n\alpha$

لتكن z_k , $k=0,1,2,\cdots,n-1$ هذه الحلول.

• 2 نضع $A(z) = (z+1)^n - e^{2in\alpha}$. أثبت أنّ : $A(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)$.

• 3 ما هو المعامل الثابت في نشر $\prod_{k=0}^{n-1}(z-z_k)$ ؟ و في $A(z)$ ؟

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 4 نضع

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \sin a \times \sin\left(a + \frac{\pi}{n}\right) \times \cdots \times \sin\left(a + \frac{n-1}{n}\pi\right)$$

أثبت أنّ : $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n+1} 2^n \imath e^{\imath n a} P_n$.

• 5 إستنتج عبارة P_n بدلالة n .

الحلّ. لتكن $\omega_k = e^{2\imath k\pi/n}$ ، مع $0 \leq k \leq n-1$ ، الجذور النونية للوحدة.

• 1 المعادلة تكافئ : $(z+1)^n = \left(e^{2\imath a}\right)^n$ إذن الحلول هي الأعداد z_k بحيث : $z_k + 1 = \omega_k e^{2\imath a}$ مع $0 \leq k \leq n-1$ منه :

$$z_k = \omega_k e^{2\imath a} = \exp\left(2\imath a + \frac{2\imath k\pi}{n}\right) - 1 = \exp\left(\imath a + \frac{\imath k\pi}{n}\right)\left[\exp\left(\imath a + \frac{\imath k\pi}{n}\right) - \exp\left(-\imath a - \frac{\imath k\pi}{n}\right)\right]$$
$$= \exp\left(\imath a + \frac{\imath k\pi}{n}\right) \times 2\imath \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$$

• 2 جذور كثير الحدود $A(z)$ هي حلول المعادلة : $(z+1)^n = e^{2\imath n a}$ أي هي الأعداد z_k مع $0 \leq k \leq n-1$.

و بما أنّ المعامل المهيمن في $A(z)$ هو 1 فإنّ :

$$A(z) = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$$

• 3 نحصل على المعامل الثابت في $\prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k)$ بالتعويض $z = 0$ إذن هذا المعامل الثابت هو $\prod_{k=0}^{n-1} (-z_k)$ أي $(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k$. من جهة أخرى، المعامل الثابت في $(z+1)^n$ هو 1 (و نحصل عليه بأخذ $z = 0$) إذن المعامل الثابت في $A(z)$ هو $1 - e^{2\imath n a}$.

لكن :

$$1 - e^{2\imath n a} = -\left(e^{2\imath n a} - 1\right) = -\left[e^{\imath n a}\left(e^{\imath n a} - e^{-\imath n a}\right)\right] = -e^{\imath n a} \times 2\imath \sin na = -2\imath e^{\imath n a} \sin na$$

إذن المعامل الثابت في $A(z)$ هو $-2\imath e^{\imath n a} \sin na$

• 4 حسب السؤال السابق : $(-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} z_k = -2\imath e^{\imath n a} \sin(na)$ منه $\prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n+1} 2\imath e^{\imath n a} \sin(na)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

لكن :

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \prod_{k=0}^{n-1}\left[\exp\left(\imath a+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\times 2\imath\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right] = \prod_{k=0}^{n-1}\exp\left(\imath a+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left[2\imath\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\imath a+\imath\frac{k\pi}{2}\right)\right]\times(2\imath)^n\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= \exp(\imath na)\exp\left(\imath\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)\times 2^n\times\imath^n P_n$$

$$= e^{\imath na}\times\exp\left(\imath\frac{\pi}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\right)\times 2^n\times\imath^n P_n = e^{\imath na}\times\exp\left(\imath\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\times 2^n\times\imath^n\times P_n$$

$$= e^{\imath na}\times\left(e^{\imath\pi/2}\right)^{n-1}\times 2^n\times\imath^n P_n = e^{\imath na}\times\imath^{n-1}\times 2^n\times\imath^n\times P_n$$

$$= e^{\imath na}\times 2^n\times\imath^{2n-1}P_n = e^{\imath na}\times 2^n\times\left(\imath^2\right)^n\times\frac{1}{\imath}\times P_n$$

$$= (-1)^{n+1}2^n\imath e^{\imath na}P_n$$

إذن : $(-1)^{n+1}2^n\imath e^{\imath na}P_n = (-1)^{n+1}2\imath e^{\imath na}\sin(na)$ أي منه : $2^nP_n = 2\sin(na)$:

$$\boxed{P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}}$$

■

222 ليكن $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 2$. أحسب حاصل ضرب الجذور النونية للوحدة.

الحلّ. نعلم أنّ الجذور النونية للوحدة هي الأعداد $e^{2\imath k\pi/n}$ مع $k=0,1,\cdots,n-1$. إذن :

$$\prod_{k=0}^{n-1}e^{2\imath k\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2\imath k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2\imath\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}k\right)$$

$$= \exp\left(\frac{2\imath\pi}{n}\times\frac{n(n-1)}{2}\right) = e^{\imath(n-1)\pi} = \left(e^{\imath\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

■

223 ليكن $n\in\mathbb{N}$ بحيث $n\geq 2$. لتكن U_n مجموعة الجذور النونية للوحدة .
أحسب المجموع : $\sum_{z\in U_n}|z-1|$.

الحلّ. الجذور النونية للوحدة هي الأعداد $\omega_k = e^{2\imath k\pi/n}$ مع $k=0,1,\cdots,n-1$. لدينا :

$$\omega_k - 1 = e^{2\imath k\pi/n}-1 = e^{\frac{k\imath\pi}{n}}\left(e^{\frac{k\imath\pi}{n}}-e^{-\frac{k\imath\pi}{n}}\right) = 2\imath e^{\frac{k\imath\pi}{n}}\sin\frac{k\pi}{n}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

منه $|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$ (موجب لأنّ $0 \leq \frac{k\pi}{n} < \pi$) منه :

$$\sum_{z\in U_n}|z-1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{Im}\left(e^{k\imath\pi/n}\right)$$

$$= 2\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{k\imath\pi/n}\right) = 2\operatorname{Im}\left(\frac{1-\left(e^{\imath\pi/n}\right)^n}{1-e^{\imath\pi/n}}\right)$$

$$= 2\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{\imath\pi/}}{1-e^{\imath\pi/n}}\right) = 2\operatorname{Im}\left(\frac{1-(-1)}{1-e^{\imath\pi/n}}\right) = 4\operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-e^{\imath\pi/n}}\right)$$

$$= 4\operatorname{Im}\left(\frac{1}{e^{\imath\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-\imath\frac{\pi}{2n}}-e^{\imath\frac{\pi}{2n}}\right)}\right) = 4\operatorname{Im}\left(\frac{e^{-\imath\frac{\pi}{2n}}}{-2\imath\sin\frac{\pi}{2n}}\right)$$

$$= 2\operatorname{Im}\left(\frac{\imath e^{-\imath\frac{\pi}{2n}}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right) = 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2\operatorname{cotan}\frac{\pi}{2n}$$

■

224

ليكن ω جذراً نونيا للوحدة يختلف عن 1 . نضع $S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$.

بحساب $(1-\omega)S$ ، أوجد قيمة S .

الحلّ. **الطريقة الأولى** : لدينا :

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)(1-\omega)\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\left(\omega^k-\omega^{k+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^{k+1}$$

في المجموع الأخير نقوم بالتعويض $\ell = k+1$ منه $(k=0 \leftrightarrow \ell = 1)$ و $(k = n-1 \leftrightarrow \ell = n)$ إذن :

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{\ell=1}^{n}\ell\omega^\ell$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}k\omega^k + \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - \sum_{\ell=1}^{n}\ell\omega^\ell$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k + \left(0+\omega+2\omega^2+\cdots+(n-1)\omega^{n-1}\right)$$

$$-\left(\omega+2\omega^2+\cdots(n-1)\omega^{n-1}+n\omega^n\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k\right) - n\omega^n$$

لكن $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k = 0$ (مبرهنة 14 صفحة 33 مع $k = 1$ ؛ أو تمرين 225 صفحة 318 مع $p = 1$) و $\omega^n = 1$ منه $(1-\omega)S = -n$ أي $S = \frac{n}{\omega-1}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ملاحظة 51 : إذا كان $\omega = 1$ فإنّ $S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)$ منه $S = \frac{n(1+(n-1+1))}{2}$

أي $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

الطريقة الثانية : نلاحظ أنّ S يساوي مجموع الأعداد الموجودة في المثلث التالي :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ & & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ & & & \omega^3 & \cdots & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & \omega^{n-2} & \omega^{n-1} \\ & & & & & & \omega^{n-1} \end{array}$$

و بالجمع سطراً سطراً نجد :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^k + \omega^{k+1} + \cdots + \omega^{n-1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^k - \omega^n}{1-\omega} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega^k - 1}{1-\omega}$$
$$= \frac{1}{1-\omega}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^k - 1\right) = \frac{1}{1-\omega}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1}1\right) = \frac{1}{1-\omega}(0-n)$$

منه $S = \frac{n}{\omega - 1}$.

الطريقة الثالثة : نعتبر كثير الحدود $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^n = \frac{1-X^{n+1}}{1-X}$.

لدينا من جهة : $P'(X) = \left(\frac{1-X^{n+1}}{1-X}\right)' = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(1-X)^2}$

و من جهة أخرى : $P'(X) = \left(1 + X + X^2 + \cdots + X^n\right)' = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + nX^{n-1}$

منه :

$$S = P'(\omega) = \frac{n\omega^{n+1} - (n+1)\omega^n + 1}{(1-\omega)^2} = \frac{n\omega - (n+1) + 1}{(1-\omega)^2} = \frac{n(\omega-1)}{(1-\omega)^2} = \frac{n}{\omega - 1}$$

■

225 لتكن ω_0 ، ω_1 ، ⋯ ، ω_{n-1} الجذور النونية للوحدة و $p \in \mathbb{Z}$.

أحسب المجموع $S_p = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_k^p$ ثم الجداء $P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(2 - \omega_k)$.

الحلّ. لدينا : $\omega_0 = 1$ ، $\omega_1 = e^{2\imath\pi/n}$ و $\omega_k = e^{2\imath k\pi/n} = \omega_1^k$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 1. لدينا :

$$S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_1^p\right)^k$$

إذن S_p هو مجموع n حداً الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول $\omega_1^0 = \omega_0 = 1$ و أساسها $q = \omega_1^p$. إذن :

- إذا كان $q = 1$ أي إذا كان $e^{2ip\pi/n} = 1$ أي إذا كان العدد p مضاعفاً للعدد n فإنّ : $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.
- إذا كان $q \neq 1$ أي إذا لم يكن p مضاعفاً لـ n فإنّ : $S_p = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. لكن $q^n = \left(\omega_1^n\right)^p = 1$ لأنّ ω_1 جذر نوني للوحدة. إذن $S_p = 0$.

في الأخير : $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p = \begin{cases} n & \text{إذا كان } p \text{ مضاعفاً لـ } n \text{ ؛} \\ 0 & \text{إذا لم يكن } p \text{ مضاعفاً لـ } n \text{ ؛} \end{cases}$.

• 2. نعتبر كثير الحدود : $P(X) = X^n - 1$. جذور P هي الأعداد ω_k مع $0 \leq k \leq n-1$ و معامله المهيمن هو 1 إذن :

$$P(X) = X^n - 1 = 1 \times \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \omega_k)$$

بأخذ $X = 2$ ينتج :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2 - \omega_k) = P(2) = 2^n - 1$$

■

226 ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ و $z \in \mathbb{C}$. نضع $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ و $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega_n^k\right)^n$. أحسب S_n .

الحلّ. نستعمل مفكوك ثنائي الحد و نتذكّر أنّ الجمع عملية تبديلية إذن يمكن تبديل رموز الجمع $(\sum)$ لأننا نجمع عدداً منتهياً[2] من الحدود إذن :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega_n^k\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\omega_n^k\right)^\ell z^{n-\ell} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \omega_n^{k\ell} z^{n-\ell}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} \omega_n^{k\ell} z^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} \left(\binom{n}{\ell} z^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{k\ell} \right) = \sum_{\ell=0}^{n} \left(\binom{n}{\ell} z^{n-\ell} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^\ell\right)^k \right)$$

لحساب المجموع $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^\ell\right)^k$ (المتغيّر فيه هو k)، نميّز حالتين : $\omega_n^\ell = 1$ و $\omega_n^\ell \neq 1$.

[2] الشرط «عددٌ مُنتَهٍ من الحدود» مهمّ جداً لأنه إذا لم يكن الأمر كذلك، فلا يمكن تبديل رموز التجميع إلاّ بشروط (تُسمّى المجاميع غير المنتهية أي التي تحتوي على عددٍ غير منتهٍ من الحدود بـ «**المتسلسلات**» — Series بالإنجليزية ؛ Séries بالفرنسية).

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• إذا كان $\omega_n^\ell = 1$ أي إذا كان $\ell = 0$ أو $\ell = n$ فإنّ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^\ell\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

• و إذا كان $\omega_n^\ell \neq 1$ أي إذا كان $\ell \neq 0$ و $\ell \neq n$ فإنّ :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_n^\ell\right)^k = \frac{1-\left(\omega_n^\ell\right)^n}{1-\omega_n^\ell} = \frac{1-\left(\omega_n^n\right)^\ell}{1-\omega_n^\ell} = 0$$

لأنّ $\omega_n^n = 1$.

إذن، في المجموع S_n لا يبقى إلاّ الحدّان $\ell = 0$ و $\ell = n$ أي :

$$S_n = \binom{n}{0} z^{n-0} \times n + \binom{n}{n} z^{n-n} \times n = n\left(z^n + 1\right)$$

■

227

ليكن $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ و $z \in \mathbb{C}$. نضع $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ و $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=p}^{n-1} \binom{q}{p} \omega_n^{p+q}$. أحسب S_n .

الحلّ. نستعمل مفكوك ثنائي الحد و نتذكّر أنّ الجمع عملية تبديلية إذن يمكن تبديل رموز الجمع $(\sum)$ لأننا نجمع عدداً منتهياً[3] من الحدود إذن :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=p}^{n-1} \binom{q}{p} \omega_n^{p+q} = \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \omega_n^{p+q} = \sum_{q=0}^{n-1} \left(\sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \omega_n^p \right) \omega_n^q$$

$$= \sum_{q=0}^{n-1} \left(1+\omega_n\right)^q \omega_n^q = \sum_{q=0}^{n-1} \left(\left(1+\omega_n\right)\omega_n\right)^q$$

لحساب المجموع الأخير، نبحث أوّلاً إن كان $\omega_n\left(1+\omega_n\right) = 1$. لدينا :

$$\omega_n\left(1+\omega_n\right) = 1 \iff \omega_n^2 + \omega_n - 1 = 0 \iff \omega_n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

لكن $|\omega_n| = 1$ و $\left|\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right| = \frac{\sqrt{6}}{2} \neq 1$ إذن $\omega_n\left(1+\omega_n\right) \neq 1$ و بالتالي فالمجموع S_n هو مجموع n حداً الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأوّل 1 و أساسها $\omega_n\left(1+\omega_n\right) \neq 1$ (مع $\omega_n^n = 1$) إذن :

$$S_n = \frac{1-\left(\omega_n\left(1+\omega_n\right)\right)^n}{1-\omega_n\left(1+\omega_n\right)} = \frac{1-\omega_n^n\left(1+\omega_n\right)^n}{1-\omega_n\left(1+\omega_n\right)} = \frac{1-\left(1+\omega_n\right)^n}{1-\omega_n-\omega_n^2}$$

■

228

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية (z هو المجهول، θ عدد حقيقي و n عدد طبيعي) :

$$z^{2n} - 2z^n \cos n\theta + 1 = 0$$

[3] الشرط «عددٌ مُنتهٍ من الحدود» مهمّ جداً لأنه إذا لم يكن الأمر كذلك، فلا يمكن تبديل رموز التجميع إلاّ بشروط (تُسمّى المجاميع غير المنتهية أي التي تحتوي على عددٍ غير منتهٍ من الحدود بـ«**المتسلسلات**»— Series بالإنجليزية ؛ Séries بالفرنسية.)

http ://tinyurl.com/Malki1718

وَقِفْ لِلّٰهِ تَعَالَى

الحلّ. **الطريقة الأولى** : نضع $Z = z^n$ و تصبح المعادلة : $Z^2 - 2Z\cos n\theta + 1 = 0$.
المميِّز المختصر لهذه المعادلة هو :

$$\Delta' = (-\cos n\theta)^2 - 1 = -\sin^2 n\theta = (\imath \sin n\theta)^2$$

إذن لها حلاّن هما : $Z_1 = \cos n\theta - \imath \sin n\theta = e^{-\imath n\theta}$ و $Z_2 = \cos n\theta + \imath \sin n\theta = e^{\imath n\theta}$.
لتكن $\omega_k = e^{2\imath k\pi/n}$ ، مع $0 \leq k \leq n-1$ ، الجذور النونية للوحدة .

- حلول المعادلة $z^n = Z_1$ أي المعادلة $z = e^{-\imath n\theta}$ هي الجذور النونية للعدد $e^{-\imath n\theta}$ أي الأعداد $z_k = \omega_k e^{-\imath\theta}$ مع $0 \leq k \leq n-1$.
- حلول المعادلة $z^n = Z_2 = e^{\imath n\theta}$ هي الجذور النونية للعدد $e^{\imath n\theta}$ أي الأعداد $z'_k = \omega_k e^{\imath\theta}$ مع $0 \leq k \leq n-1$.

في الأخير، للمعادلة المقترحة $2n$ حلاً و هي الأعداد $\omega_k e^{-\imath\theta}$ أي $\exp\left(-\imath\theta + \imath\frac{2k\pi}{n}\right)$ مع $0 \leq k \leq n-1$ ، و الأعداد $\omega_k e^{\imath\theta}$ أي $\exp\left(\imath\theta + \imath\frac{2k\pi}{n}\right)$ مع $0 \leq k \leq n-1$.

الطريقة الثانية : نلاحظ أنّ :

$$z^{2n} - 2z^n\cos n\theta + 1 = z^{2n} - \left(e^{\imath n\theta} + e^{-\imath n\theta}\right)z^n + e^{\imath\theta}e^{-\imath n\theta} = \left(z^n - e^{\imath n\theta}\right)\left(z^n - e^{-\imath n\theta}\right)$$

منه : $z^{2n} - 2z^n\cos n\theta + 1 = 0 \iff z^n - e^{\imath n\theta} = 0$ أو $z^n - e^{-\imath n\theta} = 0$

ثمّ نتمم الحلّ كما في الطريقة الأولى. ■

229 حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية (z هو المجهول، a عدد حقيقي و $n \geq 1$ عدد طبيعي غير معدوم) :

$$\left(\frac{1-\imath z}{1+\imath z}\right)^n = \frac{1+\imath a}{1-\imath a}$$

الحلّ. بدايةً، نُذكِّر أنّ الدالة tan تقابل من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ نحو $\mathbb{R}$ ؛ إذن لكل عدد حقيقي a يوجد عدد حقيقي (وحيد) $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ بحيث $a = \tan\theta$ إذن :

$$\frac{1+\imath a}{1-\imath a} = \frac{1+\imath\tan\theta}{1-\imath\tan\theta} = \frac{1+\imath\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\imath\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta+\imath\sin\theta}{\cos\theta-\imath\sin\theta} = \frac{e^{\imath\theta}}{e^{-\imath\theta}} = e^{2\imath\theta}$$

و بالتالي فالمعادلة تصبح : $\left(\frac{1-\imath z}{1+\imath z}\right)^n = e^{2\imath\theta} = \left(e^{2\imath\theta/n}\right)^n$.
إذا كانت ω_0 ، ω_1 ، ... ، ω_{n-1} الجذور النونية للوحدة، فإنّ الجذور النونية للعدد $e^{2\imath\theta}$ هي الأعداد $\omega_k e^{2\imath\theta/n}$ مع $0 \leq k \leq n-1$. و بالتالي حلول المعادلة المقترحة هي الأعداد z_k بحيث : $\frac{1-\imath z_k}{1+\imath z_k} = \omega_k e^{2\imath\theta/n}$ مع $0 \leq k \leq n-1$ أي $\imath z_k\left(1+\omega_k e^{2\imath\theta/n}\right) = 1 - \omega_k e^{2\imath\theta/n}$. لكن :

$$1+\omega_k e^{2\imath\theta/n} = 1+\exp\left(\frac{2\imath\theta}{n}+\frac{2\imath k\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\left[\exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)+\exp\left(-\frac{\imath\theta}{n}-\frac{\imath k\pi}{n}\right)\right]$$
$$= 2\exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\cos\frac{\theta+k\pi}{n}$$

$$1-\omega_k e^{2\imath\theta/n} = 1-\exp\left(\frac{2\imath\theta}{n}+\frac{2\imath k\pi}{n}\right) = -\exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\left[\exp\left(\frac{\imath\theta}{n}-\frac{\imath k\pi}{n}\right)-\exp\left(-\frac{\imath\theta}{n}-\frac{\imath k\pi}{n}\right)\right]$$
$$= -2\imath\exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\sin\frac{\theta+k\pi}{n}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

إذن :

$$\imath z_k\left(1+\omega_k e^{2\imath\theta/n}\right)=1-\omega_k e^{2\imath\theta/n} \iff 2\imath z_k \exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\cos\frac{\theta+k\pi}{n}=-2\imath\exp\left(\frac{\imath\theta}{n}+\frac{\imath k\pi}{n}\right)\sin\frac{\theta+k\pi}{n}$$
$$\iff z_k\cos\frac{\theta+k\pi}{n}=-\sin\frac{\theta+k\pi}{n}$$

بما أنّ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ فإنّ $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{n}<\frac{\pi}{2}$ (إذا كان $\theta\geq 0$ فإنّ $-\frac{\pi}{2}<0\leq\frac{\theta}{n}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ ؛ و إذا كان $\theta<0$ فإنّ $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{n}<\theta<0$) منه $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{n}\leq\frac{\theta+k\pi}{n}<\frac{\theta}{n}+\pi<\frac{\pi}{2}$.

إذن الحالة الوحيدة التي ينعدم فيها $\cos\frac{\theta+k\pi}{n}$ هي عندما $\frac{\theta+k\pi}{n}=\frac{\pi}{2}$ أي عندما $\theta=\frac{n\pi}{2}-k\pi$. لكن :

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \implies -\frac{\pi}{2}<\frac{n\pi}{2}-k\pi<\frac{\pi}{2}$$
$$\implies -1<n-2k<1$$
$$\implies n-2k=0 \qquad (\text{لأنّ } n-2k \text{ عدد طبيعي})$$
$$\implies n=2k$$

أي n عدد زوجي و $k=\frac{n}{2}$ منه $\theta=0$ أي $a=0$. في الأخير :

- إذا كان $a=0$ و n زوجياً فإنّ $z_k\cos\frac{\theta+k\pi}{n}=-\sin\frac{\theta+k\pi}{n}$ مع $k\neq\frac{n}{2}$ منه :
$z_k=-\frac{\sin\frac{\theta+k\pi}{n}}{\cos\frac{\theta+k\pi}{n}}=-\tan\frac{\theta+k\pi}{n}$ و هي حلول المعادلة المقترحة و عددها $n-1$.

- إذا كان $a\neq 0$ أو n فردياً فإنّ : $z_k=-\frac{\sin\frac{\theta+k\pi}{n}}{\cos\frac{\theta+k\pi}{n}}=-\tan\frac{\theta+k\pi}{n}$ مع $0\leq k\leq n-1$ و هي حلول المعادلة المقترحة و عددها n.

■

230 a عدد مركب حيث $|a|=1$ ، n عدد طبيعي. لتكن z_1 ، z_2 ، ... ، z_n حلول المعادلة $z^n=a$.
أثبت أنّ صور الأعداد $(1+z_1)^n$ ، $(1+z_2)^n$ ، ... ، $(1+z_n)^n$ تقع على استقامة واحدة.

الحلّ. نضع $a=e^{\imath\theta}$ (لأنّ $|a|=1$). حلول المعادلة $z^n=a$ هي الجذور النونية للعدد $e^{\imath\theta}$ أي هي الأعداد $z_k=\exp\left(\imath\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ مع $0\leq k\leq n-1$ منه :

$$1+z_k=1+\exp\left(\imath\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\exp\left(\imath\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)\left[\exp\left(\imath\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)+\exp\left(-\imath\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)\right]$$
$$=2\exp\left(\imath\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)\cos\frac{\theta+2k\pi}{2n}$$

منه :

$$(1+z_k)^n=2^n\cos^n\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)$$

لكن $\exp\left(\frac{\theta+2k\pi}{2}\right)=\exp\left(\frac{\theta}{2}+k\pi\right)=(-1)^k\exp\left(\frac{\theta}{2}\right)$ إذن :

$$(1+z_k)^n=2^n(-1)^k\cos^n\left(\frac{\theta+2k\pi}{2n}\right)\exp\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

إذن $\arg\left((1+z_k)^n\right) = \frac{\theta}{2} \pmod{\pi}$ و بالتالي، إذا كانت M_k صورة $(1+z_k)^n$ في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ، فإنّ الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يصنع زاوية قيسها $\frac{\theta}{2}$ مع محور الأعداد الحقيقية (المستقيم الذي معادلته $y = 0$) و هذا لكل $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. إذن M_k تنتمي إلى المستقيم الذي يمرّ بالمبدأ O و يصنع زاوية $\frac{\theta}{2}$ مع محور الأعداد الحقيقية (معادلة هذا المستقيم هي $x = 0$ إذا كان $\theta = \pi$ أي إذا كان $a = -1$ ؛ و $y = x \tan\frac{\theta}{2}$ إذا كان $a \neq -1$) .

إذن صور الأعداد $(1+z_1)^n$ ، $(1+z_2)^n$ ، ⋯ ، $(1+z_n)^n$ تقع على استقامة واحدة. ■

231 نضع $\mathbb{Z}[\imath] = \{a + \imath b \; ; \; a, b \in \mathbb{Z}\}$. تُسمى هذه المجموعة بمجموعة أعداد **غوص** (Gauss) الصحيحة.

1. أثبت أنّه إذا كان $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\imath]$ فإنّ $\alpha + \beta \in \mathbb{Z}[\imath]$ و $\alpha\beta \in \mathbb{Z}[\imath]$.
2. ما هي عناصر $\mathbb{Z}[\imath]$ التي لها مقلوب أي العناصر $\alpha \in \mathbb{Z}[\imath]$ التي من أجلها يوجد $\beta \in \mathbb{Z}[\imath]$ بحيث $\alpha\beta = 1$ ؟
3. تحقق من أنه مهما كان $\zeta \in \mathbb{C}$ ، فإنه يوجد $z \in \mathbb{Z}[\imath]$ بحيث $|\zeta - z| < 1$.
4. أثبت أنه بإمكاننا أن نُعرِّف على $\mathbb{Z}[\imath]$ قسمة إقليدية أي مهما كان $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\imath]$ فإنه يوجد $q, r \in \mathbb{Z}[\imath]$ بحيث : $\alpha = \beta q + r$ مع $|r| < |\beta|$. (إرشاد : يمكن إعتبار العدد $\frac{\alpha}{\beta}$).

الحلّ. 1. ليكن $\alpha = a + \imath b \in \mathbb{Z}[\imath]$ و $\beta = c + \imath d \in \mathbb{Z}[\imath]$.

بما أنّ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ فإنّ $a + c \in \mathbb{Z}$ ، $b + d \in \mathbb{Z}$ ، $ac - bd \in \mathbb{Z}$ و $ad + bc \in \mathbb{Z}$ و بالتالي :

$$\alpha + \beta = (a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath (b + d) \in \mathbb{Z}[\imath]$$
$$\alpha\beta = (a + \imath b)(c + \imath d) = (ac - bd) + \imath (ad + bc) \in \mathbb{Z}[\imath]$$

2. ليكن $\alpha = a + \imath b \in \mathbb{Z}[\imath]$ و $\beta = c + \imath d \in \mathbb{Z}[\imath]$ بحيث $\alpha\beta = 1$. هذا يستلزم $|\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 = 1$ و بما أنّ $|\alpha|^2 \in \mathbb{N}$ فإنّ $|\alpha|^2 = 1$ أي $a^2 + b^2 = 1$.

إذا كان $|a| > 1$ فإنّ $a^2 > 1$ منه $a^2 + b^2 > 1$ إذن بالضرورة $|a| \leq 1$ أي $|a| = 0$ أو $|a| = 1$ (لأنّ $|\alpha| \in \mathbb{N}$).

- إذا كان $|a| = 0$ فإنّ $a = 0$ منه $b^2 = 1$ أي $b = \pm 1$ و بالتالي $\alpha = 0 \pm \imath = \pm\imath$ ؛
- و إذا كان $|a| = 1$ فإنّ $a^1 = 1$ منه $b^2 = 0$ أي $b = 0$ و بالتالي $\alpha = \pm 1 + 0\imath = \pm 1$.

إذن $\alpha \in \{-\imath, \imath, -1, 1, \}$.

بالعكس، $(-\imath)^{-1} = \imath \in \mathbb{Z}[\imath]$ ، $\imath^{-1} = -\imath \in \mathbb{Z}[\imath]$ ، $(-1)^{-1} = -1 \in \mathbb{Z}[\imath]$ و $1^{-1} = 1 \in \mathbb{Z}[\imath]$.

في الأخير، عناصر $\mathbb{Z}[\imath]$ التي لها مقلوب هي $-\imath$ ، $\imath$ ، -1 و 1 .

3. ليكن $\zeta = x + \imath y \in \mathbb{C}$ و $t \in \mathbb{R}$. نرمز بـ $E(t)$ للجزء الصحيح للعدد الحقيقي t أي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز t . إذن $E(t) \leq t < E(t) + 1$. نعتبر العدد :

$$n_t = \begin{cases} E(t) & ; \text{إذا كان } t \leq E(t) + \frac{1}{2} \\ E(t) + 1 & ; \text{إذا كان } t > E(t) + \frac{1}{2} \end{cases} .$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

من الواضح أنّ $n_t \in \mathbb{Z}$ و أنّ n_t هو العدد الصحيح الأقرب من t أي الذي يُحقق $|t - n_t| \leq \frac{1}{2}$.

لدينا إذن $|x - n_x| \leq \frac{1}{2}$ و $|y - n_y| \leq \frac{1}{2}$.

نضع $z = n_x + \imath n_y$. لدينا $z \in \mathbb{Z}[\imath]$ و

$$|z - \zeta|^2 = (x - n_x)^2 + \left(y - n_y\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1$$

منه $|z - \zeta| < 1$.

إذن، مهما كان $\zeta \in \mathbb{C}$ ، يوجد $z \in \mathbb{Z}[\imath]$ بحيث $|\zeta - z| < 1$.

• 4 ليكن $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\imath]$ بحيث $\beta \neq 0$. نعتبر العدد $q \in \mathbb{Z}[\imath]$ الذي يُحقق $\left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right| < 1$ (q موجود حسب السؤال السابق لأجل $\zeta = \frac{\alpha}{\beta}$ و لكن ليس بالضرورة وحيد) . نعتبر العدد $r = \alpha - \beta q$. بما أنّ $\alpha \in \mathbb{Z}[\imath]$ ، $\beta \in \mathbb{Z}[\imath]$ و $q \in \mathbb{Z}[\imath]$ فإنّ $\alpha - \beta q \in \mathbb{Z}[\imath]$ أي $r \in \mathbb{Z}[\imath]$. بالإضافة إلى ذلك لدينا : $\left|\frac{r}{\beta}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right| < 1$ منه $\frac{r}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} - q$ أي $|r| < |\beta|$.

إذن، بإمكاننا أن نُعرِّف على $\mathbb{Z}[\imath]$ قسمة إقليدية.

■

232 ما هي صورة الدائرة ذات المعادلة المركبة $|z - 1| = 1$ (باستثناء النقطة $z = 2$) بالتحويل : $m(z) \longmapsto M\left(Z = \frac{z}{2 - z}\right)$ ؟

الحلّ. بما أنّ طويلة $z - 1$ تساوي 1 فإنّ $z - 1 = e^{\imath\theta}$ مع $-\pi < \theta \leq \pi$ أي $z = 1 + e^{\imath\theta}$ و $z \neq 2$ يعني $\theta \neq 0$ منه :

$$Z = \frac{1 + e^{\imath\theta}}{2 - \left(1 + e^{\imath\theta}\right)} = \frac{1 + e^{\imath\theta}}{1 - e^{\imath\theta}} = \frac{e^{-\imath\theta/2} + e^{\imath\theta/2}}{e^{-\imath\theta/2} - e^{\imath\theta/2}} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2\imath\sin\frac{\theta}{2}} = \imath\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$$

عندما تمسح النقطة $m(z)$ الدائرة $|z - 1| = 1$ فإنّ θ يمسح $]-\pi, \pi[$ و $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$ يمسح $\mathbb{R}$ إذن صورة الدائرة $|z - 1| = 1$ هي محور الأعداد التخيلية $\operatorname{Re}(z) = 0$.

■

233 لتكن $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ الدالة المعرفة بالعبارة $f(z) = \frac{z + |z|}{2}$.

ما هي مجموعة القيم التي تأخذها هذه الدالة f ؟ بمعنى أوجد $f(\mathbb{C})$.

الحلّ. ليكن z عدداً مركباً .

• إذا كان $z \in \mathbb{R}^-$ فإنّ $f(z) = \frac{z + |z|}{2} = \frac{z - z}{2} = 0$ منه $0 \in f(\mathbb{C})$.

• إذا كان $z \notin \mathbb{R}^-$ فإنّ $z = re^{\imath\theta}$ مع $r > 0$ و $\theta \in]-\pi, \pi[$. منه :

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2} = \frac{re^{\imath\theta} + r}{2} = r\frac{1 + e^{\imath\theta}}{2} = re^{\imath\theta/2}\cos\frac{\theta}{2}$$

و بما أنّ $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ فإنّ $|f(z)| = r\cos\frac{\theta}{2}$ و $\arg(f(z)) = \frac{\theta}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

إذن $f(z) \in \left\{ Z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(Z) > 0 \right\}$.

منه نستخلص أنّ $f(\mathbb{C}) \subset \left(\left\{ Z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(Z) > 0 \right\} \cup \{0\} \right)$.

و بالعكس، ليكن $Z \in \mathbb{C}$ بحيث $\mathrm{Re}(Z) > 0$.

بإمكاننا أن نكتب : $Z = Re^{\imath\alpha}$ مع $R > 0$ و $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (لأنّ $\mathrm{Re}(Z) > 0$) .

لأجل $z = \frac{R}{\cos\alpha} e^{2\imath\alpha}$ لدينا :

$$f(z) = f\left(\frac{R}{\cos\alpha} e^{2\imath\alpha}\right) = \frac{R}{\cos\alpha} \times \cos\frac{2\alpha}{2} e^{2\imath\alpha/2} = Re^{\imath\alpha} = Z$$

إذن كل عدد مركب Z بحيث $\mathrm{Re}(Z) > 0$ هو صورة عدد مركب z بالدالة f أي أنّ :

$$\left\{ Z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(Z) > 0 \right\} \subset f(\mathbb{C}) .$$

لكن $0 \in f(\mathbb{C})$ منه $\left(\left\{ Z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(Z) > 0 \right\} \cup \{0\} \right) \subset f(\mathbb{C})$

في الأخير : $f(\mathbb{C}) = \{0\} \cup \left\{ Z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(Z) > 0 \right\}$

■

234 ليكن $P = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Im}(z) > 0 \right\}$ ؛ $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < 1 \right\}$ و $f : \mathbb{C} \setminus \{-\imath\} \longrightarrow \mathbb{C}$ الدالة المعرفة بالعبارة $f(z) = \frac{z-\imath}{z+\imath}$.

1. أثبت أن صورة أي عنصر من P بالدالة f هي عنصر من D .
2. أثبت أنه لكل عنصر من D سابقة وحيدة بالدالة f في المجموعة P .

الحلّ.

1. ليكن $z \in P$. نضع $x = \mathrm{Re}(z)$ و $y = \mathrm{Im}(z)$. بما أنّ $z \in P$ فإنّ $y > 0$. لدينا :

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-\imath|^2}{|z+\imath|^2} = \frac{|x+(y-1)\imath|^2}{|x+(y+1)\imath|^2} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

لكن $y > 0$ منه $x^2+(y-1)^2 < x^2+(y+1)^2$ أي $|f(z)| < 1$ و هذا يعني أنّ $f(z) \in D$.

2. ليكن $Z \in D$. لدينا :

$$Z = \frac{z-\imath}{z+\imath} \iff zZ+\imath Z = z-\imath \iff z(1-Z) = \imath(1+Z) \iff z = \imath\frac{1+Z}{1-Z}$$

مع

$$\begin{aligned}
\imath\frac{1+Z}{1-Z} &= \imath\frac{(1+Z)\overline{(1-Z)}}{|1-Z|^2} = \imath\frac{1+Z-\overline{Z}-Z\overline{Z}}{|1-Z|^2} \\
&= \frac{-\imath(Z+\overline{Z})}{|1-Z|^2} + \imath\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} = \frac{-\imath(2\imath\,\mathrm{Im}(Z))}{|1-Z|^2} + \imath\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} \\
&= \frac{2\,\mathrm{Im}(Z)}{|1-Z|^2} + \imath\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2}
\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بما أنّ $Z \in D$ فإنّ $|Z| < 1$ منه $1 - |Z|^2 > 0$ أي $\operatorname{Im}\left(\iota \dfrac{1+Z}{1-Z}\right) > 0$ و هذا يعني أنّ $z = \iota \dfrac{1+Z}{1-Z} \in P$.

الكتابة السابقة للعدد z بدلالة Z تُثبت أنه وحيد أي :

$$\forall Z \in D\ ,\ \exists!\ z \in P :\ f(z) = Z\ .$$

الخلاصة : ممّا سبق، نستنتج أنّ f تطبيق تقابلي من P نحو D . ■

235 ليكن $Z \in \mathbb{C}^*$ عدداً مركبا غير معدوم . حل المعادلة $e^z = Z$ ذات المجهول $z \in \mathbb{C}$.

الحلّ. نضع $\rho = |Z|$ ، $\theta = \arg(Z) \pmod{2\pi}$ و $z = a + \iota b$ مع $a, b \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\begin{aligned} e^z = Z &\iff e^{a+\iota b} = \rho e^{\iota\theta} \\ &\iff e^a e^{\iota b} = \rho e^{\iota\theta} \\ &\iff e^a = \rho \quad \text{و} \quad b = \theta + 2k\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff a = \ln\rho \quad \text{و} \quad b = \theta + 2k\pi\ ,\quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

إذن الحلول هي الأعداد : $z = \ln\rho + \iota\theta + 2\iota k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ملاحظة 52 : ◁ على عكس الدالة الأسية الحقيقية، فإنّ الدالة الأسية المركبة دورية (لأنّ $\rho e^{\iota\theta} = \rho e^{\iota\theta + 2\iota k\pi}$) و بالتالي لكل عدد مركب Z يوجد عدد لانهائي من الأعداد المركبة z بحيث $e^z = Z$ و هذه الأعداد تُعطى بالعبارة $z = \ln\rho + \iota\theta + 2\iota k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

نقول عن دالتها العكسية (دالة اللوغاريتم) أنّها **دالة متعددة القيمة**[4] (أي أنّها تُعيّن عدداً لا نهائيا من الصور المختلفة للعدد المركب الواحد z) و عن منحناها أنه **متعدد الفروع** . ▷

■

236 ليكن $z \in \mathbb{C}$. نضع $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$ ، $\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$ و $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

نسمى هذه الدوال : **الدوال الزائدية** (ch = جيب التمام الزائدي، sh = الجيب الزائدي، th = الظل الزائدي).

1. ليكن $z \in \mathbb{C}$. أثبت أنّ : $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.
2. ما هي الأعداد المركبة z التي يكون من أجلها $\operatorname{th} z$ معرّفاً؟
3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\operatorname{th} z = 0$.
4. حل في $\mathbb{C}$ الجملة : $\begin{cases} |\operatorname{Im}(z)| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases}$.
5. أثبت أنّ الدالة th تُشكّل تطبيقاً تقابليا من $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} :\ |\operatorname{Im}(z)| < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ إلى $U = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$.

[4] Multiple-valued بالإنجليزية ؛ Multivoque بالفرنسية.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. • 1 ليكن $z \in \mathbb{C}$. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\overline{(e^z)} = e^{x+\imath y} = \overline{e^x (\cos y + \imath \sin y)} = \overline{e^x} \cdot \overline{\cos y + \imath \sin y} = e^x (\cos y - \imath \sin y) = e^{x-\imath y} = e^{\overline{z}}$$

• 2 ليكن $z \in \mathbb{C}$. بما أنّ $\operatorname{ch} z$ و $\operatorname{sh} z$ معرّفان فإنّ $\operatorname{th} z$ مُعرّف إذا و فقط إذا كان $\operatorname{ch} z \neq 0$. لكن :

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} z = 0 &\iff e^z + e^{-z} = 0 \iff e^z = e^{-z} \iff e^{2z} = -1 \\
&\iff e^{2z} = e^{\imath\pi} \iff 2z = \imath\pi + 2\imath k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff z = \imath\frac{\pi}{2} + \imath k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

إذن : $\operatorname{th} z$ مُعرّف إذا و فقط إذا كان $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\imath\frac{\pi}{2} + \imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• 3 ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\imath\frac{\pi}{2} + \imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. لدينا :

$$\begin{aligned}
\operatorname{th} z = 0 &\iff \operatorname{sh} z = 0 \iff e^z = e^{-z} \iff e^{2z} = 1 \iff e^{2z} = e^0 \\
&\iff 2z = 0 + 2\imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \iff z = \imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

و بما أنّ $\left\{\imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cap \left\{\imath\frac{\pi}{2} + \imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \varnothing$ فإنّ مجموعة حلول المعادلة $\operatorname{th} z = 0$ هي : $\left\{\imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• 4 ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\imath\frac{\pi}{2} + \imath k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. نضع $z = x + \imath y$ مع $x, y \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{\frac{e^z - e^{-z}}{2}}{\frac{e^z + e^{-z}}{2}} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^z (e^z - e^{-z})}{e^z (e^z + e^{-z})} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

منه :

$$\begin{aligned}
|\operatorname{th} z| < 1 &\iff \left|\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right| < 1 \iff \left|\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}\right|^2 < 1 \\
&\iff |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \iff (e^z - e^{-z})\,\overline{(e^z - e^{-z})} < (e^z + e^{-z})\,\overline{(e^z + e^{-z})} \\
&\iff (e^z - e^{-z})\left(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}\right) < (e^z + e^{-z})\left(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}\right) \\
&\iff -e^{z-\overline{z}} - e^{-(z-\overline{z})} < e^{z-\overline{z}} + e^{-(z-\overline{z})} \iff 2\left(e^{2\imath y} + e^{-2\imath y}\right) > 0 \\
&\iff \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

و بالتالي :

$$\begin{cases} |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{cases} \iff |y| < \frac{\pi}{4} \iff |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{4} \iff z \in \Delta$$

حيث Δ هي المجوعة المعرّفة في السؤال الموالي.

• 5 ليكن $z \in \Delta$. حسب السؤال الثاني، $\operatorname{th} z$ مُعرّف و حسب السؤال الرابع، $|\operatorname{th} z| < 1$ و بالتالي :

$$z \in \Delta \implies \operatorname{th} z \in \mathcal{U}\,.$$

هذا يعني أنّ الدالة th تُشكّل تطبيقاً من المجموعة Δ نحو المجموعة $\mathcal{U}$.

ليكن $Z \in \mathcal{U}$ (أي $|Z| < 1$) و بالتالي $Z \neq 1$ و $Z \neq -1$) و ليكن $z \in \Delta$. لدينا :

$$\operatorname{th} z = Z \iff \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = Z \iff \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = Z \iff e^{2z} = \frac{1 + Z}{1 - Z}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بما أنّ $Z \neq -1$ فإنّ $\frac{1+Z}{1-Z} \neq 0$ إذن يمكن أن نكتب $\frac{1+Z}{1-Z} = \rho e^{\imath\theta}$ مع $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in]-\pi, \pi]$ و بالتالي :

$$\begin{aligned} e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z} &\iff e^{2z} = \rho e^{\imath\theta} \iff e^{2x} \cdot e^{2\imath y} = \rho e^{\imath\theta} \\ &\iff e^{2x} = \rho \quad \text{و} \quad 2y = \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\rho \quad \text{و} \quad y = \frac{\theta}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

هل يمكن أن يكون $\theta = \pi$ ؟ إذا كان الأمر كذلك فإنّ $\frac{1+Z}{1-Z} = \rho e^{\imath\pi} = -\rho \in \mathbb{R}_-^*$ منه $Z = \frac{r+1}{r-1} \in \mathbb{R}$ و بما أنّ $|Z| < 1$ أي $Z \in]-1, 1[$ فإنّ $\frac{1+Z}{1-Z} \in \mathbb{R}_+^*$ و هذا تناقض ! إذن $\theta \neq \pi$ أي منه $\theta \in]-\pi, \pi[$ و $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ و بالتالي :

$$\begin{cases} \operatorname{th} z = Z \\ z \in \Delta \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln\rho \\ y = \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

و هذا يعني أنّ كل عنصر Z من $\mathcal{U}$ يقبل سابقة وحيدة z في Δ (و هي $z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + \frac{\imath}{2}\operatorname{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ مع $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ يمثّل عمدة العدد $\frac{1+Z}{1-Z}$ التي تنتمي إلى المجال $]-\pi, \pi]$) .

في الأخير، الدالة th تُشكّل تطبيقاً تقابلياً من Δ نحو $\mathcal{U}$.

■

237 a و b عددان حقيقيان .

نضع $S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$ و $T = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb)$. نعتبر العدد المركب : $Z = S + \imath T$.

1. أثبت أنّ : $Z = e^{\imath a} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{\imath b}\right)^k$.

2. إستنتج كلاًّ من S و T .

الحلّ. 1. لدينا :

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb) + \imath \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb) = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} \cos(a+kb) + \imath \binom{n}{k} \sin(a+kb)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} (\cos(a+kb) + \imath \sin(a+kb))\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{\imath(a+kb)} = e^{\imath a} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{\imath b}\right)^k \end{aligned}$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

2• نُطبق مفكوك ثنائي الحد :

$$Z = e^{\imath a}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{\imath b}\right)^{k} = e^{\imath a}\left(1+e^{\imath b}\right)^{n} = e^{\imath a}\left[e^{\imath b/2}\left(e^{\imath b/2}+e^{-\imath b/2}\right)\right]^{n}$$
$$= e^{\imath a}\left(e^{\imath b/2}\right)^{n}\left(2\cos\frac{b}{2}\right)^{n} = 2^{n}e^{\imath\left(a+\frac{nb}{2}\right)}\cos^{n}\frac{b}{2}$$
$$= 2^{n}\cos^{n}\left(\frac{b}{2}\right)\left[\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)+\imath\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)\right]$$

منه :
$$S = \operatorname{Re}(Z) = 2^{n}\cos^{n}\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)$$

و
$$T = \operatorname{Im}(Z) = 2^{n}\cos^{n}\left(\frac{b}{2}\right)\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)$$

■

238 ☚ θ عدد حقيقي و n عدد طبيعي. نضع : $S = \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta$.

1• أحسب S إذا كان $\theta = m\pi$ مع $m \in \mathbb{Z}$.

2• نفرض أنّ : $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$.

(ا) أثبت أنه مهما كان العدد الصحيح k فإنّ :
$$2\sin\theta\cos(2k-1)\theta = \sin 2k\theta - \sin 2(k-1)\theta$$

(ب) أثبت أنّ : $2S\sin\theta = \sin 2n\theta$.

(ج) إستنتج قيمة S بدلالة n و θ .

3• باتباع نفس الطريقة، أحسب المجموع : $\mathcal{C} = \sum_{k=0}^{n}\cos^{2}k\theta$. ☜ أنظر التمرين 239 صفحة 330

الحلّ. 1• إذا كان $\theta = m\pi$ فإنّ $\cos((2k-1)m\pi) = (-1)^{m}$ (يمكن إثبات ذلك بالتراجع) منه :

$$S = \sum_{k=1}^{n}\cos((2k-1)m\pi) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{m} = n(-1)^{m}$$

2• (ا) إذا كان k عدداً صحيحاً فإنّ :
$$2\sin\theta\cos(2k-1)\theta = \sin(\theta+(2k-1)\theta)+\sin(\theta-(2k-1)\theta) = \sin 2k\theta - \sin 2(k-1)\theta$$

(ب) لدينا :

$$2S\sin\theta = 2\sin\theta\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta = \sum_{k=1}^{n}2\sin\theta\cos 2(k-1)\theta = \sum_{k=1}^{n}(\sin 2k\theta - \sin(2k-1)\theta)$$
$$= \cancel{\sin 2\theta} - \cancel{\sin 0\theta} + \cancel{\sin 4\theta} - \cancel{\sin 2\theta} + \cancel{\sin 6\theta} - \cancel{\sin 4\theta} + \cdots$$
$$\cdots + \cancel{\sin 2(n-1)\theta} - \cancel{\sin 2(n-2)\theta} + \sin 2n\theta - \cancel{\sin 2(n-1)\theta}$$
$$= \sin 2n\theta$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ج) حسب ما سبق :

$$S=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta=\begin{cases}n(-1)^m & \text{إذا كان } \theta=m\pi \text{ مع } m\in\mathbb{Z}\ ;\\ \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta} & \text{إذا كان } \theta\neq 0\pmod{\pi}\ ;\end{cases}$$

ملاحظة 53 : ◁ إذا كان $\theta\neq 0\pmod{\pi}$ ، فيمكن إيجاد S بطريقة مباشرة :

$$S=\sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\theta=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}\left(e^{(2k-1)\theta}\right)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{-\imath\theta}\left(e^{2\imath\theta}\right)^k\right)=\operatorname{Re}\left(e^{-\imath\theta}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2\imath\theta}\right)^k\right)$$

$$=\operatorname{Re}\left(e^{-\imath\theta}\cdot e^{2\imath\theta}\frac{\left(e^{2\imath\theta}\right)^n-1}{e^{2\imath\theta}-1}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{e^{\imath n\theta}\left(e^{\imath n\theta}-e^{-\imath n\theta}\right)}{e^{\imath\theta}-e^{-\imath\theta}}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{2\imath\sin n\theta}{2\imath\sin\theta}e^{\imath n\theta}\right)$$

$$=\frac{\sin n\theta\cos n\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{1}{2}\sin 2n\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

▷

• 3 (أ) إذا كان $\theta=0\pmod{\pi}$ فإنّ $\cos^2 k\theta=1$ منه : $\mathscr{C}=\sum_{k=0}^{n}1=n+1$.

(ب) إذا كان $\theta\neq 0\pmod{\pi}$ ، فبملاحظة أنّ $\cos^2 k\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2k\theta)$ يكون :

$$\mathscr{C}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2k\theta\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos 2k\theta=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos 2k\theta$$

لكن :

$$2\sin\theta\cos 2k\theta=\sin(\theta+2k\theta)+\sin(\theta-2k\theta)=\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta$$

إذن :

$$2\sin\theta\sum_{k=0}^{n}\cos 2k\theta=\sum_{k=0}^{n}2\sin\theta\cos 2k\theta=\sum_{k=0}^{n}\left(\sin(2k+1)\theta-\sin(2k-1)\theta\right)$$

$$=\cancel{\sin\theta-\sin(-\theta)}+\cancel{\sin 3\theta-\sin\theta}+\cdots+\left(\sin(2n+1)\theta-\cancel{\sin(2n-1)\theta}\right)$$

$$=\sin(2n+1)\theta+\sin\theta$$

منه :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta+\sin\theta}{2\sin\theta}=\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}+\frac{1}{2}$$

منه :

$$\mathscr{C}=\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2n+1)\theta}{2\sin\theta}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n+3}{4}+\frac{\sin(2n+1)\theta}{4\sin\theta}$$

■

239 x عدد حقيقي و n عدد طبيعي. نضع : $C_n=\sum_{k=0}^{n}\cos^2 kx$ و $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin^2 kx$.

• 1 أثبت أنّ $C_n+S_n=n+1$.

• 2 أحسب C_n-S_n (ميّز الحالتين $x\in\pi\mathbb{Z}$ و $x\notin\pi\mathbb{Z}$).

• 3 إستنتج كلاً من C_n و S_n .

أنظر التمرين 238 صفحة 329

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• لدينا (نُذكِّر بالمتطابقة $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$) :

$$C_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx + \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos^2 kx + \sin^2 kx\right) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$$

2• لدينا (نُذكِّر بالمتطابقة $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$) :

$$C_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx - \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx = \sum_{k=0}^{n} \left(\cos^2 kx - \sin^2 kx\right) = \sum_{k=0}^{n} \cos 2kx$$

• إذا كان $x \in \pi\mathbb{Z}$ أي إذا كان $x = 0 \pmod{\pi}$ فإنّ $\sin^2 kx = 0$ منه $S_n = 0$ إذن $C_n - S_n = n+1-0 = n+1$ (أو : $\cos 2kx = 1$ منه $C_n - T_n = \sum_{k=0}^{n} \cos 2kx = n+1$).

• إذا كان $x \notin \pi\mathbb{Z}$ أي إذا كان $x \neq 0 \pmod{\pi}$ فحسب التمرين 238 صفحة 329 فإنّ :

$$C_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} + \frac{1}{2}$$

3• لدينا $C_n + S_n = n+1$ و $C_n - S_n = \frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} + \frac{1}{2}$. بجمع هاتين المعادلتين طرفاً إلى طرف نجد $2C_n = n+1+\frac{\sin(2n+1)x}{2\sin x} + \frac{1}{2}$ أي $C_n = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin(2n+1)x}{4\sin x}$ ؛ و بطرحهما طرفاً إلى طرف نجد $S_n = n+1-C_n = \frac{2n+1}{4} - \frac{\sin(2n+1)x}{4\sin x}$.

■

240 θ عدد حقيقي و n عدد طبيعي. نضع : $S = \sum_{k=1}^{n} \cos^k\theta \cos k\theta$ و $T = \sum_{k=1}^{n} \cos^k\theta \sin k\theta$.

نعتبر العدد المركب : $Z = S + \imath T$.

1• أثبت أنّ $Z = \sum_{k=1}^{n} u^k$ مع $u = e^{\imath\theta}\cos\theta$.

2• أثبت أنّ $u = \frac{1}{2} + \frac{e^{2\imath\theta}}{2}$.

3• متى يكون $u = 1$ ؟ أحسب S و T في هذه الحالة.

4• نفرض $u \neq 1$. أثبت أنّ : $Z = -\imath\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(e^{\imath n\theta}\cos^n\theta - 1\right)$.

5• إستنتج كلاًّ من S و T .

6• باتباع نفس الطريقة، أحسب المجموعين $\mathfrak{S} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{\cos^k\theta}$ و $\mathfrak{T} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin k\theta}{\cos^k\theta}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. 1• لدينا :

$$Z=\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta\cos k\theta+\imath\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta\sin k\theta=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos^k\theta\cos k\theta+\imath\cos^k\theta\sin k\theta\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta\left(\cos k\theta+\imath\sin k\theta\right)=\sum_{k=1}^{n}\cos^k\theta e^{\imath k\theta}=\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\imath\theta}\cos\theta\right)^k$$

2• لدينا :

$$u=e^{\imath\theta}\cos\theta=(\cos\theta+\imath\sin\theta)\cos\theta=\cos^2\theta+\imath\cos\theta\sin\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\imath\frac{\sin 2\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\theta+\imath\sin 2\theta)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\imath\theta}$$

طريقة أخرى : نستعمل صيغة **أولر**

$$u=e^{\imath\theta}\cos\theta=e^{\imath\theta}\left(\frac{e^{\imath\theta}+e^{-\imath\theta}}{2}\right)=\frac{e^{\imath\theta+\imath\theta}+e^{\imath\theta-\imath\theta}}{2}=\frac{e^{2\imath\theta}+e^0}{2}=\frac{e^{2\imath\theta}+1}{2}$$

3• لدينا :

$$u=1\iff\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\imath\theta}=1\iff e^{2\imath\theta}=1\iff 2\theta=0\ (\text{mod}\ 2\pi)\iff\theta=0\ (\text{mod}\ \pi)$$

منه : إذا كان $u=1$ فإنّ $Z=\sum_{k=1}^{n}1=n$ إذن $S=\text{Re}(Z)=n$ و $T=\text{Im}(Z)=0$.

4• إذا كان $u\neq 1$ أي إذا كان $\theta\neq 0\ (\text{mod}\ \pi)$ فإنّ :

$$Z=\sum_{k=1}^{n}u^k=u\cdot\frac{u^n-1}{u-1}=\frac{u}{u-1}(u^n-1)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\imath\theta}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2\imath\theta}-1}\left(\left(e^{\imath\theta}\cos\theta\right)^n-1\right)$$
$$=\frac{e^{2\imath\theta}+1}{e^{2\imath\theta}-1}\left(e^{\imath n\theta}\cos^n\theta-1\right)=\frac{e^{\imath\theta}\left(e^{\imath\theta}+e^{-\imath\theta}\right)}{e^{\imath\theta}\left(e^{\imath\theta}-e^{-\imath\theta}\right)}\left(\left(e^{\imath\theta}\cos\theta\right)^n-1\right)$$
$$=\frac{2\cos\theta}{2\imath\sin\theta}\left(e^{\imath n\theta}\cos^n\theta-1\right)=-\imath\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(e^{\imath n\theta}\cos^n\theta-1\right)$$

5• لدينا :

$$Z=-\imath\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(e^{\imath n\theta}\cos^n\theta-1\right)=-\imath\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(-1+\cos^n\theta\cos n\theta+\imath\cos^n\theta\sin n\theta\right)$$
$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^n\theta\sin n\theta+\imath\cos^n\theta(1-\cos n\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

منه :

$$S=\text{Re}(Z)=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^n\theta\sin n\theta=\frac{\cos^{n+1}\theta\sin n\theta}{\sin\theta}$$

و

$$T=\text{Im}(Z)=\cos^n\theta(1-\cos n\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{(1-\cos n\theta)\cos^{n+1}\theta}{\sin\theta}$$

6• حتى تكون العبارتين معرّفتان، يجب أن يكون $\theta\neq\frac{\pi}{2}\ (\text{mod}\ \pi)$.

نضع $\mathfrak{Z}=\mathfrak{C}+\imath\mathfrak{T}$ منه :

$$\mathfrak{Z}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos k\theta+\imath\sin k\theta}{\cos^k\theta}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{\imath\theta}}{\cos\theta}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}u^k$$

مع $u=\frac{e^{\imath\theta}}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta+\imath\sin\theta}{\cos\theta}=1+\imath\tan\theta$. لدينا :

$$u=1\iff e^{\imath\theta}=\cos\theta\iff\sin\theta=0\iff\theta=0\ (\text{mod}\ \pi)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- إذا كان $u = 1$ أي إذا كان $\theta = 0 \pmod{\pi}$ فإنّ $\mathcal{Z} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ منه $\mathcal{C} = \mathrm{Re}(\mathcal{Z}) = n+1$ و $\mathcal{T} = \mathrm{Im}(\mathcal{Z}) = 0$.
- إذا كان $u \neq 1$ أي إذا كان $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ فإنّ :

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = \sum_{k=0}^{n} u^k &= \frac{u^{n+1}-1}{u-1} = \frac{1}{(1+\imath\tan\theta)-1}\left(\left(\frac{e^{\imath\theta}}{\cos\theta}\right)^{n+1}-1\right)\\ &= -\imath\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{e^{\imath(n+1)\theta}}{\cos^{n+1}\theta}-1\right) = -\imath\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{\cos(n+1)\theta-\cos^{n+1}\theta+\imath\sin(n+1)\theta}{\cos^{n+1}\theta}\right)\\ &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta\cos^n\theta}+\imath\frac{\cos^{n+1}\theta-\cos(n+1)\theta}{\sin\theta\cos^n\theta}\end{aligned}$$

منه : $\mathcal{C} = \mathrm{Re}(\mathcal{Z}) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta\cos^n\theta}$

و $\mathcal{T} = \mathrm{Im}(\mathcal{Z}) = \dfrac{\cos^{n+1}\theta-\cos(n+1)\theta}{\sin\theta\cos^n\theta}$

■

241 ☙

θ عدد حقيقي و n عدد طبيعي. نضع : $S = \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k\theta}$.

1. أثبت أنّ : $S \in \mathbb{R}$.
2. أحسب S إذا كان $\theta = 0 \pmod{2\pi}$.
3. نفرض $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$. أثبت أنّ $S = e^{-\imath n\theta}\dfrac{e^{\imath(2n+1)\theta}-1}{e^{\imath\theta}-1}$. إستنتج عبارة مُبسّطة لـ S بدلالة n و θ .

الحلّ. 1. لدينا :

$$\overline{S} = \overline{\sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k\theta}} = \sum_{k=-n}^{n}\overline{e^{\imath k\theta}} = \sum_{k=-n}^{n} e^{-\imath k\theta} = \sum_{\ell=n}^{-n} e^{\imath\ell\theta} = S$$

إذن $S \in \mathbb{R}$.

طريقة أخرى : نستعمل صيغة **أولر**

$$\begin{aligned}S = \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k\theta} &= \sum_{k=-n}^{-1} e^{\imath k\theta} + e^{0\imath\theta} + \sum_{k=1}^{n} e^{\imath k\theta}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} e^{-\imath\ell\theta} + 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{\imath k\theta} && (k = -\ell \text{ بالتعويض})\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\imath k\theta} + e^{\imath k\theta}\right) && (k \text{ المتغيّر } \ell \text{ أصمّ إذن يمكن تسميته})\\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 إذا كان $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ $e^{\imath k\theta} = 1$ منه : $S = \sum_{k=-n}^{n} 1 = 2n+1$.

• 3 إذا كان $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ :

$$S = \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath k\theta} = e^{-\imath n\theta} \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath n\theta + \imath k\theta} = e^{-\imath n\theta} \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath(n+k)\theta} \overset{\boxed{\ell = n+k}}{=} e^{-\imath n\theta} \sum_{\ell=0}^{2n} e^{\imath \ell\theta}$$
$$= e^{-\imath n\theta} \sum_{\ell=0}^{2n} \left(e^{\imath\theta}\right)^{\ell} = e^{-\imath n\theta} \frac{e^{\imath(2n+1)\theta} - 1}{e^{\imath\theta} - 1} = e^{-\imath n\theta} \frac{e^{\imath\left(\frac{2n+1}{2}\right)\theta} 2\imath \sin\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{e^{\imath\frac{\theta}{2}} 2\imath \sin\frac{\theta}{2}}$$
$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

ملاحظة 54 : ◁ يمكن حلّ التمرين بطريقة أخرى : وجدنا في السؤال الأوّل أنّ $S = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta$ و بالتالي :

• إذا كان $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ $S = 1 + 2n \cos k\theta = 1$ ؛

• و إذا كان $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ :

$$S = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\left(e^{\imath k\theta}\right) = 1 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{\imath\theta}\right)^{k}\right)$$
$$= 1 + 2\operatorname{Re}\left(e^{\imath\theta} \cdot \frac{e^{\imath n\theta} - 1}{e^{e^{\imath\theta}-1}}\right) = 1 + 2\operatorname{Re}\left(e^{\imath\theta} \cdot \frac{e^{\imath n\theta/2}\left(e^{\imath n\theta/2} - e^{-\imath n\theta/2}\right)}{e^{\imath\theta/2}\left(e^{\imath\theta/2} - e^{-\imath\theta/2}\right)}\right)$$
$$= 1 + 2\operatorname{Re}\left(e^{\imath\theta} \cdot \frac{2\imath e^{\imath n\theta/2} \sin\frac{n\theta}{2}}{2\imath e^{\imath\theta/2} \sin\frac{\theta}{2}}\right) = 1 + 2\operatorname{Re}\left(e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)\imath\theta} \frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$
$$= 1 + 2\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{(n+1)\theta}{2}$$

لكن [5] :

$$2\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2} = \sin\left(\frac{n\theta}{2} + \frac{(n+1)\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\theta}{2} - \frac{(n+1)\theta}{2}\right)$$
$$= \sin\frac{(2n+1)\theta}{2} + \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}$$

منه :

$$S = 1 + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$= 1 + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} - 1 = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

و هي نفس النتيجة.

▷

■

[5] نُذكّر أنّ : $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

242 ☙ α ، β ، ρ أعداد حقيقية و n عدد طبيعي بحيث $n \geq 1$. أحسب :

• $A = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \cos(\alpha + k\beta)$ • $B = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \sin(\alpha + k\beta)$

الحلّ.

• إذا كان $\rho e^{\imath\beta} = 1$ أي إذا كان $\rho = 1$ و $\beta = 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ :

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\alpha = n\cos\alpha$$
$$B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\alpha = n\sin\alpha$$

• إذا كان $\rho e^{\imath\beta} \neq 1$ أي إذا كان $\rho \neq 1$ أو $\beta \neq 0 \pmod{2\pi}$ فبوضع $C = A + \imath B$ يكون :

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \left(\cos(\alpha + k\beta) + \imath \sin(\alpha + k\beta)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k e^{\imath(\alpha+k\beta)} \\
&= e^{\imath\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\rho e^{\imath\beta}\right)^k = e^{\imath\alpha} \frac{1 - \rho^n e^{\imath n\beta}}{1 - \rho e^{\imath\beta}} \\
&= e^{\imath\alpha} \frac{\left(1 - \rho^n e^{\imath n\beta}\right)\left(1 - \rho\cos\beta + \imath\rho\sin\beta\right)}{\left(1 - \rho\cos\beta\right)^2 + \rho^2\sin^2\beta} \\
&= e^{\imath\alpha} \frac{\left(1 - \rho^n e^{\imath n\beta}\right)\left(1 - \rho e^{-\imath\beta}\right)}{1 - 2\rho\cos\beta + \rho^2\cos^2\beta + \rho^2\sin^2\beta} \\
&= e^{\imath\alpha} \frac{1 - \rho e^{-\imath\beta} - \rho^n e^{\imath n\beta} + \rho^{n+1} e^{\imath(n-1)\beta}}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\beta} \\
&= \frac{e^{\imath\alpha} - \rho e^{\imath(\alpha-\beta)} - \rho^n e^{\imath(\alpha+n\beta)} + \rho^{n+1} e^{\imath(\alpha+(n-1)\beta)}}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\beta}
\end{aligned}$$

و بأخذ الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي ينتج :

$$A = \frac{\cos\alpha - \rho\cos(\alpha - \beta) - \rho^n\cos(\alpha + n\beta) + \rho^{n+1}\cos(\alpha + (n-1)\beta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\beta}$$

و

$$B = \frac{\sin\alpha - \rho\sin(\alpha - \beta) - \rho^n\sin(\alpha + n\beta) + \rho^{n+1}\sin(\alpha + (n-1)\beta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos\beta}$$

■

243 ☙ ليكن $\omega = e^{2\imath\pi/7}$. أحسب العددين $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ و $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.

الحلّ. ω جذر سابع للوحدة لأنّ $\omega^7 = \left(e^{2\imath\pi/7}\right)^7 = e^{2\imath\pi} = 1$ منه $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$ (أنظر المبرهنة 14 صفحة 33) .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• لدينا من جهة : $A+B=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6=-1$.

• و من جهة أخرى :

$$\begin{aligned}A\cdot B&=\left(\omega+\omega^2+\omega^4\right)\left(\omega^3+\omega^5+\omega^6\right)\\&=\omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10}\end{aligned}$$

لكن : $\omega^7=1$ ، $\omega^8=\omega^7\cdot\omega=\omega$ ، $\omega^9=\omega^7\cdot\omega^2=\omega^2$ و $\omega^{10}=\omega^7\cdot\omega^3=\omega^3$ منه :

$$\begin{aligned}A\cdot B&=\omega^4+\omega^6+1+\omega^5+1+\omega+1+\omega^2+\omega^3\\&=2+\left(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6\right)=2+0=2\end{aligned}$$

إذن A و B هما حلاّ المعادلة $Z^2-(-1)Z+2=0$ أي $Z^2+Z+2=0$.

مميّز هذه الأخيرة هو $\Delta=(1)^2-4\times1\times2=-7=\left(\imath\sqrt{7}\right)^2$ منه الحلاّن :

$Z_1=\dfrac{-1-\imath\sqrt{7}}{2}$ و $Z_2=\overline{Z_1}=\dfrac{-1+\imath\sqrt{7}}{2}$.

لكن :

$$\operatorname{Im}(A)=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}\geq0$$

موجب لأنّ $\sin\dfrac{2\pi}{7}\geq0$ (لأنّ $0<\dfrac{2\pi}{7}<\pi$) و $\sin\dfrac{4\pi}{7}+\sin\dfrac{8\pi}{7}\geq0$.

لإثبات هذا الأخير، نضع $x=\dfrac{4\pi}{7}$ منه $\sin x+\sin(2x)=\sin x\,(1+2\cos x)\geq0$ و هو عدد موجب لكون $\sin x\geq0$ (لأنّ $0<x<\pi$) و $1+2\cos x\geq0$ (لأنّ $0<x<\dfrac{2\pi}{3}$ و دالة جيب التمام cos متناقصة على $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$) .

في الأخير : $\operatorname{Im}(A)\geq0$ إذن $A=Z_2=\dfrac{-1+\imath\sqrt{7}}{2}$ و $B=Z_1=\dfrac{-1-\imath\sqrt{7}}{2}$.

ملاحظة 55 : ◁ بما أنّ $|\omega|=1$ فإنّ $\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$ منه $\overline{\omega^k}=\dfrac{1}{\omega^k}=\dfrac{\omega^7}{\omega^k}=\omega^{7-k}$ و بالتالي :

$\overline{B}=\overline{\omega^3}+\overline{\omega^5}+\overline{\omega^6}=\omega^{7-3}+\omega^{7-5}+\omega^{7-6}=\omega^4+\omega^2+\omega=A$

▷

■

244 هدفنا في هذا التمرين هو حساب كلاًّ من $\cos\dfrac{\pi}{5}$ و $\cos\dfrac{\pi}{17}$ (باستعمال الجذور).

الجزء الأول

• 1 أكتب، على الشكل المثلثي، حلول المعادلة :

$$z^5-1=0 \qquad (6)$$

• 2 ليكن Q كثير الحدود المعرف بالعبارة : $z^5-1=(z-1)\,Q(z)$.

أثبت أنّ $Q(z)=z^2\left(t^2+t-1\right)$ حيث $t=z+\dfrac{1}{z}$ ، ثمّ استنتج عبارة جذور كثير الحدود Q .

• 3 إستنتج قيمة كلاًّ من : $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ ، $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ ، $\cos\dfrac{\pi}{5}$ ، $\sin\dfrac{2\pi}{5}$ ، $\sin\dfrac{4\pi}{5}$ و $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

أنظر التمرين ⟦ صفحة ⟧

الجزء الثاني

نضع فيما يلي $\theta = \frac{\pi}{17}$.

يجب إيجاد القِيَم الدقيقة (المضبوطة) للحسابات المطلوبة ولا يُسمح بإعطاء قِيَم تقريبية لها باستعمال الآلة الحاسبة.

• 1. أثبت أنّه :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall h \in]0, 2\pi[,\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) = \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$

• 2. نضع : $\begin{cases} x_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ x_2 = \cos\theta + \cos 9\theta + \cos 13\theta + \cos 15\theta \end{cases}$.

(ا) أثبت أنّ : $x_1 > 0$ (لا تنسَ أنّ $\theta = \frac{\pi}{17}$) .

(ب) أثبت أنّ : $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$.

(ج) نبحث فيما يلي عن قيمة x_1x_2 :

(i) أنشر العبارة x_1x_2 ثم أكتب على شكلها الخطي الجداءات المُتحصَّل عليها.

(ii) إستنتج أنّ : $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1$.

(د) إستنتج قيمة كلاً من x_1 و x_2 .

• 3. نضع : $\begin{cases} y_1 = \cos 3\theta + \cos 5\theta\ , & y_2 = \cos 7\theta + \cos 11\theta \\ y_3 = \cos\theta + \cos 13\theta\ , & y_4 = \cos 9\theta + \cos 15\theta \end{cases}$

(ا) باتباع الطريقة السابقة، أحسب قيمة y_1y_2 و y_3y_4 .

(ب) إستنتج قيمة كلاً من y_1 ، y_2 ، y_3 و y_4 .

• 4. أعطِ قيمة $\cos\frac{\pi}{17}$ (باستعمال الجذور).

أنظر التمرين 245 صفحة 342

الحلّ.

الجزء الأول

• 1. جذور المعادلة (6) هي الجذور الخامسة للوحدة أي الأعداد $z_k = e^{2\imath k\pi/5}$ مع $0 \le k \le 4$ أي الأعداد $z_0 = 1 = \cos 0 + \imath \sin 0$ و :

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + \imath\sin\frac{2\pi}{5}\ ;\quad z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + \imath\sin\frac{4\pi}{5}\ ;\quad z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + \imath\sin\frac{6\pi}{5}\ ;\quad z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + \imath\sin\frac{8\pi}{5}$$

و بما أنّ معاملات Q حقيقية فإنّ جذوره مترافقة مثنى مثنى : نتحقق بسهولة أنّ $z_4 = \overline{z_1}$ و $z_3 = \overline{z_2}$ (مثلاً : بما أنّ $|z_k| = 1$ فإنّ : $\overline{z_k} = \frac{1}{z_k} = e^{-2\imath k\pi/5} = e^{2\imath(5-k)\pi/5} = z_{5-k}$) .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 2 بقسمة z^5-1 على $z-1$ نجد $Q(z)=1+z+z^2+z^3+z^4$. و بما أنّ $z=0$ ليس جذراً لـ Q فإنّ :

$$Q(z)=z^2\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2\right)=z^2\left(z^2+\frac{1}{z^2}+1+z+\frac{1}{z}\right)$$
$$=z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+1+t\right)=z^2\left(t^2+t-1\right)$$

منه :

$$Q(z)=0 \iff t^2+t-1=0 \iff t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

• 3 لدينا :

• إذا كان $t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ فإنّ :

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \iff z=\frac{-1-\sqrt{5}-\imath\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-1-\sqrt{5}+\imath\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

• و إذا كان $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ فإنّ :

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \iff z=\frac{-1+\sqrt{5}-\imath\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{أو} \quad z=\frac{-1+\sqrt{5}+\imath\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

إذن جذور $Q(z)$ هي الأعداد :

$$\frac{-1-\sqrt{5}-\imath\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};\quad \frac{-1-\sqrt{5}+\imath\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};$$
$$\frac{-1+\sqrt{5}-\imath\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};\quad \frac{-1+\sqrt{5}+\imath\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

لكن دالة جيب التمام cos متناقصة تماماً على المجال $[0,\pi]$ و بما أنّ $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}<\frac{4\pi}{5}<\pi$ فإنّ $0<\cos\frac{2\pi}{5}$ و

إذن $\cos\frac{4\pi}{5}<0$ و $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ و $\boxed{\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}}$

بالمثل، دالة الجيب sin متزايدة تماماً على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و بما أنّ $0<\frac{\pi}{5}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$ فإنّ :

$$\sin\frac{4\pi}{5}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{\pi}{5}<\sin\frac{2\pi}{5}$$

منه $\boxed{\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}$ و $\boxed{\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$ منه $\boxed{\sin\frac{\pi}{5}=\sin\frac{4\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$.

في الأخير :

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+\imath\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};\qquad z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\imath\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$
$$z_3=\overline{z_2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-\imath\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};\qquad z_4=\overline{z_1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-\imath\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

بالإضافة إلى ذلك : $\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\frac{\pi}{5}$ إذن $\boxed{\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$.

الجزء الثاني

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 1 ليكن $a \in \mathbb{R}$ ، $h \in]0, 2\pi[$ و $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}\left(e^{\imath(a+kh)}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\imath(a+kh)}\right)$$

و بما أنّ $h \in]0, 2\pi[$ فإنّ $e^{\imath h} \neq 1$ منه :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\imath(a+kh)} = e^{\imath a} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\imath h}\right)^k = e^{\imath a} \cdot \frac{\left(e^{\imath h}\right)^n - 1}{e^{\imath h}} = e^{\imath a} \cdot \frac{e^{\imath n h} - 1}{e^{\imath h} - 1}$$

$$= e^{\imath a} \cdot \frac{e^{\imath \frac{nh}{2}} \left(e^{\imath \frac{nh}{2}} - e^{-\imath \frac{nh}{2}}\right)}{e^{\imath \frac{h}{2}} \left(e^{\imath \frac{h}{2}} - e^{-\imath \frac{h}{2}}\right)} = e^{\imath a} \cdot \frac{e^{\imath \frac{nh}{2}} \times 2\imath \sin \frac{nh}{2}}{2\imath \sin \frac{h}{2}}$$

$$= e^{\imath\left(a+\frac{nh}{2}\right)} \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \left[\cos\left(a+\frac{nh}{2}\right) + \imath \sin\left(a+\frac{nh}{2}\right)\right]$$

بأخذ الجزء الحقيقي للعبارة الأخيرة نحصل على المطلوب.

• 2 لدينا :

$$x_1 = (\cos 3\theta + \cos 11\theta) + (\cos 5\theta + \cos 7\theta) = 2\cos\frac{3\theta+11\theta}{2}\cos\frac{3\theta-11\theta}{2} + 2\cos\frac{5\theta+7\theta}{2}\cos\frac{5\theta-7\theta}{2}$$

$$= 2\cos 7\theta \cos 4\theta + 2\cos 6\theta \cos\theta$$

بما أنّ $\theta = \frac{\pi}{17}$ فإنّ $0 < \theta < 4\theta < 6\theta < 7\theta < \frac{\pi}{2}$ منه $\cos k\theta > 0$ لأجل $k \in \{1, 4, 6, 7\}$ إذن $x_1 > 0$.

• 3 نضع $a = \theta$ ، $h = 2\theta$ و $n = 8$. بما أنّ $h \in]0, 2\pi[$ فحسب السؤال الأول :

$$x_1 + x_2 = \sum_{k=0}^{7} \cos(\theta + 2k\theta) = \frac{\sin\frac{8\times 2}{2}\cos\left(\theta + 7\times\frac{2\theta}{2}\right)}{\sin\frac{2\theta}{2}} = \frac{\sin 8\theta \cos 8\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 16\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{2\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{2\sin\theta} = \frac{1}{2}$$

• 4 (أ) نضع $z = e^{\imath\theta}$ فيكون $|z| = 1$ ، $\bar{z} = z^{-1}$ و $2\cos k\theta = z^k + z^{-k}$ منه :

$$2x_1 \cdot 2x_2 = \left(z^3 + z^{-3} + z^5 + z^{-5} + z^7 + z^{-7} + z^{11} + z^{-11}\right)\left(z + z^{-1} + z^9 + z^{-9} + z^{13} + z^{-13} + z^{15} + z^{-15}\right)$$

لكن $z^{17} = e^{\imath\pi} = -1$ منه $z^{-k} = -z^{17-k}$ إذن :

$$2x_1 \cdot 2x_2 = \left(z^3 + z^{-3} + z^5 + z^{-5} + z^7 + z^{-7} + z^{-6} + z^6\right)\left(z + z^{-1} + z^{-8} + z^8 + z^{-4} + z^4 + z^{-2} + z^2\right)$$

$$= z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + 2z^{-6} + z^{-7} + 2z^{-8} + 2z^8 + 3z^7 + 2z^6 + 4z^5 + 3z^4 + 3z^3 + 4z + 4z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$+3z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5} + 2z^{-6} + 3z^{-7} + 2z^{-8} + 2z^8 + z^7 + 2z^6 + z^4 + z^3 + 4z^2$$

$$= 4\sum_{k=1}^{8} z^k + 4\sum_{k=1}^{8} z^{-k} = 4\sum_{k=1}^{8} z^k - 4\sum_{k=9}^{16} z^{k-17} = 4\sum_{k=1}^{8} z^k - 4\sum_{k=9}^{16}\left(-z^k\right)$$

$$= 4\sum_{k=1}^{8} z^k + 4\sum_{k=9}^{16} z^k = 4\sum_{k=1}^{16} z^k = 4(-1) = -4$$

منه :

$$x_1 x_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

(لأنّ $\sum_{k=0}^{16} z^k = 0$ منه $\sum_{k=1}^{16} z^k = -1$) .

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ب) بما أنّ $x_1+x_2=\frac{1}{2}$ و $x_1x_2=-1$ فإنّ x_1 و x_2 هي حلول المعادلة $X^2-\frac{1}{2}X-1=0$.

حلول هذه الأخيرة هي $\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$ ؛ و بما أنّ $x_1>0$ فإنّ : $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ و $x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$.

5. (أ)

لدينا : $2y_1=z^3+z^{-3}+z^5+z^{-5}$

و $2y_2=z^7+z^{-7}+z^{11}+z^{-11}$

منه : $4y_1y_2=\left(z^3+z^{-3}+z^5+z^{-5}\right)\left(z^7+z^{-7}+z^{11}+z^{-11}\right)$

$$\begin{aligned}&=z^2+z^{-2}+z^4+z^{-4}+z^6+z^{-6}+z^8+z^{-8}\\&\quad+z^{10}+z^{-10}+z^{12}+z^{-12}+z^{14}+z^{-14}+z^{16}+z^{-16}\\&=2\big(\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cos 6\theta+\cos 8\theta+\cos 10\theta+\cos 12\theta\\&\quad+\cos 14\theta+\cos 16\theta\big)\\&=2\sum_{k=1}^{8}\cos 2k\theta=2\left(-1+\sum_{k=0}^{9-1}\cos\left(0+k\times 2\theta\right)\right)\\&=2\left(-1+\frac{\sin\frac{9\times 2\theta}{2}\cos\left(0+8\times\frac{2\theta}{2}\right)}{\sin\frac{2\theta}{2}}\right)=2\left(-1+\frac{\sin 9\theta\cos 8\theta}{\sin\theta}\right)\\&=2\left(-1+\frac{\sin(\pi-8\theta)\cos 8\theta}{\sin\theta}\right)=2\left(-1+\frac{\sin 8\theta\cos 8\theta}{\sin\theta}\right)\\&=2\left(-1+\frac{\frac{1}{2}\sin 16\theta}{\sin\theta}\right)=2\left(-1+\frac{\sin(\pi-\theta)}{2\sin\theta}\right)\\&=2\left(-1+\frac{\sin\theta}{2\sin\theta}\right)=2\left(-1+\frac{1}{2}\right)=-1\end{aligned}$$

إذن : $y_1y_2=-\frac{1}{4}$

بالمثل : $4y_3y_4=\left(z+z^{-1}+z^4+z^{-4}\right)\left(z^8+z^{-8}+z^2+z^{-2}\right)$

$$\begin{aligned}&=z^2+z^{-2}+z^4+z^{-4}+z^8+z^{-8}+z^{10}+z^{-10}\\&\quad+z^{14}+z^{-14}+z^{16}+z^{-16}+z^{22}+z^{-22}+z^{28}+z^{-28}\\&=z^2+z^{-2}+z^4+z^{-4}+z^8+z^{-8}+z^{10}+z^{-10}\\&\quad+z^{14}+z^{-14}+z^{16}+z^{-16}+z^{12}+z^{-12}+z^6+z^{-6}\end{aligned}$$

(لأنّ $z^k=z^{34-k}$)

$=2\sum_{k=1}^{8}\cos 2k\theta=-1$ (حسب ما سبق)

إذن : $y_3y_4=-\frac{1}{4}$

(ب) • نلاحظ أنّ $y_1+y_2=x_1$ و وجدنا أنّ $y_1y_2=-\frac{1}{4}$ إذن y_1 و y_2 هي حلول المعادلة $X^2-x_1X-\frac{1}{4}=0$ أي تساوي $\frac{x_1\pm\sqrt{x_1^2+1}}{2}$.

لكن دالة جيب التمام cos متناقصة تماماً على المجال $[0,\pi]$ و $0<3\theta<5\theta<7\theta<\frac{\pi}{2}<11\theta<\pi$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منه $y_1 > y_2$ إذن $y_1 = \dfrac{x_1 + \sqrt{x_1^2+1}}{2}$ و $y_2 = \dfrac{x_1 - \sqrt{x_1^2+1}}{2}$. لكن :

$$x_1^2 + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1+17+2\sqrt{17}+16}{16} = \frac{34+2\sqrt{17}}{16}$$

إذن :

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} + \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

و

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4} - \frac{\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}$$

• نلاحظ أنّ $y_3+y_4 = x_2$ و وجدنا أنّ $y_3y_4 = -\dfrac{1}{4}$ إذن y_3 و y_4 هي حلول المعادلة $X^2 - x_2X - \dfrac{1}{4} = 0$ أي تساوي $\dfrac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2+1}}{2}$.

لكن cos متناقصة تماماً على $[0,\pi]$ و $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2} < 9\theta < 13\theta < 15\theta < \text{pi}$ منه $y_3 > y_4$ إذن

$y_3 = \dfrac{x_2 + \sqrt{x_2^2+1}}{2}$ و $y_4 = \dfrac{x_2 - \sqrt{x_2^2+1}}{2}$. لكن :

$$x_2^2 + 1 = \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^2 + 1 = \frac{1+17-2\sqrt{17}+16}{16} = \frac{34-2\sqrt{17}}{16}$$

إذن :

$$y_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} + \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

و

$$y_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4} - \frac{\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4}\right) = \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}$$

6• نتبع نفس الطريقة و نضع $t_1 = \cos\theta$ و $t_2 = \cos 13\theta$. من الواضح أنّ $t_1 > t_2$ و $t_1 + t_2 = y_3$. من جهة أخرى، لدينا :

$$\begin{aligned} 4t_1t_2 &= \left(z+z^{-1}\right)\left(z^{13}+z^{-13}\right) \\ &= z^{12}+z^{-12}+z^{14}+z^{-14} = 2\cos 12\theta + 2\cos 14\theta = 2\cos(\pi-5\theta) + 2\cos(\pi-3\theta) \\ &= -2\cos 5\theta - 2\cos 3\theta = -2y_1 \end{aligned}$$

منه :

$$t_1t_2 = \frac{-2y_1}{4} = -\frac{1}{2}y_1$$

إذن t_1 و t_2 هي حلول $X^2 - y_3X - \dfrac{1}{2}y_1 = 0$ أي تساوي $\dfrac{y_3 \pm \sqrt{y_3^2+2y_1}}{2}$. لكن :

$$y_3^2 + 2y_1 = \left(\frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}\right)^2 - 2\left(\frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}\right)$$

$$= \frac{26-2\sqrt{17}-\left(-1+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{32} + \frac{8\left(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}\right)}{32}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$= \frac{34 + 6\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{32}$$

منه :

$$\sqrt{y_3^2 + 2y_1} = \sqrt{\frac{34 + 6\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + \left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{32}}$$

$$= \frac{\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2\left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}{8}$$

منه :

$$\frac{y_3 \pm \sqrt{y_3^2 + 2y_1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} \pm \frac{\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2\left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}{8}\right)$$

و بما أنّ $t_1 > t_2$ و $t_1 = \cos\theta = \cos\frac{\pi}{17}$ فإنّ :

$$\cos\frac{\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2\left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\right)$$

ملاحظة 56 : ◁ بما أنّ $0 < \frac{\pi}{17} < \pi$ فإنّ $\sin\frac{\pi}{17} > 0$ منه $\sin\frac{\pi}{17} = +\sqrt{1 - \cos^2\frac{\pi}{17}}$ ؛ و بما أنّ $t_2 = \cos 13\theta$ فإنّ :

$$\cos\frac{13\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} + 2\left(1 - \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}\right)$$

يمكن اتباع نفس الطريقة لإيجاد $\cos 3\theta$ و $\cos 5\theta$: نضع $t_3 = \cos 3\theta$ و $t_4 = \cos 5\theta$ فيكون $y_1 = t_3 + t_4$ و $4t_3t_4 = 2\cos 8\theta + 2\cos 2\theta = -2\cos 9\theta - 2\cos 15\theta = -2y_4$ ثمّ نتمم الحسابات كما سبق. نفس الشيء بالنسبة إلى $\cos 7\theta$ و $\cos 11\theta$ ، و بالنسبة إلى $\cos 9\theta$ و $\cos 15\theta$.

يمكن أيضاً استخدام المتطابقات المثلثية، مثلاً : $\cos 15\theta = \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta = 1 - 2\cos^2\theta$ ...إلخ.

▷

■

245 هدفنا في هذه المسألة هو إثبات صيغة **فوص** (Gauss) — 1796 م :

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\left(-1 + \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right)$$

نضع $\theta = \frac{2\pi}{17}$ ؛ و $z = e^{i\theta}$:

$$a_1 = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^9 + z^{13} + z^{15} + z^{16} \qquad c_1 = z + z^{16}$$

$$a_2 = z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{14} \qquad c_2 = z^4 + z^{13}$$

$$b_1 = z + z^4 + z^{13} + z^{16} \qquad b_3 = z^3 + z^5 + z^{12} + z^{14}$$

$$b_2 = z^2 + z^8 + z^9 + z^{15} \qquad b_4 = z^6 + z^7 + z^{10} + z^{11}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

1• (ا) أثبت أنّ : $a_1 + a_2 = -1$.

(ب) أثبت أنّ $a_2 < 0$.

(ج) أثبت أنّ : $a_1 a_2 = -4$.

نُذكّر بالمتطابقة المثلثية :

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$

(د) أوجد العبارة الجبرية لكل من a_1 و a_2 .

2• (ا) أثبت أنّ : $b_1 + b_2 = a_1$.

(ب) أثبت أنّ : $b_2 < b_1$.

(ج) أثبت أنّ : $b_1 b_2 = -1$.

(د) أوجد عبارة b_1 و b_2 بدلالة a_1 .

(هـ) باتباع نفس الطريقة، عبّر عن b_3 و b_4 بدلالة a_2 .

3• (ا) أثبت أنّ : $c_1 + c_2 = b_1$.

(ب) أثبت أنّ : $c_2 < c_1$.

(ج) أثبت أنّ : $c_1 c_2 = b_3$.

(د) أوجد عبارة c_1 و c_2 بدلالة b_1 و b_3 .

4• إستنتج قيمة $\cos\theta$ (أي صيغة **ڤوص**) .

أنظر التمرين 244 صفحة 336

الحلّ. بدايةً، نلاحظ أنّ $z^{17} = 1$ و $z \neq 1$ ؛ و أنّ $z^k + \bar{z}^k = z^k + z^{-k} = 2\cos(k\theta)$ و $z^{17-k} = z^{17} \cdot z^{-k} = z^{-k}$.

1• (ا) لدينا :

$$a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^{16} z^k = -1 + \sum_{k=0}^{16} z^k = -1 + \frac{z^{17}-1}{z-1} = -1 + 0 = -1$$

(ب) بما أنّ $\theta = \frac{2\pi}{17}$ فإنّ :

$$0 < \theta < 2\theta < 3\theta < 4\theta < \frac{\pi}{2} < 5\theta < 6\theta < 7\theta < 8\theta < \pi$$

و بما أنّ دالة جيب التمام cos متناقصة تماماً على المجال $[0,\pi]$ فإنّ $\cos(k\theta) > 0$ لأجل $1 \leq k \leq 4$ و $\cos(k\theta) < 0$ لأجل $5 \leq k \leq 8$. لكن :

$$\begin{aligned} a_1 &= z + z^2 + z^4 + z^8 + z^9 + z^{13} + z^{15} + z^{16} = z + z^{17-1} + z^2 + z^{17-2} + z^4 + z^{17-4} + z^8 + z^{17-8} \\ &= z + z^{-1} + z^2 + z^{-2} + z^4 + z^{-4} + z^8 + z^{-8} = 2\cos\theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 4\theta + 2\cos 8\theta \\ a_2 &= z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{14} = z^3 + z^{17-3} + z^5 + z^{17-5} + z^6 + z^{17-6} + z^7 + z^{17-7} \\ &= z^3 + z^{-3} + z^5 + z^{-5} + z^6 + z^{-6} + z^7 + z^{-7} = 2\cos 3\theta + 2\cos 5\theta + 2\cos 6\theta + 2\cos 7\theta \\ &= 2 \times 2\cos\frac{3\theta+6\theta}{2}\cos\frac{3\theta-6\theta}{2} + 2\cos 5\theta + 2\cos 7\theta = 4\cos\frac{9\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + 2\cos 5\theta + 2\cos 7\theta \end{aligned}$$

بما أنّ $0 < \frac{3\theta}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{9\theta}{2} < \pi$ فإنّ $\cos\frac{3\theta}{2} > 0$ و $\cos\frac{9\theta}{2} < 0$ إذن فالجداء $\cos\frac{9\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}$ سالب تماماً

و بما أنّ $\cos 5\theta < 0$ و $\cos 7\theta < 0$ فإنّ $a_2 < 0$.

(ج) لدينا :

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= (z + z^2 + z^4 + z^8 + z^9 + z^{13} + z^{15} + z^{16})(z^3 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{10} + z^{11} + z^{12} + z^{14}) \\ &= z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + 2z^8 + 2z^9 + z^{10} + 3z^{11} + 3z^{12} + 3z^{13} + 4z^{14} + 4z^{15} + 4z^{16} + 4z^{18} \\ &\quad + 4z^{19} + 4z^{20} + 3z^{21} + 3z^{22} + 3z^{23} + z^{24} + 2z^{25} + 2z^{26} + 3z^{27} + z^{28} + z^{29} + z^{30} \end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

لكن إذا كان r باقي قسمة k على 17 فإنّ $z^k = z^r$ لأنّ $z^{17} = 1$ إذن :

$$\begin{aligned}a_1a_2 &= z^4+z^5+z^6+3z^7+2z^8+2z^9+z^{10}+3z^{11}+3z^{12}+3z^{13}+4z^{14}+4z^{15}+4z^{16}+4z\\ &\quad +4z^2+4z^3+3z^4+3z^5+3z^6+z^7+2z^8+2z^9+3z^{10}+z^{11}+z^{12}+z^{13}\\ &= 4\left(z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8+z^9+z^{10}+z^{11}+z^{12}+z^{13}+z^{14}+z^{15}+z^{15}\right)\\ &= 4\left(a_1+a_2\right) = 4\left(-1\right) = -4\end{aligned}$$

(د) بما أنّ $a_1+a_2 = -1$ و $a_1a_2 = -4$ فإنّ a_1 و a_2 هي حلول المعادلة $X^2+X-4=0$ أي تساوي $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$ و بما أنّ $a_2 < 0$ فإنّ $a_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ و $a_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$.

2. (ا) لدينا :

$$b_1+b_2 = z+z^4+z^{13}+z^{16}+z^2+z^8+z^9+z^{15} = a_1$$

(ب) لدينا :

$$\begin{aligned}b_1 &= z+z^4+z^{13}+z^{16} = z+z^{-1}+z^4+z^{-4} = 2\cos\theta+2\cos 4\theta\\ b_2 &= z^2+z^8+z^9+z^{15} = z^2+z^{-2}+z^8+z^{-8} = 2\cos 2\theta+2\cos 8\theta\end{aligned}$$

و بما أنّ دالة جيب التمام cos متناقصة تماماً على $[0,\pi]$ فإنّ $\cos\theta < \cos 2\theta$ و $\cos 4\theta < \cos 8\theta$ إذن $b_1 > b_2$.

(ج) لدينا :

$$\begin{aligned}b_1b_2 &= \left(z+z^4+z^{13}+z^{16}\right)\left(z^2+z^8+z^9+z^{15}\right)\\ &= z^3+z^6+z^9+z^{10}+z^{12}+z^{13}+z^{15}+z^{16}+z^{18}+z^{19}+z^{21}+z^{22}+z^{24}+z^{25}+z^{28}+z^{31}\\ &= z^3+z^6+z^9+z^{10}+z^{12}+z^{13}+z^{15}+z^{16}+z+z^2+z^4+z^5+z^7+z^8+z^{11}+z^{14}\\ &= a_1+a_2 = -1\end{aligned}$$

(د) بما أنّ $b_1+b_2 = a_1$ و $b_1b_2 = -1$ فإنّ b_1 و b_2 هي حلول المعادلة $X^2-a_1X-1=0$ أي تساوي $\frac{a_1\pm\sqrt{a_1^2+4}}{2}$ و بما أنّ $b_2 < b_1$ فإنّ $b_1 = \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4}}{2}$ و $b_2 = \frac{a_1-\sqrt{a_1^2+4}}{2}$.

(هـ) لدينا :

$$b_3+b_4 = z^3+z^5+z^{12}+z^{14}+z^6+z^7+z^{10}+z^{11} = a_2$$

$$b_3 = z^3+z^5+z^{12}+z^{14} = z^3+z^{-3}+z^5+z^{-5} = 2\cos 3\theta+2\cos 5\theta$$

$$b_4 = z^6+z^7+z^{10}+z^{11} = z^6+z^{-6}+z^7+z^{-7} = 2\cos 6\theta+2\cos 7\theta$$

منه :

$$\begin{aligned}b_3b_4 &= \left(z^3+z^5+z^{12}+z^{14}\right)\left(z^6+z^7+z^{10}+z^{11}\right)\\ &= z^9+z^{10}+z^{11}+z^{12}+z^{13}+z^{14}+z^{15}+z^{16}+z^{18}\\ &\quad +z^{19}+z^{20}+z^{21}+z^{22}+z^{23}+z^{24}+z^{25}\\ &= z^9+z^{10}+z^{11}+z^{12}+z^{13}+z^{14}+z^{15}+z^{16}\\ &\quad +z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8\\ &= a_1+a_2 = -1\end{aligned}$$

إذن b_3 و b_4 هي حلول المعادلة $X^2-a_2X-1=0$ أي تساوي $\frac{a_2\pm\sqrt{a_2^2+4}}{2}$. لكن cos متناقصة تماماً على $[0,\pi]$ إذن $b_4 < b_3$ منه $b_3 = \frac{a_2+\sqrt{a_2^2+4}}{2}$ و $b_4 = \frac{a_2-\sqrt{a_2^2+4}}{2}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

3• (ا) لدينا :

$$c_1 + c_2 = z + z^{16} + z^4 + z^{13} = b_1$$

(ب) لدينا :

$$c_1 = z + z^{16} = z + z^{-1} = 2\cos\theta$$
$$c_2 = z^4 + z^{13} = z^4 + z^{-4} = 2\cos 4\theta$$

و بما أنّ cos متناقصة تماماً على $[0, \pi]$ فإنّ $c_2 < c_1$.

(ج) لدينا :

$$c_1 c_2 = (z + z^{16})(z^4 + z^{13}) = z^5 + z^{14} + z^{20} + z^{29}$$
$$= z^5 + z^{14} + z^3 + z^{12} = b_3$$

(د) c_1 و c_2 هي حلول المعادلة $X^2 - b_1 X + b_3 = 0$ أي تساوي $\frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_3}}{2}$. لكن $c_2 < c_1$ إذن

$$c_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_3}}{2}$$ و $$c_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_3}}{2}$$.

4• حسب ما سبق : $\cos\theta = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_3}\right)$. و بما أنّ $a_1^2 = 4 - a_1$ (لأنّ a_1 حلّ للمعادلة $X^2 = 4 - X$) فإنّ :

$$b_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} = \frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{4 - a_1}\right) = \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{\left(4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right) + 4}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right)$$
$$b_3 = \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + 4}}{2} = \frac{1}{4}\left(-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)$$
$$b_1^2 = \frac{1}{16}\left(62 + 2\left(-1 + \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{17}\right)$$

في الأخير :

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\left(-1 + \sqrt{17}\right)\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\right)$$

تمكنّا في هذه المسألة من التعبير عن $\cos\frac{2\pi}{17}$ بالعمليات الحسابية $+$ ، $-$ ، $\times$ ، $\div$ و الجذور و هذا يعني أنه بإمكاننا «إنشاء» هذا العدد (أي إنشاء قطعة مستقيمة طولها يساوي $\cos\frac{2\pi}{17}$) باستخدام مسطرة غير مدرّجة و مدور (فرجار) و بالتالي بإمكاننا إنشاء المضلّع المنتظم ذي 17 ضلعاً باستخدام مسطرة غير مدرّجة و مدور (فرجار) و ... الكثير من الصّبر و المثابرة ... ☺ .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$\cos\frac{P}{17}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\sqrt{17}+\frac{1}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})}-\frac{1}{8}\sqrt{\{(17+3\sqrt{17})-\sqrt{(34-2\sqrt{17})}-2\sqrt{(34+2\sqrt{17})}\}};$$

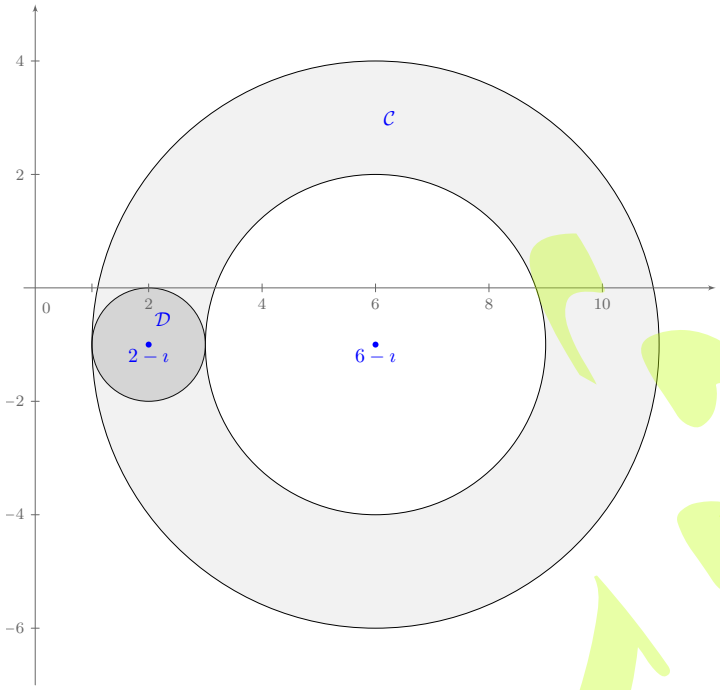
les cosinus des multiples de cet angle ont une forme semblable, les sinus ont un radical de plus. Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties ayant été connue dès le temps d'*Euclide*, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celles qui s'en déduisent (les divisions en 2^μ, 15, 5.2^μ, 5.2^μ, 15.2^μ parties), on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques.

شكل VII.12: Gauss ، في كتابه *Recherches arithmétiques* : كان فخوراً بعمله لدرجة أنه طلب أن تُكتب هذه الصيغة على قبره !

قد نتساءل عن إمكانية إنشاء أيّ مضلع منتظم باستخدام مسطرة غير مدرّجة و مدور ؟ الجواب : لا و العالم **فوص** هو أوّل من توصّل (عام 1801 م) لإيجاد الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن يُحققه العدد الطبيعي n حتى يكون بالإمكان إنشاء المضلّع المنتظم ذي n ضلعاً : يجب أن يكون n من الشكل 2^k أو $2^k \times f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_s$ حيث $k \in \mathbb{N}$ و f_1 ، f_2 ، ... ، f_s أعداد **أوّلية** (مختلفة مثنى مثنى) من الشكل $F_m = 2^{2^m} + 1$ حيث $m \in \mathbb{N}$.
الأعداد F_m تُدعى أعداد **فيرما** (Fermat) لأنه أول من برهن عام 1640م أنّ الأعداد $F_0 = 3$ ، $F_1 = 5$ ، $F_2 = 17$ ، $F_3 = 257$ و $F_4 = 65537$ أوّلية و اعتقد بعدها أنّ الأعداد F_m أولية لكل قِيَم m ؛ لكن في عام 1732م أثبت العالم أولر (Euler) أنّ $F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ ليس أوّلي. و يُعتقد أنّ F_m ليس أوّلي لكل $m \geq 5$ لكن لم يتوصّل أحد –لحد الآن– إلى إثبات صحة أو خطأ هذا الإعتقاد !
هذه الأعداد تكبر بسرعة كبيرة و لحد الآن، الأعداد التي نعلم أنها ليست أولية هي F_m مع $5 \leq m \leq 19$ ، لكن لا نعرف التحليل الكلي لها إلى جداء عوامل أولية إلاّ لـ F_5 ، F_6 ، F_7 ، F_8 ، F_9 و F_{11} . و لا نعرف أيّ عامل أوّلي للعدد F_{14} ! و قد تمّ تحليل F_7 عام 1971م و F_8 عام 1982م .
القضية التي تهمنا هنا هي إنشاء المضلّع المنتظم P_n ذي n ضلعاً :
الطريقة معروفة لأجل P_5 (أنظر التمرين 214 صفحة 305) و توجد عدة طرق لإنشاء P_{17} و أول من توصّل إلى ذلك هو العالم Huguenin و ذلك عام 1803م. بالنسبة إلى P_{257} ، تمكن العالم Richelot من إيجاد طريقة لإنشاءه عام 1832م و يُقال أنّ أمريكياً وجد طريقة لإنشاء P_{65537} بعد 20 سنة من البحث !
إذن لا داعي من محاولة إيجاد صيغ مماثلة لأعداد مثل $\cos\frac{\pi}{13}$ ، $\cos\frac{\pi}{41}$ أو $\cos\frac{\pi}{131}$ ... لأنّ المحاولة ستبوء بالفشل لا محالة ! لكن، و حسب النتيجة التي توصّل إليها العالم **فوص**، من الممكن إيجاد مثل هذه الصيغة لأجل $\cos\frac{\pi}{170}$ أو $\cos\frac{\pi}{257}$ أو ... هل من متطوّع ؟ ☺

ملاحظة : إذا أراد القارئ الكريم معرفة تفاصيل أكثر و التعمّق في الموضوع، فما عليه إلاّ معاينة كتب : **الحقول (الأجسام) و نظرية ڤالوا** (Fields and Galois Theory بالإنجليزية ؛ Corps et théorie de Galois بالفرنسية) مثلاً كتاب : **نظرية جالوا**، تأليف إيان ستيوارت، ترجمة معروف عبدالرحمن سمحان و فوزي أحمد الذكير، النشر العلمي و المطابع – جامعة الملك سعود؛ لكن ذلك يتطلّب مستوىً عالٍ (على الأقل ليسانس) . ■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.13

246

1. أثبت أنّه : $\forall z \in \mathbb{C} : |z-(2-\imath)| \leq 1 \implies 3 \leq |z-6+\imath| \leq 5$.
2. ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

الحلّ. نُذَكِّر بالمتباينة المثلثية و المتباينة المثلثية المعكوسة : إذا كان z و z' عددين مركبين فإنّ : $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ و $|z-z'| \geq |z|-|z'|$.

1. ليكن $z \in \mathbb{C}$ بحيث : $|z-(2-\imath)| \leq 1$. لدينا :
$$|z-6+\imath| = |(z-(2-\imath))+(-4)| \leq |z-(2-\imath)|+|-4| \leq 1+4 \leq 5$$
و من جهة أخرى لدينا :
$$|z-6+\imath| = |(z-(2-\imath))-4| = |4-(z-(2-\imath))| \geq |4|-|z-(2-\imath)| \geq 4-1 \geq 3$$
إذن : $\forall z \in \mathbb{C} : |z-(2-\imath)| \leq 1 \implies 3 \leq |z-6+\imath| \leq 5$.
2. **التفسير الهندسي** : مجموعة النقط ذات اللاحقة z بحيث $|z-(2-\imath)| \leq 1$ هي القرص المُغلق $\mathscr{D}$ الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $2-\imath$ و نصف قطره 1 ؛ و مجموعة النقط ذات اللاحقة z بحيث $3 \leq |z-6+\imath| \leq 5$ هي الحلقة المُغلقة $\mathscr{C}$ التي مركزها النقطة ذات اللاحقة $6-\imath$ و نِصفَا قطرَيْها 3 و 5 .

نتيجة السؤال السابق تعني أنه إذا كانت النقطة M ذات اللاحقة z تنتمي إلى $\mathscr{D}$ فإنّ M تنتمي إلى $\mathscr{C}$ أي أنّ القرص المُغلق $\mathscr{D}$ مُحتَوَى في الحلقة المُغلقة $\mathscr{C}$ (شكل VII.13).

■

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

247 أثبت أنّه لأجل كل عدد مركب $z \in \mathbb{C}$ فإنّ : $|z| \leq |z|^2 + |z-1|$.

الحلّ. ليكن $z \in \mathbb{C}$ عدداً مركبا. لدينا (المتباينة المثلثية) :

$$|z| = |z - z^2 + z^2| \leq |z - z^2| + |z^2| = |z| \cdot |z-1| + |z^2|$$

و نميّز حالتين :

- إذا كان $|z| \leq 1$ فإنّ $|z-1| \leq |z-1|$ منه $|z| \cdot |z-1| \leq |z|^2 + |z-1|$ ؛
- و إذا كان $|z| \geq 1$ فإنّ $|z|^2 \leq |z|$ و بما أنّ $|z-1| \geq 0$ فإنّ $|z|^2 + |z-1| \leq |z|^2 \leq |z|$.

إذن في كلّ الحالات : $|z| \leq |z|^2 + |z-1|$. ■

248 أثبت المتطابقتين التاليتين (z_1 و z_2 عددان مركبان) :

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$
$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$

استنتج أنّ : $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$.

أنظر التمرين 250 صفحة 349

الحلّ. لدينا :

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\,(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)\\ &= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 = |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} + |z_2|^2\\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2\end{aligned}$$

بالتعويض عن z_2 بـ $-z_2$ في هذه المتطابقة ينتج :

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 &= |z_1 + (-z_2)|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1 \cdot \overline{-z_2}) + |-z_2|^2\\ &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(-z_1 \cdot \overline{z}_2) + |z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2\end{aligned}$$

و بالجمع طرفاً إلى طرف نجد :

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2\\ &= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2\end{aligned}$$

■

249 **المساواة في المتباينة المثلثية**

ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $z' \in \mathbb{C}$. أثبت أنّ :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ z' = \lambda z.$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الحلّ. • إذا كان $z' = \lambda z$ مع $\lambda \in \mathbb{R}^+$ فإنّ :

$$\begin{aligned} |z+z'| &= |z+\lambda z| = |1+\lambda| \cdot |z| \\ &= (1+\lambda)\,|z| && \text{لأنّ } 1+\lambda > 0 \text{ منه } \lambda \geq 0 \\ &= |z| + \lambda\,|z| = |z| + |\lambda z| && \text{لأنّ } \lambda \geq 0 \\ &= |z| + |z'| \end{aligned}$$

• إذا كان $|z+z'| = |z| + |z'|$ فإنه بقسمة الطرفين على العدد الحقيقي (غير المعدوم) $|z|$ ينتج :

$|1+u| = 1 + |u|$ مع $u = \dfrac{z'}{z} \in \mathbb{C}$.

نضع $u = a + \imath b$ مع $a, b \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$|1+u|^2 = (a+1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$

و $$(1+|u|)^2 = \left(1+\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}$$

من المساواة $|1+u| = 1+|u|$ نستنتج أنّ $a = \sqrt{a^2+b^2}$ منه $a \geq 0$ و بتربيع الطرفين ينتج $a^2 = a^2 + b^2$ أي $b = 0$ إذن $\dfrac{z'}{z} = a \in \mathbb{R}^+$.

■

250 **متطابقة متوازي الأضلاع**

أثبت أنه لكلّ عددين مركبين Z و Z' ، يكون : $|Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$.

(إرشاد : إستعمل العلاقة : $|Z|^2 = Z\overline{Z}$)

ما هو التفسير الهندسي لهذه النتيجة ؟

أنظر التمرين 248 صفحة 348

الحلّ. لدينا :

$$\begin{aligned} |Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2 &= \left(Z+Z'\right)\left(\overline{Z}+\overline{Z'}\right) + \left(Z-Z'\right)\left(\overline{Z}-\overline{Z'}\right) \\ &= Z\overline{Z} + Z\overline{Z'} + Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'} + Z\overline{Z'} - Z\overline{Z'} - Z'\overline{Z} + Z'\overline{Z'} \\ &= 2|Z|^2 + 2|Z'|^2 \end{aligned}$$

التفسير الهندسي : ليكن ABCD متوازي أضلاع، و لتكن Z لاحقة $\overrightarrow{AB}$ و Z' لاحقة $\overrightarrow{AD}$. المتطابقة السابقة تُكتب :

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

أي : في متوازي أضلاع، مجموع مُربّعَيْ القطرين يساوي مجموع مربعات الأضلاع (شكل **VII**.14).

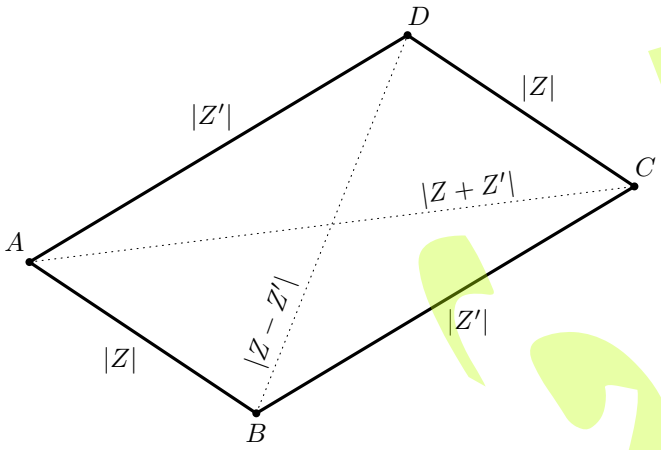
ملاحظة 57 : ◁ إذا كان ABCD مستطيلاً فمن جهة، المثلث ABC قائم الزاوية عند الرأس B ، و من جهة أخرى $AC = BD$ و المساواة السابقة تُصبح : $2AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2$ أي $AC^2 = AB^2 + BC^2$ و هو نصّ نظرية **فيثاغورث**.

▷

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى



شكل VII.14

251

1• أثبت أنّه لأجل كل $(u,v)\in\mathbb{C}^2$: $|u|+|v|\leq|u+v|+|u-v|$.
قدّم تفسيراً هندسيا لهذه المتباينة.

2• إستنتج أنه لأجل كل $(z_1,z_2,z_3,z_4)\in\mathbb{C}^4$:

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leq|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|$$

الحلّ. الحل يرتكز على المتباينة المثلثية :

1• **الطريقة الأولى** : لدينا :

$$2|u|=|2u|=|(u+v)+(u-v)|\leq|u+v|+|u-v|$$
$$2|u|=|2v|=|(u+v)-(u-v)|\leq|u+v|+|u-v|$$

بالجمع طرفاً إلى طرف ثمّ القسمة على 2 ينتج : $|u|+|v|\leq|u+v|+|u-v|$.

الطريقة الثانية : بالحساب

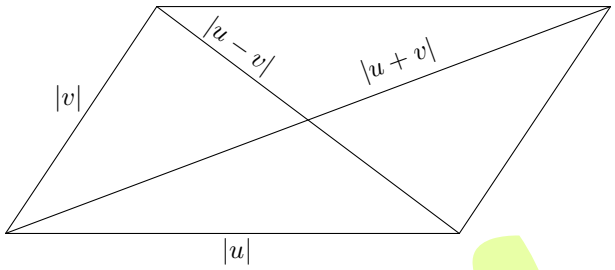
المتباينة محققة إذا كان $u=0$ و في هذه الحالة تكون هناك مساواة إذا و فقط إذا كان $v=0$.

نفرض إذن أنّ $u\neq0$. بقسمة طرفيّ المتباينة على $|u|$ ينتج $|1+w|+|1-w|\geq1+|w|$ مع $w=\frac{v}{u}$.

نضع $w=x+iy$ منه

$$(1+|w|)^2=\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$
$$=1+2\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$
$$\leq 2+2\left(x^2+y^2\right) \qquad (\text{لأنّ } 2ab\leq a^2+b^2 \text{ مع } a=1 \text{ و } b=\sqrt{x^2+y^2})$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل VII.15

من جهة أخرى لدينا :

$$|1+w|^2+|1-w|^2=\left((1+x)^2+y^2\right)+\left((1-x)^2+y^2\right)$$
$$=1+2x+x^2+y^2+1-2x+x^2+y^2=2+2\left(x^2+y^2\right)$$

و بالتالي :

$$(1+|w|)^2\leq|1+w|^2+|1-w|^2\leq\left(|1+w|+|1-w|\right)^2$$

(لأنّ $a^2+b^2\leq(a+b)^2$ مع $a=|1+w|$ و $b=|1-w|$)

بأخذ الجذر التربيعي (الحقيقي) للطرفين، نصل إلى النتيجة المطلوبة.

التفسير الهندسي : في متوازي أضلاع، مجموع طولَيْ أيّ ضلعين متتاليين يكون أصغر من مجموع طولَيْ القطرين (شكل VII.15).

• 2. نُطبق نتيجة السؤال السابق على z_1 و z_2 فيكون : $|z_1|+|z_2|\leq|z_1+z_2|+|z_1-z_2|$ ؛ و بتطبيقها على z_3 و z_4 يكون : $|z_3|+|z_4|\leq|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$. نجمع هاتين المتراجحتين طرفاً إلى طرف :

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leq|z_1+z_2|+|z_1-z_2|+|z_3+z_4|+|z_3-z_4|$$

نُطبق النتيجة مرّة أخرى على z_1-z_2 و z_3-z_4 فينتج :

$$|z_1-z_2|+|z_3-z_4|\leq|z_1-z_2+z_3-z_4|+|z_1-z_2-z_3+z_4|$$
$$=|(z_1+z_3)-(z_2+z_4)|+|(z_1+z_4)-(z_2+z_3)|$$
$$\leq|z_1+z_3|+|z_2+z_4|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|$$

في الأخير :

$$|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|\leq|z_1+z_2|+|z_1+z_3|+|z_1+z_4|+|z_2+z_3|+|z_2+z_4|+|z_3+z_4|$$

■

252 لتكن $\mathbb{U}$ مجموعة الأعداد المركبة التي طويلتها 1 .

ليكن $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$. أثبت أنّ : $\frac{z+1}{z-1}\in i\mathbb{R}$.

الحلّ. نضع $Z=\frac{z+1}{z-1}$. لإثبات أنّ Z تخيلي صرف، يكفي أن نبرهن أنّ : $\overline{Z}=-Z$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لكن، بما أنّ $z \in \mathbb{U}$ فإنّ $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ (لأنّ $z \cdot \overline{z} = |z|^2 = 1$) منه :

$$\overline{Z} = \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1+z}{1-z} = -Z$$

و هذا يعني أنّ Z تخيلي صرف أي $Z \in i\mathbb{R}$.

■

253 ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbb{C}^*$. نفرض أنّ $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{z_k}{|z_k|} = 0$.

1. أثبت أنه : $\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\dfrac{\overline{z}_k}{|z_k|}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
2. إستنتج أنّه : $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

الحلّ. 1. ننطلق من الطرف الأكثر تعقيداً أي الطرف الثاني :

$$\sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\frac{\overline{z}_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k \overline{z}_k}{|z_k|} - \sum_{k=1}^{n} \frac{z\overline{z}_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|^2}{|z_k|} - z\sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k| - z\overline{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_k|}\right)}^{0}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |z_k| - z \times 0 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. بما أنّ $\sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \in \mathbb{R}_+$ فإنّ $\sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|} = \left|\sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|}\right| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\dfrac{\overline{z_k}}{|z_k|}$ منه (بتطبيق المتباينة المثلثية المعمّمة) :

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = \left|\sum_{k=1}^{n} (z_k - z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|(z_k - z)\frac{\overline{z_k}}{|z_k|}\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|\frac{|z_k|}{|z_k|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$$

و هو المطلوب.

■

254 ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ عدد طبيعي غير معدوم. نضع $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.
ليكن $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n \in D$. أثبت أنّ :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$$

الحلّ. نستعمل البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي غير المعدوم n .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- من الواضح أنّ الخاصية صحيحة لأجل $n = 1$ (تُكتب : $|a_1 - b_1| \leq |a_1 - b_1|$) .
- لأجل $n = 2$ ، يجب أن نُبرهن أنّ : $|a_1 a_2 - b_1 b_2| \leq |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$. لكن :

$$\begin{aligned}|a_1 a_2 - b_1 b_2| &= |a_1 (a_2 - b_2) + (a_1 - b_1) b_2| \\ &\leq |a_1 (a_2 - b_2)| + |(a_1 - b_1) b_2| = |a_1||a_2 - b_2| + |a_1 - b_1||b_2| \\ &\leq |a_2 - b_2| + |a_1 - b_1|\end{aligned}$$

(لأنّ $|a_1| \leq 1$ و $|b_2| \leq 1$) إذن فالخاصية صحيحة لأجل $n = 2$.

- نفرض أنّ الخاصية صحيحة لأجل $n \in \mathbb{N}^*$ و نبرهن أنها تبقى صحيحة لأجل $n + 1$.

ليكن $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, b_1, b_2, \cdots, b_n, b_{n+1} \in D$ نضع $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ و $B_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$. لدينا :

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k\right| = |A_n a_{n+1} - B_n b_{n+1}| = |A_n (a_{n+1} - b_{n+1}) + (A_n - B_n) b_{n+1}|$$

$$\leq |A_n| \cdot |a_{n+1} - b_{n+1}| + |A_n - B_n| \cdot |b_{n+1}|$$

لكن $|b_{n+1}| \leq 1$ (لأنّ $b_{n+1} \in D$) و $|a_k| \leq 1$ لكلّ $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ منه $|A_n| \leq 1$ و حسب فرضية التراجع فإنّ : $|A_n - B_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$ إذن :

$$\left|\prod_{k=1}^{n+1} a_k - \prod_{k=1}^{n+1} b_k\right| \leq |a_{n+1} - b_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k - b_k|$$

و هذا يعني أنّ الخاصية تبقى صحيحة عند الرتبة $n + 1$.

حسب مبدأ البرهان بالتراجع، فالخاصية صحيحة لكلّ عدد طبيعي غير معدوم $n \in \mathbb{N}^*$. ■

255

1. ليكن z و z' عددين مركبين غير معدومين طويلتهما أصغر من أو تساوي 1 .
نفرض أنّ $\arg(z) - \arg(z') \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \pmod{2\pi}$. أثبت أنّ : $|z - z'| \leq 1$.

2. إذا أُعطِيت ستة أعداد مركبة غير معدومة طويلتها أصغر من أو تساوي 1 فأثبت أنه يوجد على الأقل إثنين منهما يحققان فرضية السؤال 1. .

3. لتكن z_1 ، z_2 ، $\cdots$ ، z_n أعداداً مركبة طويلتها أصغر من أو تساوي 1 . باستخدام نتيجة السؤال 2. ، أثبت أنه إذا كان $n \geq 3$ فإنه يوجد $i \neq j$ و $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ بحيث $|z_i + \varepsilon z_j| \leq 1$.

4. أثبت أنه لأجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ و لكل أعداد مركبة z_1 ، z_2 ، $\cdots$ ، z_n طويلتها أصغر من أو تساوي 1 فإنه توجد أعداد صحيحة $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ بحيث : $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leq \sqrt{2}$.

هل يمكن تحسين هذا التحديد ؟ بمعنى هل يمكن إيجاد عدد $0 \leq \lambda < \sqrt{2}$ بحيث $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leq \lambda$.

5. ما هو التحديد الأمثل إذا كانت الأعداد z_k حقيقيةً ؟

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الحلّ. 1• نعلم أنّ : $|z-z'|^2=|z|^2+|z'|^2-2|z|\cdot|z'|\cos\theta$ حيث $\theta=\arg(z)-\arg(z')$.

إذا كان $\theta\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$ فإنّ $\cos\theta\geq\frac{1}{2}$ منه $|z-z'|^2\leq|z|^2+|z'|^2-|z|\cdot|z'|$.

بتبديل دور كل من z و z' إذا لزم الأمر، يمكن أن نفرض أنّ $|z'|\geq|z|$ منه $|z'|^2\geq|z|\cdot|z'|$ و بالتالي فإنّ :

$$|z-z'|^2\leq|z|^2\leq1$$

2• لتكن z_i ، $1\leq i\leq6$ ، ستة أعداد مركبة طويلتها أصغر من أو تساوي 1 . نضع $\theta_i=\arg(z_i)\pmod{2\pi}$ مع $\theta_i\in[0,2\pi[$.

بتبديل دور الأعداد z_i إذا لزم الأمر، يمكن أن نفرض أنّ $0\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_6\leq2\pi$.

إذا وُجِد $i\in\{1,2,3,4,5\}$ بحيث $\theta_{i+1}-\theta_i\leq\frac{\pi}{3}$ فإنّ العددين z_i و z_{i+1} يحققان المطلوب .

في الحالة المغايرة، يكون $\theta_2-\theta_1>\frac{\pi}{3}$ و $\theta_3-\theta_2>\frac{\pi}{3}$ و $\theta_4-\theta_3>\frac{\pi}{3}$ و $\theta_5-\theta_4>\frac{\pi}{3}$ و $\theta_6-\theta_5>\frac{\pi}{3}$ منه

$$(\theta_6-\theta_5)+(\theta_5-\theta_4)+(\theta_4-\theta_3)+(\theta_3-\theta_2)+(\theta_2-\theta_1)>\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$

أي $\theta_6-\theta_1>\frac{5\pi}{3}$

أي $\theta_6>\theta_1+\frac{5\pi}{3}$

منه

$$\theta_1\leq2\pi\leq2\pi+\theta_1\leq\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\theta_1\leq\theta_6+\frac{\pi}{3}$$

أي z_1 و z_6 يحققان المطلوب.

ملاحظة 58 : ◁ يمكن إثبات هذه النتيجة هندسياً و ذلك بملاحظة أنّ القطاعات الدائرية (و عددها ستة) المتمركزة على الأعداد z_i و قياسها $\frac{\pi}{3}$ لا يمكن أن تكون منفصلة مثنى مثنى لأنه في هذه الحالة ستشكّل زاوية إجمالية قياسها أكبر تماماً من $6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$.

▷

3• إذا كان أحد الأعداد z_i معدوماً فالخاصية محققة.

في الحالة المغايرة، باعتبار الأعداد z_i و $-z_i$ مع $1\leq i\leq n$ نحصل على $2n$ عدداً مركبا، و بما أنّ $2n\geq6$ فحسب السؤال 2•، يوجد على الأقل عددان من بين هذه الأعداد بحيث تكون القيمة المطلقة للفرق بين عمدتيهما لا تتجاوز $\frac{\pi}{3}$. هذان العددان لا يمكن أن يكونا متعاكسين و بالتالي فهما من الشكل ε_iz_i و ε_jz_j مع $i\neq j$ و $\varepsilon_i\in\{-1,1\}$ و $\varepsilon_j\in\{-1,1\}$.

نضع $\varepsilon=-\varepsilon_i\varepsilon_j$ ، $z=\varepsilon_iz_i$ و $z'=\varepsilon_jz_j$ فيكون $|z_i+\varepsilon z_j|=|\varepsilon_iz_i-\varepsilon_jz_j|=|z-z'|\leq1$ حسب السؤال 1•.

4• نبرهن هذه الخاصية بالتراجع على العدد الطبيعي غير المعدوم $n\geq1$.

- الخاصية بديهية لأجل $n=1$ لأنّ أيّ عدد z طويلته أصغر من أو تساوي 1 يُحقق $|z|\leq1<\sqrt{2}$.
- لأجل $n=2$ لدينا :

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\leq2\left(1^2+1^2\right)=4$$

و بالتالي فإنّ (على الأقل) أحد العددين $|z_1+z_2|^2$ و $|z_1-z_2|^2$ يكون أصغر من أو يساوي 2 منه $|z_1+z_2|\leq\sqrt{2}$ أو $|z_1-z_2|\leq\sqrt{2}$ إذن الخاصية صحيحة لأجل $n=2$.

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• نفرض $n \geq 3$ و الخاصية صحيحة عند الرتبة $n-1$.
حسب السؤال 3•، يوجد $i \neq j$ و $\varepsilon \in \{-1,1\}$ بحيث $|z_i + \varepsilon z_j| \leq 1$. بتبديل ترتيب الأعداد z_k إذا لزم الأمر، يمكن أن نفرض أنّ هذين العددين هما z_{n-1} و z_n .
بوضع $Z = z_{n-1} + \varepsilon z_n$ يكون $|Z| \leq 1$ و بتطبيق فرضية التراجع على الأعداد z_1 ، z_2 ، ... ، z_{n-2} و Z (و عددها هو $n-1$) نجد أنه يوجد $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{n-2}, \alpha \in \{-1,1\}$ بحيث $\left|\sum_{k=1}^{n-2} \varepsilon_k z_k + \alpha Z\right| \leq \sqrt{2}$.
نضع $\varepsilon_{n-1} = \alpha$ و $\varepsilon_n = \varepsilon\alpha$ فيكون $\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$ و $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leq \sqrt{2}$ و بالتالي فالخاصية تبقى صحيحة عند الرتبة n .
حسب مبدأ البرهان بالتراجع، الخاصية صحيحة لكل عدد طبيعي غير معدوم.
لا يمكن تحسين هذا التحديد لأنه لأجل $n = 2$ و $\theta \in \mathbb{R}$ ، $z_1 = e^{i\theta}$ و $z_2 = e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ يكون $|z_1| = |z_2| = 1 \leq 1$ و :
$$|z_1 - z_2|^2 = \left|e^{i\theta}\left(1 + e^{i\pi/2}\right)\right|^2 = \left|e^{i\theta}\right|^2 \cdot |1+i|^2 = 1 \times \sqrt{2}^2 = 2$$
أي $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$.
ملاحظة 59 : ◁ قد نتساءل كيف تم اختيار العددين z_1 و z_2 ؟ الجواب تقدمه لنا نظرية **فيثاغورث** و التي هي حالة خاصة من نظرية **الكاشي** و هذه الأخيرة تنصّ على أنّ (باستعمال الأعداد المركبة) :
$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| \cos\theta$ مع $\theta = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
إذا كان $\cos\theta = 0$ أي إذا كان العددان z_1 و z_2 متعامدين (لأنّ $\arg(z_1) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{2}$ يعني $z_1 = iz_2$) فإنّ $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ و هي نظرية **فيثاغورث**.
بملاحظة أنّ $-2|z_1| \cdot |z_2| \cos\theta \leq 0$ (إذا كان $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ أي $\cos\theta \geq 0$) فإنّ $|z_1 - z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$ الحصول على أكبر قيمة للمقدار $|z_1 - z_2|^2$ يكون عندما $\cos\theta = 0$ أي عندما يكون z_1 و z_2 متعامدين. ▷

• 5 إذا كان x و y عددين حقيقيين بحيث $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$ أي بحيث $x, y \in [-1,1]$ فإنّ على الأقل أحد العددين $x+y$ أو $x-y$ ينتمي إلى المجال $[-1,1]$.

إنطلاقاً من هنا، نبرهن بالتراجع أنه توجد أعداد حقيقية $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in \{-1,1\}$ بحيث $\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k\right| \leq 1$.

■

256

هدفنا في هذه المسألة هو إثبات تقارب المتتالية التي حدها العام $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ و إيجاد نهايتها S .
لدينا إذن $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ و نكتب إختصاراً : $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
في الأجزاء 1 ، 2 و 3 نستعرض طرقاً مختلفة لإيجاد هذه النهاية و هذه الأجزاء مستقلة فيما بينها.

أسئلة تمهيدية

• 1 أدرس رتابة (متزايدة، متناقصة، ...) المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

• 2 أثبت أنه $\forall n \geq 2$ فإنّ : $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ و أنّ $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 3 نعتبر المتتالية $(T_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بحدها العام : $T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(n-1)}$. أثبت أنّ : $T_n = 1 - \frac{1}{n}$.

• 4 إستنتج أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

• 5 عبِّر ، بدلالة S ، عن قيمة النهايتين :

$$V = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad , \quad U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

الجزء الأول : إستعمال كثيرات حدود

ليكن $P(X)$ كثير حدود بمعاملات مركبة من الدرجة $n \geq 1$ حيث $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ و $a_n \neq 0$. نقبل بدون برهان أنّ $P(X)$ يقبل n جذراً مركباً α_1 ، α_2 ، ⋯ ، α_n و أنّ مجموع هذه الجذور يُعطى بالعبارة :

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

• 1 (أ) ليكن $p \in \mathbb{N}$ و $\varphi \in \mathbb{R}$. أثبت المساواة :

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\cos\varphi)^{2p-2k} (\sin\varphi)^{2k+1}$$

(ب) إستنتج أنه لكل عدد طبيعي $p \in \mathbb{N}$ و لكل عدد حقيقي $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ يكون :

$$\sin((2p+1)\varphi) = (\sin\varphi)^{2p+1} \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} (\operatorname{cotan}\varphi)^{2p-2k}$$

• 2 ليكن $p \in \mathbb{N}$ و P كثير الحدود المعرف بالعبارة : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} X^{p-k}$.

(أ) لكل $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ نضع $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$. أحسب $P(\gamma_k)$ لكل $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$.

(ب) تحقق، لأجل $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ ، من أنّ العدد الحقيقي $\frac{k\pi}{2p+1}$ ينتمي إلى المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. إستنتج أنّ كثير الحدود P يقبل p جذراً بسيطاً يُطلب تعيينها.

(ج) إستنتج المساوتين :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3} \quad , \quad \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

• 3 (أ) أثبت أنه لكل عدد حقيقي $\varphi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ : $0 < \sin\varphi < \varphi < \tan\varphi$.

(ب) إستنتج أنه لكل $p \geq 1$ فإنّ : $\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2} S_p < \frac{2p(p+1)}{3}$.

(ج) إستنتج قيمة S .

الجزء الثاني : إستعمال تكاملات فاليس (Intégrales de Wallis)

لكل $n \in \mathbb{N}$ نضع :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt \quad , \quad J_n = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2n} t \, dt \quad , \quad K_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} J_n$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 1 أحسب التكاملين I_0 و I_1 .

• 2 (ا) أثبت، باستعمال التكامل بالتجزئة، أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ : $I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} I_n$.

(ب) إستنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ فإنّ : $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.

• 3 ليكن $n \geq 1$.

(ا) أثبت أنّ : $I_n = n(2n-1) J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

(ب) إستنتج أنّ : $K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}$.

(ج) إستنتج أنّ : $\frac{\pi}{4} S_n = J_0 - K_n$.

• 4 (ا) أثبت أنه لكل $x \in [0, \pi/2]$ فإنّ : $x \leq \frac{\pi}{2} \sin x$.

(ب) إستنتج أنه لكل عدد طبيعي n فإنّ :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)} \quad , \quad 0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_{n+1}}{4(2n+1)}$$

(ج) أوجد، مُجدّداً، قيمة S .

الجزء الثالث : إستعمال نواة ديريكلي (Noyau de Dirichlet)

ليكن $n \geq 1$ عدداً طبيعيا غير معدوم و D_n نواة **ديريكلي** المعرفة بالعبارة :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

• 1 أثبت أنه لكل $n \geq 1$ و لكل عدد حقيقي $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ فإن : $D_n(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

• 2 ليكن $n \geq 1$ و L_n المقدار المعرف بـ : $L_n = \int_0^{\pi} x D_n(x)\, dx$.

(ا) أحسب التكامل $\int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx$ لكل $k \geq 1$.

(ب) إستنتج أنّ : $L_n = \frac{\pi^2}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1-(-1)^k}{k^2}$.

(ج) إستنتج أنّ المتتالية (L_n) متقاربة و عبّر عن نهايتها بدلالة العدد V المُعرّف في الأسئلة التمهيدية.

• 3 لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0, \pi]$ بـ : $f : x \mapsto \begin{cases} 2 & \text{إذا كان } x = 0 \text{ ؛} \\ \frac{x}{\sin(x/2)} & \text{إذا كان } x \neq 0 \text{ ؛} \end{cases}$.

أثبت أنّ الدالة f مستمرة و قابلة للإشتقاق على $[0, \pi]$.

نقبل بدون برهان أنّ f قابلة للإشتقاق عند $x = 0$ مع $f'(0) = 0$ و أنّ المشتقة f' مستمرة على $[0, \pi]$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 4 (أ) لتكن h دالة مستمرة على المجال $[a, b]$. أثبت أنّ : $\left|\int_a^b h(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |h(x)|\,dx$.

(ب) لتكن ϕ دالة مستمرة و قابلة للإشتقاق على $[0, \pi]$ بحيث دالتها المشتقة ϕ' مستمرة على $[0, \pi]$. أثبت أنّ :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \left(\int_0^{\pi} \phi(x) \sin(\lambda x) \right) = 0$$

• 5 (أ) أثبت أنّ : $\lim_{n \to +\infty} L_n = 0$.

(ب) أوجد، مُجدّداً، قيمة S .

الحلّ.

أسئلة تمهيدية

• 1 لدينا :

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

إذن فالمتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماماً.

• 2 إذا كان $n \geq 2$ فإنّ $n^2 \geq n^2 - n$ منه $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2 - n}$ أي $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. من جهة أخرى :

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)}$$

• 3 لدينا :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

منه $\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ لكن $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ أي أنّ المتتالية $(T_n)_{n \geq 2}$ متزايدة تماماً و بالتالي فإنّ : $T_n \leq \lim_{n \to +\infty} T_n$ أي $\forall n \geq 2 : T_n \leq 1$.

• 4 لدينا :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \leq 1 + 1 \leq 2$$

أي أنّ المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ محدودة من الأعلى.

المتتالية $(S_n)_{n \geq 1}$ متزايدة تماماً و محدودة من الأعلى فهي إذن متقاربة.

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

• 5 نضع $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2}$ و $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

من السهل ملاحظة أنّ $U_n = \frac{1}{4}S_n$ و $V_n \leq S_n \leq 2$ و أنّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً و بالتالي فكلاهما متقاربة إذن بالإمكان الكلام عن النهايتين $U = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ و $V = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

لكن $S_n = U_n + V_n$ منه $V_n = S_n - U_n = S_n - \frac{1}{4}S_n = \frac{3}{4}S_n$ و بأخذ النهاية عندما $n \longrightarrow +\infty$ ينتج : $U = \frac{1}{4}S$ و $V = \frac{3}{4}S$.

الجزء الأول : إستعمال كثيرات حدود

• 1 (ا) لدينا حسب دستور **موافر** : $(\cos\varphi + \imath\sin\varphi)^{2p+1} = \cos((2p+1)\varphi) + \imath\sin((2p+1)\varphi)$. ننشر هذا الأخير باستعمال دستور ثنائي الحد و نأخذ جزأه التخيلي :

$$\begin{aligned}\sin((2p+1)\varphi) &= \operatorname{Im}(\cos((2p+1)\varphi) + \imath\sin((2p+1)\varphi)) \\ &= \operatorname{Im}\left((\cos\varphi + \imath\sin\varphi)^{2p+1}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\sum_{m=0}^{2p+1}\binom{2p+1}{m}(\cos\varphi)^{2p+1-m}(\imath\sin\varphi)^m\right)\end{aligned}$$

الجزء التخيلي ينتج عن الحدود التي يكون فيها m فردياً و في هذه الحالة، إذا كان $m = 2k+1$ فإنّ :

$\imath^m = \imath^{2k+1} = (\imath^2)^k \cdot \imath = (-1)^k\imath$ و بالتالي :

$$\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}(\cos\varphi)^{2p+1-(2k+1)}(\sin\varphi)^{2k+1}$$

أي :
$$\boxed{\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi)}$$

(ب) إذا كان $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ فإنّ $\sin\varphi \neq 0$ منه :

$$\begin{aligned}\sin((2p+1)\varphi) &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi) \\ &= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k+1-(2p+1)}(\varphi) \\ &= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\sin^{2k-2p}(\varphi) \\ &= \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\cos^{2p-2k}(\varphi)\times\frac{1}{\sin^{2p-2k}(\varphi)}\end{aligned}$$

أي :
$$\boxed{\sin((2p+1)\varphi) = (\sin\varphi)^{2p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}(\operatorname{cotan}\varphi)^{2p-2k}}$$

أو
$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}(\operatorname{cotan}\varphi)^{2p-2k} = \frac{\sin((2p+1)\varphi)}{(\sin\varphi)^{2p+1}}}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

2• (أ) بما أنّ $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ فإنّ $\frac{k\pi}{2p+1} \neq 0 \pmod{\pi}$ منه :

$$P(\gamma_k) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{p-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{2p-2k}$$

لكن $\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \neq 0$ و بالتالي يمكن تطبيق نتيجة السؤال السابق فينتج :

$$P(\gamma_k) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \left(\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)^{2p-2k} = \frac{\sin\left((2p+1)\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = 0$$

(ب) إذا كان $1 \leq k \leq p$ فإنّ $0 < \frac{\pi}{2p+1} \leq \frac{k\pi}{2p+1} \leq \frac{p\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ أي أنه لكل $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$ ، فإنّ العدد الحقيقي $\frac{k\pi}{2p+1}$ ينتمي إلى المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

الدالة $x \longmapsto \operatorname{cotan}^2 x$ مستمرة و قابلة للإشتقاق على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ و دالتها المشتقة هي الدالة $x \longmapsto -2\operatorname{cotan}(x)\left(1 + \operatorname{cotan}^2(x)\right)$. هذه المشتقة سالبة تماماً على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ و بالتالي فإنّ $x \longmapsto \operatorname{cotan}^2 x$ متناقصة تماماً على هذا المجال.

في الأخير، الدالة $x \longmapsto \operatorname{cotan}^2 x$ مستمرة و متناقصة تماماً على $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ فهي إذن تقابلية على هذا المجال، و بما أنّ الأعداد $\frac{k\pi}{2p+1}$ مختلفة مثنى مثنى فإنّ صُورَها $\gamma_k = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$ بهذه الدالة هي أيضاً مختلفة مثنى مثنى.

تحصّلنا إذن على p جذراً لكثير الحدود P. و بما أنّ درجة هذا الأخير هي p فقد تحصّلنا على جميع جذوره و هي كلها جذور بسيطة (لأنها مختلفة مثنى مثنى).

كثير الحدود P يقبل p جذراً بسيطاً و هي الأعداد γ_k لأجل $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$

(ج) حسب العبارة المعرِّفة لكثير الحدود P فإنّ درجته هي p و $a_p = (-1)^0 \binom{2p+1}{2\times 0+1} = 2p+1$ و $a_{p-1} = (-1)^1 \binom{2p+1}{2\times 1+1} = -\frac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{3\times 2\times 1}$.

العبارة التي تعطي مجموع الجذور بدلالة المعاملين a_p و a_{p-1} تُترجم كما يلي :

أي : $\sum_{k=1}^{p} \gamma_k = \sigma_1 = -\frac{a_{p-1}}{a_p} = -\frac{-\frac{2p(2p+1)(2p-1)}{6}}{2p+1} = \frac{p(2p-1)}{3}$

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}$$

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

إذا كان $\varphi \in \mathbb{R}$ مع $\varphi \neq 0 \pmod{\pi}$ فإنّ :

$$1+\operatorname{cotan}^2\varphi = \frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi}$$

منه

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \sum_{k=1}^{p}\left(1+\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p}1+\sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

$$= p+\frac{p(2p-1)}{3} = \frac{p(2p-1+3)}{3}$$

$$= \frac{p(2p+2)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

أي

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}}$$

• 3. (أ) نعتبر الدالتين $f(x)=x-\sin x$ و $g(x)=\tan x-x$ المعرفتين على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

هاتان الدالتان معرفتان و قابلتان للإشتقاق على هذا المجال. بالإضافة إلى ذلك، لدينا $f'(x)=1-\cos x$ و $g'(x)=1+\tan^2 x-1=\tan^2 x$.

لكل $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا $f'(x)>0$ و $g'(x)>0$ و بالتالي فالدالتان f و g متزايدتان تماماً على هذا المجال.

منه لكل $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ فإنّ $f(x)>f(0)=0$ أي $x-\sin x>0$ أي $x>\sin x>0$.

بالمِثل، لكل $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لدينا $g(x)>g(0)=0$ أي $\tan x-x>0$ أي $\tan x>x$.

في الأخير :

$$\boxed{\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ :\ 0<\sin x<x<\tan x}$$

(ب) لكل $k\in\{1,2,\cdots,p\}$ نستعمل المتباينات السابقة مع $x=\frac{k\pi}{2p+1}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ لنجد :

$$0<\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)<\frac{k\pi}{2p+1}<\tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

بتربيع الأطراف (موجبة جميعها)

$$0<\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)<\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2<\tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

بأخذ المقلوب

$$0<\frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}<\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)^2}<\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

منه

$$0<\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)<\frac{(2p+1)^2}{(k\pi)^2}<\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

منه

$$0<\sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)<\sum_{k=1}^{p}\frac{(2p+1)^2}{(k\pi)^2}<\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

منه

$$0<\frac{p(2p-1)}{3}<\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2}<\frac{2p(p+1)}{3}$$

أي :

$$\boxed{\forall p\geq 1:\ \frac{p(2p-1)}{3}<\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}S_p<\frac{2p(p+1)}{3}}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ج) بقسمة أطراف المتباينات السابقة على $\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}$ نجد :

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < S_p < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

لكن $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{2\pi^2p^2-\pi^2p}{12p^2+12p+3}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{2\pi^2p^2}{12p^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

و $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{2\pi^2p^2-2\pi^2}{12p^2+12p+3}\right) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{2\pi^2p^2}{12p^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

و حسب نظرية الحصر فإنّ $\lim\limits_{p\to+\infty} S_p = \frac{\pi^2}{6}$ أي $\boxed{S = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$.

الجزء الثاني : إستعمال تكاملات فاليس (Wallis)

• 1 لدينا :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2}\cos^0 t\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = [t]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$ و

• 2 (أ) بالتكامل بالتجزئة، نضع $u(t) = \cos^{2n+1} t$ و $v'(t) = \cos t$ منه $u'(t) = -(2n+1)\sin t\cdot\cos^{2n} t$ و $v(t) = \sin t$. الدالتان u و v تحققان شروط نظرية التكامل بالتجزئة على المجال $[0, \pi/2]$ منه :

$$I_{n+1} = \left[\sin t\cdot\cos^{2n+1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(2n+1)\sin t\cdot\cos^{2n} t\times\sin t\,dt$$

$$= 0 + (2n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos^{2n} t\,dt$$

$$= (2n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 t)\cos^{2n} t\,dt$$

$$= (2n+1)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^{2n+2} t\,dt\right) = (2n+1)(I_n - I_{n+1})$$

منه $(2n+2)I_{n+1} = (2n+1)I_n$ أي $\boxed{I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n}$.

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

(ب) لدينا :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} \quad , \quad I_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-2}$$
$$I_{n-2} = \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-3} \quad , \quad I_{n-3} = \frac{2n-7}{2n-6} I_{n-4}$$
$$\vdots \quad , \quad \vdots$$
$$I_4 = \frac{9}{8} I_3 \quad , \quad I_3 = \frac{5}{6} I_2$$
$$I_2 = \frac{3}{4} I_1 \quad , \quad I_1 = \frac{1}{2} I_0$$

منه

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-2} = \cdots \\ &= \cdots = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} I_1 = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \times 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \times 2} I_0 \times \frac{(2n)(2n-2)\cdots 4 \times 2}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \times 2} \\ &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 4 \times 3 \times 2 \times 1}{\left[2n \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdots (2 \times 2)(2 \times 1)\right]^2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{\left[2^n n(n-1)(n-2)\cdots 2 \times 1\right]^2} I_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} I_0 = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

و يمكن التحقق من صحة هذه الأخيرة بالتراجع :

- لأجل $n = 0$ لدينا $I_0 = \frac{\pi}{2}$ و $\frac{(0)!}{4^0 (0!)^2} \frac{\pi}{2}$ منه الخاصية صحيحة عند الرتبة $n = 0$.
- إذا فرضنا أنّ الخاصية صحيحة عند الرتبة n أي إذا فرضنا أنّ $I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$ فإن :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{4 \times 4^n ((n+1) \times n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4^{n+1} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

أي أنّ الخاصية تبقى صحيحة عند الرتبة $n+1$.

و حسب مبدأ البرهان بالتراجع، فالخاصية صحيحة لكل عدد طبيعي أي : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : I_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}}$

3• (أ) نُجري في I_n تكاملاً بالتجزئة بوضع $u(t) = \cos^{2n} t$ و $v'(t) = 1$ منه $u'(t) = -2n \sin t \cdot \cos^{2n-1} t$ و $v(t) = t$.
الدالتان u و v تحققان شروط نظرية التكامل بالتجزئة على المجال $[0, \pi/2]$ منه :

$$I_n = \left[t \cos^{2n} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -2n \sin t \cdot \cos^{2n-1} t \, dt = 2n \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos^{2n-1} t \, dt$$

نُجري مرة أخرى تكاملاً بالتجزئة بوضع $u(t) = \sin t \cdot \cos^{2n} t$ و $v'(t) = t$ منه $v(t) = \frac{t^2}{2}$
و $u'(t) = \cos^{2n} t - (2n-1) \sin^2 t \cdot \cos^{2n-2} t$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الدالتان u و v تحققان شروط نظرية التكامل بالتجزئة على المجال $[0, \pi/2]$ منه :

$$I_n = 2n\left[\frac{t^2}{2}\cos^{2n} t\right]_0^{\pi/2} - 2n\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{2}\left[\cos^{2n} t - (2n-1)\sin^2 t\cdot\cos^{2n-2} t\right]dt$$

$$= 0 - 2n\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{2}\left[\cos^{2n} t - (2n-1)\left(1-\cos^2 t\right)\cos^{2n-2} t\right]dt$$

$$= -n\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\,dt + n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n-2} t\,dt - n(2n-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\,dt$$

$$= -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n$$

أي : $\boxed{I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$

(ب) نضرب طرفي المساواة السابقة بالمقدار $\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ و نستعمل نتيجة السؤال (2•ب) :

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\left[n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n\right]$$

أي : $$\frac{\pi}{2} = 2n^2\left[\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}J_n\right]$$

لأنّ : $$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}\cdot n(2n-1) = \frac{4n^2}{(2n)(2n-1)}\cdot\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}\cdot n(2n-1)$$

$$= 2n^2\cdot\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}$$

و بقسمة الطرفين على $2n^2$: $$\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2n^2} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}J_n$$

أي : $\boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}}$

(ج)

لدينا : $$K_{k-1} - K_k = \frac{\pi}{4k^2}$$

منه : $$\sum_{k=1}^{n}(K_{k-1} - K_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4k^2}$$

أي : $$K_0 - K_n = \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

لكن $K_0 = J_0$ منه : $\boxed{\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n}$

•4 (أ) نعتبر الدالة $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - x$ المعرفة على المجال $[0, \pi/2]$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الدالة f مستمرة و قابلة للإشتقاق على هذا المجال و $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos x - 1 = \frac{\pi}{2}\left(\cos x - \frac{2}{\pi}\right)$. و بما أنّ $0 < \frac{2}{\pi} < 1$ فإنه يوجد $\alpha \in]0, \pi/2[$ بحيث $\cos\alpha = \frac{2}{\pi}$ (العدد α وحيد لأنّ الدالة cos مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $[0, \pi/2]$ أي تقابلية على هذا المجال) .

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0, \alpha]$ و متناقصة تماماً على المجال $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ أي :

لكل $x \in [0, \alpha]$ لدينا : $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(\alpha)$

و لكل $x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ : $0 = f(\frac{\pi}{2}) \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

في الأخير، لكل $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ فإنّ $f(x) \geq 0$ أي $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ x \leq \frac{\pi}{2}\sin x}$.

(ب) بتربيع طرفيّ المتباينة السابقة (كل الحدود موجبة) ثمّ بضرب الطرفين بالمقدار $\cos^{2n} t$ (موجب) ينتج :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ 0 \leq t^2\cos^{2n} t \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t \cdot \cos^{2n} t$$

بالتكامل بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ (نلاحظ أنّ حدود التكامل في الإتجاه المناسب) نجد :

$$\int_0^{\pi/2} 0\,dt \leq \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2n} t\,dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t \cdot \cos^{2n} t\,dt$$

أي : $$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^{2n} t\,dt$$

لإيجاد التكامل الأخير، نستعمل التكامل بالتجزئة و ذلك بأخذ $u(t) = \sin t$ و $v'(t) = \sin t \cdot \cos^{2n} t$

منه $u'(t) = \cos t$ و $v(t) = -\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1} t$.

الدالتان u و v تحققان شروط نظرية التكامل بالتجزئة على المجال $[0, \pi/2]$ منه :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \cos^{2n} t\,dt = 0 + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,dt = \frac{1}{2n+1}I_{n+1}$$

منه : $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4(2n+1)}I_{n+1}$.

الآن، نضرب أطراف هذه المتباينات بالمقدار $\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ (موجب تماماً) و نُطبّق نتيجة السؤال (2•ب) لنجد :

$$0 \leq K_n \leq \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{\pi^2}{4(2n+1)} \cdot \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

أي : $$\boxed{0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}}$$

(ج) بما أنّ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^3}{16(n+1)} = 0$ فحسب نظرية الحصر فإن $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.

بتطبيق نتيجة السؤال (3•ج) نجد :

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\pi}(J_0 - K_n) = \frac{4}{\pi}J_0$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24} \qquad \text{لكن}$$

$$\boxed{S = \frac{\pi^2}{6}} \qquad \text{أي} \qquad S = \frac{4}{\pi}J_0 = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24} \qquad \text{منه}$$

الجزء الثالث : إستعمال نواة ديريكلي (Noyau de Dirichlet)

• 1. نعلم أنّ $\cos(kx) = \text{Re}\left(e^{\imath kx}\right)$ و إذا كان $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ $e^{\imath x} \neq 1$ منه :

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\imath kx}\right)$$

$$= \text{Re}\left(e^{\imath x}\cdot\frac{1-e^{\imath nx}}{1-e^{\imath x}}\right) \qquad \left(e^{\imath x} \neq 1 \text{ و أساسها } e^{\imath x} \text{ مجموع متتالية هندسية حدها الأول}\right)$$

$$= \text{Re}\left(e^{\imath x}\cdot\frac{e^{\imath nx/2}\cdot\left(-2\imath\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right)}{e^{\imath x/2}\cdot\left(-2\imath\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right) \qquad \text{(أنظر التمرين 59 صفحة 126)}$$

$$= \text{Re}\left(e^{\imath(n+1)x/2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

منه :

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

لكن $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ ؛ بأخذ $a = \frac{nx}{2}$ و $b = \frac{(n+1)x}{2}$ في هذه المتطابقة ينتج منه : $2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\boxed{\forall x \neq 0 \pmod{2\pi}\ ,\ D_n(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

• 2. (أ) نستعمل التكامل بالتجزئة بوضع $u(x) = x$ و $v'(x) = \cos(kx)$ منه $u'(x) = 1$ و $v(x) = \frac{1}{k}\sin(kx)$.
الدالتان u و v تحققان شروط نظرية التكامل بالتجزئة على المجال $[0, \pi]$ منه :

$$\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \left[\frac{1}{k}x\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,dx$$

$$= 0 - \frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{k}\left[-\frac{1}{k}(\cos(k\pi) - \cos(0))\right]$$

$$= \frac{1}{k^2}\left[(-1)^k - 1\right] = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \qquad \left(\text{لأنّ } \cos(k\pi) = (-1)^k\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

(ب) لدينا :

$$L_n = \int_0^{\pi} xD_n(x)\,dx = \int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)dx$$
$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} x\cos(kx)\right)dx$$
$$= \int_0^{\pi}\frac{x}{2}\,dx + \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} + \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$ (حسب السؤال السابق)

(ج) إذا كان k زوجياً فإنّ $\frac{(-1)^k-1}{k^2} = 0$ و إذا كان فردياً فإنّ $\frac{(-1)^k-1}{k^2} = -\frac{2}{k^2}$ منه

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} = \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{-2}{(2p+1)^2}$$

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد x . و بالتالي فإنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{(2p+1)^2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

أي $\boxed{\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{\pi^2}{4} - 2V}$.

• 3 الدالة f مستمرة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0,\pi]$ و بما أنها قابلة للإشتقاق عند $x = 0$ فهي مستمرة عند هذه النقطة. لكن بالإمكان إثبات ذلك كما يلي :

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x\to0}\left(2\cdot\frac{\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \overset{\boxed{t = x/2}}{=} 2\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right) = 2\times1 = 2 = f(0)$$

و هذا يعني أنها مستمرة عند $x = 0$.

إذن الدالة f مستمرة و قابلة للإشتقاق على المجال المغلق $[0,\pi]$ و دالتها المشتقة f' مستمرة على هذا المجال.

• 4 (أ) لكل $x \in [a,b]$ لدينا : $h(x) \le |h(x)|$ و $-h(x) \le |h(x)|$ و بما أنّ $a \le b$ فإنّ :

$$-\int_a^b h(x)\,dx \le \int_a^b |h(x)|\,dx \quad \text{و} \quad \int_a^b h(x)\,dx \le \int_a^b |h(x)|\,dx$$

منه $\left|\int_a^b h(x)\,dx\right| \le \int_a^b |h(x)|\,dx$ (لأنّ $|t| = \max(-t,t)$ لكل $t \in \mathbb{R}$).

(ب) ليكن $\lambda > 0$. بالتكامل بالتجزئة، نضع $u(x) = \phi(x)$ و $v'(x) = \sin(\lambda x)$ منه $u'(x) = \phi'(x)$ و $v(x) = -\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$.

الدالتان u و v تحققان شروط نظرية التكامل بالتجزئة على المجال $[0,\pi]$ منه :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,dx = \frac{\phi(0)}{\lambda} - \frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \int_0^{\pi} \phi'(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,dx$$

منه :
$$\left|\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right| = \left|\frac{\phi(0)}{\lambda} - \frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \int_0^{\pi} \phi'(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,dx\right|$$

$$\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \left|\frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| + \left|\int_0^{\pi} \phi'(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\,dx\right| \quad (\text{لأنّ } |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|)$$

$$\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \frac{|\phi(\pi)|\cdot|\cos(\lambda\pi)|}{\lambda} + \int_0^{\pi} \left|\phi'(x)\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\right|dx \quad (\text{حسب السؤال السابق})$$

$$\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \frac{|\phi(\pi)|}{\lambda} + \int_0^{\pi} |\phi'(x)|\cdot\left|\frac{\cos(\lambda x)}{\lambda}\right|dx \quad (\text{لأنّ } |\cos t| \leq 1)$$

$$\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \frac{|\phi(\pi)|}{\lambda} + \int_0^{\pi} |\phi'(x)|\frac{1}{\lambda}\,dx$$

$$\leq \frac{1}{\lambda}\left[|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \int_0^{\pi} |\phi'(x)|\,dx\right]$$

منه :
$$0 \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,dx \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\left[|\phi(0)| + |\phi(\pi)| + \int_0^{\pi} |\phi'(x)|\,dx\right] = 0$$

أي :
$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,dx = 0}$$

ملاحظة 60 : ◁ هذه النتيجة تبقى صحيحة إذا فرضنا فقط أنّ الدالة ϕ مستمرة على المجال $[0,\pi]$ ، لكن إثباتها خارج عن نطاق برنامج الثانوية. ▷

5• (أ) ليكن $n \geq 1$. لدينا :

$$L_n = \int_0^{\pi} xD_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cdot\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,dx$$

مع $\phi(x) = \dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ و $\lambda = n + \dfrac{1}{2}$.

حسب السؤال (3•) ، هذه الدالة ϕ تُحقّق شروط السؤال (4•ب) و $\lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ منه :

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{1}{2}\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(\lambda x)\,dx\right) = 0$$

(ب) حسب السؤال (2•ج) فإن $\dfrac{\pi^2}{4} - 2V = 0$ منه $V = \dfrac{\pi^2}{8}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

لكن $V = \frac{3}{4}S$ منه $S = \frac{4}{3}V = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8}$ أي $\boxed{S = \frac{\pi^2}{6}}$.

■

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

الملحق

VII

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ملحق 1

كثيرات الحدود

في ما يلي، $\mathbb{K}$ يرمز إلى إحدى المجموعتين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$. أغلب النتائج المذكورة هنا تبقى صحيحة في الحالة العامة (عندما يكون $\mathbb{K}$ حلقة تبديلية واحدية كيفية أو جسم – حقل – كيفي) لكن لا نولي ذلك اهتماماً في دراستنا هذه.

1.1 مجموعة كثيرات الحدود بمعاملات في $\mathbb{K}$

في الأقسام الثانوية، يتطرق الطالب إلى مفهوم كثير الحدود أو دالة كثير الحدود و في الحالتين يكون المقصود هو الدالة العددية $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ حيث $n \in \mathbb{N}$ و $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ ، و المعرفة على $\mathbb{K}$. و إذا كان $P(X) = X^5 + 2X^2 - X$ فإنّ $P(\sin)$ يرمز إلى الدالة $x \mapsto \sin^5 x + 2\sin^2 x - \sin x$. نكتب $P(\sin)$ لكن لا ننسى أنّ هذا مجرّد كتابة لأنّ P معرّفة على $\mathbb{K}$ و sin دالة و ليست عدداً !

في المستقبل، عندما يتطرق الطالب إلى المصفوفات ، و هي جداول أعداد مثل $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$، و يتعلم كيف يُجري عليها العمليات الحسابية (جمع، ضرب، ... إلخ) تكون العبارة $P(M)$ أي $M^5 + 2M^2 - M$ بالنسبة إليه هي المصفوفة التي تنتج عن M بتطبيق الجداء (M^5 ، $2M^2$ و $-M$) ثمّ الجمع.

و بصفة عامة، ما إن نجد في الرياضيات مفهوماً يمكن إجراء العمليات الحسابية عليه، إلاّ و كان بمقدورنا إنشاء كثيرات حدود حول هذا المفهوم، هذا يعني أنّ الأهم في كثيرات الحدود هي المعاملات و موضع (رتبة) هذه المعاملات و لا غير !

تعريف 17 :

- نسمي **كثير حدود** بمعاملات في $\mathbb{K}$ كل عبارة من الشكل :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdot + a_n X^n$$

حيث **المعاملات** a_0 ، a_1 ، $\cdots$ ، a_n تنتمي إلى $\mathbb{K}$ و X يسمى **المجهول**.

- العدد الطبيعي n يسمى **درجة** كثير الحدود P و نكتب $n = d^\circ P$ و المعامل a_n يُسمى **معامل الحد المهيمن** (أو إختصاراً **المعامل المهيمن**)، و إذا كان $a_n = 1$ نقول أنّ P **واحدي**.

- إذا كانت كل المعاملات معدومة ما عدا معامل الحد الأول أي إذا كان $P(X) = a_0 \in \mathbb{K}$ نقول أن كثير الحدود P **ثابت**.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كانت كل المعاملات معدومة أي إذا كان $P(X)=0$ نقول أنّ كثير الحدود P **معدوم**.

  إصطلاحاً، درجة كثير الحدود المعدوم هي $-\infty$ أي $d^\circ 0=-\infty$.

- نرمز بـ $\mathbb{K}[X]$ إلى مجموعة كثيرات الحدود بمعاملات في المجموعة $\mathbb{K}$.

مثال 26 : ليكن $P(X)=2X^{15}-28X^7+\sqrt{2}X^6-X-12\in\mathbb{R}[X]$ كثير حدود بمعاملات حقيقية.
درجته هي $n=d^\circ P=15$ و المعامل المهيمن هو $a_{15}=2$.

⛔ يمكن إعطاء تعريف آخر و هو الآتي : نسمي كثير حدود بمعاملات في $\mathbb{K}$ كل متتالية (متتابعة) أعداد من $\mathbb{K}$ معدومة ابتداءً من رتبة معينة (و نقول أنها تقريباً معدومة) .
سنرى فيما بعد أنّ هذين التعريفين متكافئان.

ليكن $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ مع $P(X)=\sum_{k=0}^{s}a_kX^k$ و $Q(X)=\sum_{k=0}^{t}b_kX^k$. نضع $n=\max(s,t)$ و نكتب $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ و $Q(X)=\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$ بحيث $a_k=0$ إذا كان $k>s$ و $b_k=0$ إذا كان $k>t$.

ليكن $\lambda\in\mathbb{K}$. نُعرِّف العمليات التالية على كثيرات الحدود : الجمع، الجداء و الضرب بعدد كما يلي :

$$(P+Q)(X)=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k$$

$$(\lambda P)(X)=\sum_{k=0}^{n}\lambda a_kX^k$$

$$(P\cdot Q)(X)=\sum_{k=0}^{2n}c_kX^k \qquad \text{حيث } c_k=\sum_{j=0}^{k}a_j\cdot b_{k-j} \text{ مع } 0\le k\le 2n \text{ ؛}$$

و لدينا : $d^\circ(P+Q)\le\max(d^\circ P,d^\circ Q)$ ، $d^\circ(P\cdot Q)=d^\circ P+d^\circ Q$ و $d^\circ(\lambda P)=d^\circ P$ حيث $\lambda\neq 0$.

ملاحظة 61 : ◁ إذا كان $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ فإنّ : $\big[(PQ=0)\implies(P=0 \text{ أو } Q=0)\big]$ ▷

⛔ الآن، يمكن إثبات تكافؤ التعريفين السابقين : في $\mathbb{K}[X]$ ، نضع $X=(0,1,0,0,\cdots)$ كثير الحدود المعرف بالمتتالية $a_0=0$ ، $a_1=1$ و $a_n=0$ لأجل $n\ge 2$.
نضع، إصطلاحاً ، $X^0=1=(1,0,0,\dots)$. لدينا $X^1=X=(0,1,0,0,\cdots)$ و باستعمال عملية الضرب المعرفة أعلاه، نثبت بسهولة (بالتراجع) أنّ :

- $X^2=(0,0,1,0,0,0,\cdots)$.
- $X^3=(0,0,0,1,0,0,\cdots)$.
- ⋮
- $X^k=(0,0,\cdots,1,0,0,\cdots)$ حيث رتبة المعامل 1 هي $k+1$ و كل المعاملات الأخرى معدومة.

من هذا المنطلق، لدينا :

$$\begin{aligned}(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,0,0,\cdots)&=a_0(1,0,\cdots)+a_1(0,1,0,\cdots)+\cdots+a_n(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)\\&=a_0\cdot 1+a_1\cdot X+a_2\cdot X^2+\cdots+a_n\cdot X^n+0+0+\cdots\\&=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots+a_nX^n\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و هذا يُثبت أنّ التعريفين السابقين لكثيرات الحدود متكافئان.

⛔ X ليس عدداً !

مبرهنة 30 : يتساوى كثيرا حدود إذا تساوت معاملاتهما؛ بتعبير آخر ، إذا كان $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ و $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ كثيرَيْ حدود بمعاملات في $\mathbb{K}$ فإنّ $P = Q$ إذا و فقط إذا كان $m = n$ و $a_k = b_k$ لأجل $0 \leq k \leq n$.

2.ا القسمة في $\mathbb{K}[X]$

1.2.ا علاقة القسمة

تعريف 18 : ليكن $A, B \in \mathbb{K}[X]$. نقول أنّ A **يقسم** B ، أو أنّ A **قاسم** لـ B ، أو أنّ B **مضاعف** لـ A إذا وُجد $P \in \mathbb{K}[X]$ بحيث $B = AP$ و نكتب : $A \mid B$.

⛔ هناك تشابه كبير بين دراسة خواص الأعداد الصحيحة (الحساب) و كثيرات الحدود، و أغلب النتائج التي تخص كثيرات الحدود يمكن إثباتها بنفس الطريقة المتَّبعة في إثبات النتيجة المكافئة في علم الحساب.

مبرهنة 31 : ليكن $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$. لدينا :

- علاقة القسمة ($\mid$) **إنعكاسية** ($\forall P \ , \ P \mid P$) ؛ **متعدية** (أي إذا كان $A \mid B$ و $B \mid C$ فإنّ $A \mid C$) . بالإضافة إلى ذلك :

$$A \mid B \quad \text{و} \quad B \mid A \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \ : \ A = \lambda B$$

- إذا كان $D \mid A$ و $D \mid B$ فإنّ $D \mid (\lambda A + \mu B)$ لكلّ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
- إذا كان $A \mid B$ و $C \mid D$ فإنّ $AC \mid BD$. و كحالة خاصة، إذا كان $A \mid B$ فإنّ $A^k \mid B^k$ لكلّ $k \in \mathbb{N}$.
- إذا كان $D \neq 0$ فإنّ : $A \mid B \iff AD \mid BD$.

2.2.ا القسمة الإقليدية

كما هو الحال بالنسبة للأعداد، يمكن تعريف القسمة الإقليدية في $\mathbb{K}[X]$ كما يلي :

مبرهنة 32 : إذا كان $A, B \in \mathbb{K}[X]$ كثيرَيْ حدود حيث $B \neq 0$ فإنه يوجد كثيرا حدود $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ وحيدان بحيث يكون : $A = BQ + R$ مع $R = 0$ أو $d^\circ R < d^\circ B$.

في هذه الحالة، A يُسمى **المقسوم**، B **القاسم**، Q **حاصل القسمة** و R **باقي القسمة**.

مثال 27 : لنجد حاصل و باقي القسمة الإقليدية لـ $A(X) = 3X^5 - 12X^2 + X - 1$ على $B(X) = X^2 + 1$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

بدايةً، نقسم $3X^5$ على X^2 فيكون الحاصل هو $3X^3$، بعد ذلك نضرب $3X^3$ في X^2+1 فيكون الناتج $3X^5+3X^3$، ثمّ نطرح هذا الناتج من $A(X)$ فنجد $A_1(X)=3X^5-12X^2+X-1-\left(3X^5+3X^3\right)=-3X^3-12X^2+X-1$.

نُكرِّر نفس العمليات مع $A_1(X)$ و $B(X)$: $-3X^3\div X^2=-3X$ ، $-3X\left(X^2+1\right)=-3X^3-3X$

و $\left(-3X^3-12X^2+X-1\right)-\left(-3X^3-3X\right)=-12X^2+4X-1$.

نُكرِّر العمليات مرّة أخرى : $-12X^2\div X^2=-12$ ، $-12\left(X^2+1\right)=-12X^2-12$

و $\left(-12X^2+4X-1\right)-\left(-12X^2-12\right)=4X+11$.

بما أنّ $d^\circ(4X+11)<d^\circ\left(X^2+1\right)$ ، فإنّ عملية القسمة الإقليدية تتوقّف هنا .

في الأخير، حاصل قسمة $A(X)$ على $B(X)$ هو $Q(X)=3X^3-3X-12$ و الباقي هو $R(X)=4X+11$ و نكتب :

$$3X^5-12X^2+X-1=\left(3X^3-3X-12\right)\cdot\left(X^2+1\right)+(4X+11)$$

نُلخِّص العمليات السابقة كما يلي :

$3X^5$	$-12X^2$	$+X$	-1	X^2	$+1$
$3X^5$	$+3X^3$			$3X^3$	$-3X$ -12
	$-3X^3$	$-12X^2$	$+X$ -1		
	$-3X^3$		$-3X$		
		$-12X^2$	$+4X$ -1		
		$-12X^2$	-12		
			$4X$ $+11$		

3.1 القواسم و المضاعفات المشتركة

تعريف 19 : ليكن $A,B\in\mathbb{K}[X]$ كثيرَيْ حدود.

- نُسمي **قاسماً مشتركاً**[1] لـ A و B كل كثير حدود $D\in\mathbb{K}[X]$ يقسم A و B في آن واحد.
- نُسمي **مضاعفاً مشتركاً**[2] لـ A و B كل كثير حدود $M\in\mathbb{K}[X]$ مضاعف لـ A و B في آن واحد.

1.3.1 القاسم المشترك الأكبر

تعريف 20 : ليكن $A,B\in\mathbb{K}[X]$ كثيرَيْ حدود. **القاسم المشترك الأكبر** لـ A و B هو كل كثير حدود $D\in\mathbb{K}[X]$ يُحقق :

- D قاسم مشترك لـ A و B أي : $D\mid A$ و $D\mid B$ ؛

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- D مضاعف لكلّ قاسم مشترك لـ A و B أي :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad (P \mid A \text{ و } P \mid B) \implies P \mid D$$

نكتب : $D = \operatorname{pgcd}(A, B)$[3] أو $D = \operatorname{gcd}(A, B)$[4] .

ملاحظة 62 : القاسم المشترك الأكبر لكثيرَيْ حدود ليس وحيداً. لكن إذا كان $A \neq 0$ و $B \neq 0$ فإنه يوجد pgcd وحيد بحيث معامله المهيمن يساوي 1 (أي واحدي) .

فيما يلي، عندما نكتب pgcd دون أي تحديد فإننا نقصد هذا القاسم المشترك الأكبر الواحدي

كل كثير حدود من الشكل $\lambda \operatorname{pgcd}(A, B)$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ، هو أيضاً قاسم مشترك أكبر لـ A و B .

أخيراً، نضع : $\operatorname{pgcd}(0, 0) = 0$.

مثال 28 : كل من X ، $2X$ و $-\frac{\sqrt{2}}{3}X$ قاسم مشترك أكبر لـ X و X^2 .

مبرهنة 33 : **(نظرية بيزوت –Bézout– الجزء الأول)**
ليكن $A, B \in \mathbb{K}[X]$ كثيرَيْ حدود. يوجد كثيرا حدود $U, V \in \mathbb{K}[X]$ بحيث : $\operatorname{pgcd}(A, B) = AU + BV$.

⛔ U و V ليسا وحيدَيْن !

مبرهنة 34 : إذا كان $A, B \in \mathbb{K}[X]$ مع $B \neq 0$ و كان R باقي القسمة الإقليدية لـ A على B فإنّ :

$$\operatorname{pgcd}(A, B) = \operatorname{pgcd}(B, R)$$

الطريقة العملية لإيجاد القاسم المشترك الأكبر : خوارزمية إقليدس

ليكن $A, B \in \mathbb{K}[X]$. ستمكننا **خوارزمية إقليدس**[5] من إيجاد $\operatorname{pgcd}(A, B)$ و بطريقة سريعة.
بدايةً، نُذكِّر أنّ $\operatorname{pgcd}(0, 0) = 0$ ، و بما أنّ $\operatorname{pgcd}(A, B) = \operatorname{pgcd}(B, A)$ فبإمكاننا أن نفرض أنّ $d^\circ B \leq d^\circ A$ و أنّ $A \neq 0$.
نُعرِّف كثيرات الحدود R_0 ، R_1 ، R_2 ، ⋯ كما يلي :

1. نضع $R_0 = A$ و $R_1 = B$ ؛
2. ليكن k عدداً طبيعيا. إذا كان $R_{k+1} \neq 0$ فإنّ R_{k+2} يساوي باقي القسمة الإقليدية لـ R_k على R_{k+1} ، و في هذه الحالة لدينا : $d^\circ R_{k+2} < d^\circ R_{k+1}$.

إذن $\cdots > d^\circ R_3 > d^\circ R_2 > d^\circ R_1 \geq d^\circ R_0$. و بما أنه لا يوجد إلاّ عدد منتهٍ من الأعداد الطبيعية بين 0 و $d^\circ R_0$ فإنه يوجد عدد $N \in \mathbb{N}^*$ بحيث : $R_N = 0$. و بالتالي فإنّ R_{N-1} هو **آخر باقي غير معدوم** في المتتالية R_0 ، R_1 ، R_2 ، ⋯ ؛ و حسب المبرهنة 34 فإنّ :

$$\operatorname{pgcd}(R_0, R_1) = \operatorname{pgcd}(R_1, R_2) = \cdots = \operatorname{pgcd}(R_{N-1}, R_N) = \operatorname{pgcd}(R_{N-1}, 0) = \widehat{R}_{N-1}$$

حيث $\widehat{R}_{N-1}$ هو الباقي R_{N-1} و الذي قسمناه على معامله المهيمن (ليصبح واحدياً).
إذن $\operatorname{pgcd}(A, B)$ هو **آخر باقي غير معدوم** $\widehat{R}_{N-1}$ **(بعد إرجاعه واحدياً)** في المتتالية R_0 ، R_1 ، R_2 ، ⋯

[5] بالإنجليزية Euclid's Algorithm ؛ بالفرنسية Algorithme d'Euclide .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مثال 29 : لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر لـ $A = X^4 + 7X^3 + 17X^2 + 17X + 6$ و $B = X^3 + X^2 - 4X - 4$.
بما أنّ $d^\circ B \leq d^\circ A$ فإنّ $R_0 = A$ و $R_1 = B$ ؛ و بالقسمة الإقليدية :
$A = (X+6)B + \left(15X^2 + 45X + 30\right)$ أي $15\left(X^2 + 3X + 2\right)$ و لتبسيط الحساب، $R_2 = 15X^2 + 45X + 30 = 15$
نواصل العملية مع $\widetilde{R_2} = X^2 + 3X + 2$. لدينا : $B = (X-2)\left(X^2 + 3X + 2\right) + 0$ أي $R_3 = 0$. إذن آخر باقي غير معدوم هو R_2 و بالقسمة على معامله المهيمن $a_2 = 15$ ، نأخذ $\widehat{R_2} = X^2 + 3X + 2$ أي :

$$\boxed{\text{pgcd}(A, B) = \widehat{R_2} = X^2 + 3X + 2}$$

و لإيجاد U و V (معاملات **بيزوت**) :

$$15\left(X^2 + 3X + 2\right) = A - (X+6)B$$

منه :
$$\text{pgcd}(A, B) = X^2 + 3X + 2 = \frac{1}{15}A + \frac{1}{15}(-X-6)B$$

أي $U = \frac{1}{15}$ و $V = -\frac{1}{15}(X+6)$.

مبرهنة 35 : إذا كان $A, B \in \mathbb{K}[X]$ و كان $P \in \mathbb{K}[X]$ **واحدياً** فإنّ :
$$\text{pgcd}(AP, BP) = P \times \text{pgcd}(A, B)$$

⛔ في الحساب (نظرية الأعداد) ، لدينا $\text{pgcd}(ka, kb) = |k| \cdot \text{pgcd}(a, b)$ و إذا كان $k \geq 0$ فإنّ :
$\text{pgcd}(ka, kb) = k \cdot \text{pgcd}(a, b)$. بالنسبة لكثيرات الحدود، الشرط «P واحدي»يقوم مقام الشرط «$k \geq 0$».

2.3.1 كثيرات الحدود الأولية فيما بينها

تعريف 21 : ليكن $A, B \in \mathbb{K}[X]$. نقول أنّ A و B **أوّليان فيما بينهما** إذا كانت القواسم المشتركة لهما هي كثيرات الحدود الثابتة فقط، أو بتعبير آخر، إذا كان القاسم المشترك الأكبر (الواحدي) لهما هو 1 .

مبرهنة 36 : **(نظرية بيزوت الجزء الثاني** –Bézout–)
ليكن $A, B \in \mathbb{K}[X]$. الخاصيتان التاليتان متكافئتان :

1. A و B أوّليان فيما بينهما.
2. يوجد كثيرَا حدود $U, V \in \mathbb{K}[X]$ بحيث : $AU + BV = 1$.

مبرهنة 37 : **(نظرية غوص** –Gauss–)
ليكن $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. إذا كان $A \mid BC$ و كان A و B أوّليين فيما بينهما فإنّ $A \mid C$.

لازمة 2 : ليكن $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$. إذا كان $A \mid P$ و $B \mid P$ ؛ و كان A و B أوّليين فيما بينهما فإنّ $AB \mid P$.

⛔ الشرط «A و B أوّليان فيما بينهما »جدّ مهم . بدونه، تكون هذه اللازمة خاطئة كما يبينه المثال : إذا كان $A = B = P = X$ فإنّ $A \mid P$ و $B \mid P$ لكن $AB \nmid P$!

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

3.3.ا المضاعف المشترك الأصغر

تعريف 22 : ليكن $A, B \in \mathbb{K}[X]$ كثيرَيْ حدود.
المضاعف المشترك الأكبر لِـ A و B هو كل كثير حدود $M \in \mathbb{K}[X]$ يُحقق :

- M مضاعف مشترك لِـ A و B أي : $A \mid M$ و $B \mid M$ ؛
- M قاسم لكلّ مضاعف مشترك لِـ A و B أي :
$$\forall N \in \mathbb{K}[X], \quad (A \mid N \text{ و } B \mid N) \implies M \mid N$$

نكتب : $M = \operatorname{ppcm}(A, B)$ [6] أو $M = \operatorname{lcm}(A, B)$ [7] .

ملاحظة 63 : ◁ المضاعف المشترك الأصغر لكثيرَيْ حدود ليس وحيداً. لكن إذا كان $A \neq 0$ و $B \neq 0$ فإنه يوجد ppcm وحيد بحيث معامله المهيمن يساوي 1 (أي واحدي) .

فيما يلي، عندما نكتب ppcm دون أي تحديد فإننا نقصد هذا المضاعف المشترك الأصغر الواحدي

كل كثير حدود من الشكل $\lambda \operatorname{ppcm}(A, B)$ ، حيث $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ، هو أيضاً مضاعف مشترك أصغر لـ A و B .

أخيراً : $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{K}^* : \ \operatorname{pgcd}(A, B) \times \operatorname{ppcm}(A, B) = \lambda AB}$.

▷

مثال 30 : كل من X^2 ، $2X^2$ و $-\frac{\sqrt{2}}{3}X^2$ مضاعف مشترك أصغر لـ X و X^2 .
إذا كان $A = 0$ أو $B = 0$ فإنّ $\operatorname{ppcm}(A, B) = 0$ لأنّ 0 هو المضاعف الوحيد لِـ 0 .

مبرهنة 38 : إذا كان $A, B \in \mathbb{K}[X]$ و كان $P \in \mathbb{K}[X]$ **واحدياً** فإنّ :
$$\operatorname{ppcm}(AP, BP) = P \times \operatorname{ppcm}(A, B)$$

4.ا كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل

تعريف 23 : ليكن $P \in \mathbb{K}[X]$. نقول أنّ P **غير قابل للتحليل** في $\mathbb{K}[X]$ إذا كان P ليس ثابتاً و إذا كانت قواسمه هي كثيرات الحدود الثابتة $\lambda \in \mathbb{K}^*$ و μP حيث $\mu \in \mathbb{K}^*$.

⛔ كثيرات الحدود الثابتة لا تدخل في هذا التعريف !
⛔ كثيرات الحدود غير القابلة للتحليل هي ما يكافئ الأعداد الأولية في الحساب (نظرية الأعداد) أو الجزيئات في علم الفيزياء، و هي ما يُمكِّننا من تفكيك كل كثير حدود إلى أجزاء صغيرة غير قابلة للتفكيك بدورها.
ملاحظة 64 : ◁ يجب تحديد المجموعة التي ندرس فيها قابلية التحليل إلى جداء عوامل أولية فمثلاً، كثير الحدود $X^2 + 1$ غير قابل للتحليل على $\mathbb{R}[X]$ لكنه يقبل التحليل $X^2 + 1 = (X - \imath)(X + \imath)$ في $\mathbb{C}[X]$.
أنظر التمرين 137 صفحة 206

▷

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مبرهنة 39 : ليكن $P \in \mathbb{K}[X]$ كثير حدود غير ثابت. يوجد عدد طبيعي وحيد $r \in \mathbb{N}^*$ ؛ كثيرات حدود غير قابلة للتحليل على $\mathbb{K}[X]$ و واحدية P_1 ، P_2 ، ... ، P_r ؛ أعداد طبيعية غير معدومة α_1 ، α_2 ، ... ، α_r و عدد (معامل) وحيد $\lambda \in \mathbb{K}^*$ بحيث :

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$$

مبرهنة 40 :

- لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لكثيرَيْ حدود يكفي أخذ العوامل المشتركة في تحليلهما إلى جداء عوامل و بأصغر أسّ.
- لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لكثيرَيْ حدود يكفي أخذ العوامل المشتركة و غير المشتركة في تحليلهما إلى جداء عوامل و بأكبر أسّ.

مثال 31 : إذا كان $A = 2X(X+1)^2(X-3)^5$ و $B = X(X-1)(X+2)(X-3)^3\left(X^2+4\right)$ فإنّ :

$$\operatorname{pgcd}(A,B) = X(X-3)^3$$
$$\operatorname{ppcm}(A,B) = X(X-1)(X+1)^2(X+2)(X-3)^5\left(X^2+4\right)$$

5.ا الدوال كثيرات الحدود و الجذور

1.5.ا الدوال كثيرات الحدود

تعريف 24 :

- ليكن $P \in \mathbb{K}[X]$ حيث $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ و $\lambda \in \mathbb{K}$. نُسمي **قيمة** P عند λ ، و نكتب $P(\lambda)$ ، المقدار $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$.
- تسمى الدالة $\begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{cases}$ **دالة كثير الحدود** المرفقة بكثير الحدود $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ و غالباً ما نرمز إليها بنفس الرمز P .

2.5.ا جذور كثيرات الحدود

مبرهنة 41 : ليكن $\lambda \in \mathbb{K}$ و $P \in \mathbb{K}[X]$. باقي القسمة الإقليدية لـ P على $(X-\lambda)$ هو $P(\lambda)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

تعريف 25 : ليكن $P \in \mathbb{K}[X]$ و $\lambda \in \mathbb{K}$.

- لدينا :

$$P(\lambda) = 0 \iff P \text{ يقبل القسمة على } (X-\lambda) \text{ في } \mathbb{K}[X]$$

و نقول في هذه الحالة أنّ λ **جذر** لكثير الحدود P في $\mathbb{K}[X]$.

- العدد λ **جذر من الرتبة** k لكثير الحدود P إذا كان k هو أكبر عدد طبيعي بحيث يكون $(X-\alpha)^k$ قاسماً لكثير الحدود $P(X)$.

إذا كان $k = 1$ نقول أنّ λ جذر **بسيط** و إذا كان $k = 2$ نقول أنّ λ جذر **مضاعَف**.

⛔ تحديد المجموعة $\mathbb{K}$ التي نبحث فيها عن الجذور ضروري و مهم ؛ فمثلاً $X^2 + 1$ لا يقبل جذور في $\mathbb{R}$ لكن له جذران في $\mathbb{C}$ و هما i و $-i$.

مثال 32 : لكثير الحدود $P = X^2(X-1)^4(X+2)$ ثلاثة جذور مختلفة و هي : 1 (جذر من الرتبة 4) ، 0 (جذر مضاعَف) و -2 (جذر بسيط)، لكن عدد جذوره الإجمالي هو 7 لأنّ $7 = 1 + 2 + 4$.

مبرهنة 42 : • ليكن $n \in \mathbb{N}$. كل كثير حدود غير معدوم درجته أصغر من أو تساوي n يقبل n جذراً على الأكثر.

- ليكن $n \in \mathbb{N}$. يوجد كثير حدود وحيد درجته أصغر من أو تساوي n و يقبل $n+1$ جذراً (على الأقل) و هو كثير الحدود المعدوم.
- وكحالة خاصة، كثير الحدود المعدوم هو الوحيد الذي له عدد لانهائي من الجذور.

⛔ إذا كان P كثير حدود درجته n فهذا لا يعني بالضرورة أنه يقبل n جذراً. ذلك صحيح إذا كان $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ لكنه خاطئ بالنسبة إلى $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: فكثير الحدود $X^2 + 1$ ذي الدرجة 2 لا يقبل أيّ جذر حقيقي.

3.5.ا إشتقاق كثيرات الحدود

تعريف 26 : ليكن $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ كثير حدود بمعاملات في $\mathbb{K}$ درجته n .

نسمي **مشتق** P كثير الحدود الذي نرمز إليه بـ P' و المعرَّف بالعبارة : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ ، و هو كثير حدود من الدرجة $n-1$.

بالمثل، **المشتق الثاني** هو كثير الحدود الذي نرمز إليه بالرمز P'' و الذي يساوي : $P''(X) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$ ؛ درجته هي $n-2$.

و بصفة عامة، نسمي **المشتق من الرتبة** r كثير الحدود الذي نرمز إليه بالرمز $P^{(r)}$ و المعرَّف بـ :

$$P^{(r)}(X) = \left(P^{(r-1)}\right)'(X) = \sum_{k=r}^{n} k(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1) X^{k-r}$$

⛔ المشتق من الدرجة 0 هو : $P^{(0)} = P$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مثال 33 : إذا كان $P = 8X^3 - 5X^2 + 1$ فإنّ : $P^{(0)} = P$ ؛ $P' = 24X^2 - 10X$ ؛ $P'' = 48X - 10$ ؛ $P^{(3)} = 48$ و $P^{(4)} = 0$.

مبرهنة 43 : ليكن $n \in \mathbb{N}$ و $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. لدينا :

1. $d^\circ P^{(n)} = d^\circ P - n$ إذا كان $n \leq d^\circ P$ و إلاّ فإنّ : $P^{(n)} = 0$.
2. $(P+Q)^{(n)} = P^{(n)} + Q^{(n)}$.
3. $(PQ)' = P'Q + PQ'$ و بصفة عامة، لدينا صيغة **ليبنيتز** (Leibniz) :
$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$$
4. $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

صيغة **ليبنيتز** تُشبه إلى حدّ ما صيغة ثنائي الحد و يمكن إثباتها بنفس الطريقة.

مبرهنة 44 : **(صيغة تايلور** – Taylor) إذا كان $P \in \mathbb{K}[X]$ كثير حدود درجته n و كان $a \in \mathbb{K}$ فإنّ :
$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k \qquad \text{و} \qquad P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$
حيث $P^{(0)} = P$ (المشتق من الدرجة 0) و $k!$ هو **عامِلي** العدد k أي $k! = k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

مبرهنة 45 : ليكن $P \in \mathbb{K}[X]$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ و $k \in \mathbb{N}$. لدينا :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ جذر من الرتبة } k \text{ لِـ } P &\iff (X-\lambda)^k \mid P \text{ لكن } (X-\lambda)^{k+1} \nmid P \\ &\iff \text{يوجد } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ بحيث } Q(\lambda) \neq 0 \text{ و } P = (X-\lambda)^k Q \\ &\iff P^{(k)}(\lambda) \neq 0 \text{ لكن } P(\lambda) = P'(\lambda) = \cdots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

مثال 34 : العدد 1 جذر مضاعف لِـ 6 لأنّ : $P(X) = X^4 + 3X^3 - 3x^2 - 7X + 6$ منه $P(1) = 1 + 3 - 3 - 7 + 6 = 0$ ؛ $P'(X) = 4X^3 + 9X^2 - 6X - 7$ منه $P'(1) = 4 + 9 - 6 - 7 = 0$ و $P''(X) = 12X^2 + 18X - 6$ منه $P''(1) = 12 + 18 - 6 = 24 \neq 0$.

4.5.I العلاقات بين المعاملات و الجذور

تعريف 27 : ليكن P كثير حدود من الدرجة n . نقول أنّ P **مُفكّك تفكيكاً تاماً** على $\mathbb{K}$ إذا كان P يقبل n جذراً في $\mathbb{K}$.
في هذه الحالة، إذا كان P يقبل r جذراً λ_1 ، λ_2 ، ... ، λ_r رُتبها α_1 ، α_2 ، ... ، α_r و إذا كان A معامله المهيمن فإنّ :
$$P = A \prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{\alpha_k} \qquad \text{و} \qquad n = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k$$

يجب تحديد المجموعة التي يقبل فيها كثير حدود تفكيكاً تاماً، فمثلاً $X^2 + 1 = (X-\imath)(X+\imath)$ مُفكّك تفكيكاً تاماً على $\mathbb{C}$ لكنه غير قابل للتحليل على $\mathbb{R}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مثال 35 : لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، كثير الحدود $X^n - 1$ يقبل تفكيكاً تاماً على $\mathbb{C}$ و لدينا :

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right) \quad \text{و} \quad \sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$$

أنظر التمرين 219 صفحة 312

مبرهنة 46 : ليكن $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ من الدرجة n و لتكن λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_n جذوره (مختلفة أو مكررة) .

لكل $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ نضع $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}$ أي :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \\
\sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n \\
&\vdots \\
\sigma_{n-1} &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_1\lambda_2 \cdots \widehat{\lambda_i} \cdots \lambda_n \\
\sigma_n &= \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n
\end{aligned}$$

حيث $\widehat{\lambda_i}$ يعني أننا نحذف الحد λ_i . لدينا :

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\} : \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

ملاحظة 65 : هذه المبرهنة لا تسمح لنا بالتعبير عن جذور كثير الحدود P بدلالة معاملاته لكنها تسمح لنا بالتعبير بدلالة المعاملات عن دوال σ_1 ، σ_2 ، $\cdots$ ، σ_k تُدعى **الدوال التناظرية الأساسية** (أو **العنصرية**) في المتغيرات λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_n .

لدينا : $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ (مجموع الجذور) و $\sigma_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ (حاصل ضرب الجذور) .

مثال 36 : إذا كانت درجة كثير الحدود هي $n = 4$ و كان $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ فإنّ (نُذكّر أنّ $a_4 \neq 0$ لأنّ درجة P هي 4) :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = (-1)^1 \frac{a_{4-1}}{a_4} = -\frac{a_3}{a_4} \\
\sigma_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = (-1)^2 \frac{a_{4-2}}{a_4} = \frac{a_2}{a_4} \\
\sigma_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 = (-1)^3 \frac{a_{4-3}}{a_4} = -\frac{a_1}{a_4} \\
\sigma_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = (-1)^4 \frac{a_{4-4}}{a_4} = \frac{a_0}{a_4}
\end{aligned}$$

مثال 37 : في الحالة الخاصة $n = 2$ و $P = c + bX + aX^2$ (حيث $a \neq 0$) فإنّ مجموع الجذرين هو $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضربهما هو $\lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$.

مثال 38 : ليكن $P = X^n - 1$. لدينا $a_0 = -1$ ، $a_n = 1$ و $a_k = 0$ لأجل $k \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بما أنّ جذور P هي $\lambda_k = e^{2\imath k\pi/n}$ (لأجل $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$) فإنّ :

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = \sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\imath k\pi}{n}} = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega = \sigma_n = \prod_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\imath k\pi}{n}} = (-1)^n \frac{a_{n-n}}{a_n} = (-1)^n \times \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1} \quad \text{و}$$

ملاحظة 66 : ◁ طريقة المثال الآتي هي طريقة كلاسيكية، تستخدم كثيراً في حل جُمل معادلات بعدة مجاهيل مرتبطة فيما بينها بعلاقات **تناظرية** . ▷

مثال 39 : لحل الجملة $(\star)$ $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$ ذات المجهول $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$ ، نضع :

$P = (X-x)(X-y)(X-z)$ ، $\sigma_1 = x+y+z$ ، $\sigma_2 = xy+yz+zx$ و $\sigma_3 = xyz$.

حسب ما سبق فإنّ $P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X^2 - \sigma_3$. لحل الجملة $(\star)$ نتّبع الخطوات التالية :

- **1** • بدايةً، نُعبِّر عن $x+y+z$ ، $x^2+y^2+z^2$ و $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ بدلالة الدوال التناظرية العنصرية σ_1 ، σ_2 و σ_3 .
- **2** • بعدها، نبرهن أنّ (x,y,z) حلّ للجملة $(\star)$ إذا و فقط إذا كانت لـ σ_1 ، σ_2 و σ_3 قِيَم محددة ؛ أو بتعبير آخر، إذا و فقط إذا كان P يساوي كثير حدود $\widehat{P}$ عُرفت معاملاته.
- **3** • في الأخير، نبحث عن جذور $\widehat{P}$. و بما أنّ x ، y و z هي جذور P فإنّ (x,y,z) حلّ للجملة $(\star)$ إذا و فقط إذا كان x ، y و z جذور $\widehat{P}$ (و هي قِيَم معروفة) .

لدينا :

$$\begin{aligned} x+y+z &= \sigma_1 \\ x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} &= \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \end{aligned}$$

إذن :

$$(\star) \iff \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 21 \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = -10 \\ \sigma_3 = -10 \end{cases} \iff P = X^3 - X^2 - 10X + 10$$

$\iff \widehat{P} = X^3 - X^2 - 10X + 10$ هي جذور كثير الحدود x ، y و z

لكن :

$$\widehat{P} = X^2(X-1) - 10(X-1) = (X-1)\left(X^2-10\right) = (X-1)\left(X-\sqrt{10}\right)\left(X+\sqrt{10}\right)$$

إذن $\{x,y,z\} = \left\{1, \sqrt{10}, -\sqrt{10}\right\}$ أي أنّ الحلول هي كلّ تبديلات[8] المجموعة $\left\{1, \sqrt{10}, -\sqrt{10}\right\}$ و عددها هو $3! = 6$. مجموعة الحلول هي إذن :

$$\left\{\left(1, \sqrt{10}, -\sqrt{10}\right), \left(1, -\sqrt{10}, \sqrt{10}\right), \left(\sqrt{10}, 1, -\sqrt{10}\right), \left(\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 1\right), \left(-\sqrt{10}, 1, \sqrt{10}\right), \left(-\sqrt{10}, \sqrt{10}, 1\right)\right\}$$

[8] Permutations بالإنجليزية و الفرنسية.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

5.5.ا النظرية الأساسية في الجبر

المبرهنة الآتية تحمل إسم **النظرية الأساسية في الجبر** أو **نظرية دالومبير–غوص**[9] .

مبرهنة 47 : كل كثير حدود غير ثابت من $\mathbb{C}[X]$ يقبل على الأقل جذراً في $\mathbb{C}$ ؛ أو بتعبير آخر، كل كثير حدود من $\mathbb{C}[X]$ من الدرجة n يقبل n جذراً في $\mathbb{C}$ (هذه الجذور يمكن أن تكون مختلفة مثنى مثنى أو أن يكون البعض منها – أو كلها – مكرّراً).

هذه النتيجة لا تصلح بالنسبة لـ $\mathbb{R}[X]$ ، فمثلاً كثير الحدود X^2+1 لا يقبل أيّ جذر في $\mathbb{R}$.

مبرهنة 48 : **(كثيرات حدود $\mathbb{C}[X]$ غير القابلة للتحليل)**

1. كثيرات حدود $\mathbb{C}[X]$ غير القابلة للتحليل هي كثيرات الحدود من الدرجة 1 .
2. كل كثير حدود من $\mathbb{C}[X]$ يقبل تفكيكاً تاماً على $\mathbb{C}$.

لازمة 3 : **(مرافق كثير حدود)**

ليكن $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

- نسمي **مرافق** P ، و نكتب $\overline{P}$ ، كثير الحدود $\overline{P}=\sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.
- ليكن $\lambda \in \mathbb{C}$. يكون λ جذراً لـ P من الرتبة r إذا و فقط إذا كان $\overline{\lambda}$ جذراً لـ $\overline{P}$ و من الرتبة r .

و كحالة خاصة، إذا كان $P \in \mathbb{R}[X]$ فإنّ $\overline{P}=P$ منه : λ جذر لـ P من الرتبة r إذا و فقط إذا كان $\overline{\lambda}$ جذراً لـه و من نفس الرتبة r .

مبرهنة 49 : **(كثيرات حدود $\mathbb{R}[X]$ غير القابلة للتحليل)**

1. كثيرات حدود $\mathbb{R}[X]$ غير القابلة للتحليل هي كثيرات الحدود من الدرجة 1 و كثيرات الحدود من الدرجة 2 و التي مميزها سالب تماماً (أي ليس لها جذور حقيقية).
2. كل كثير حدود $P \in \mathbb{R}[X]$ يقبل تحليلاً من الشكل $A\prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{\alpha_i} \times \prod_{j=1}^{s}\left(X^2+b_jX+c_j\right)^{\beta_j}$ حيث :
   - A هو المعامل المهيمن في P ؛
   - λ_1 ، λ_2 ، $\cdots$ ، λ_r هي الجذور الحقيقية (مختلفة مثنى مثنى) لـ P و التي رُتبها هي α_1 ، α_2 ، $\cdots$ ، α_r على الترتيب ؛
   - كثيرات الحدود $X^2+b_jX+c_j$ مختلفة مثنى مثنى و غير قابلة للتحليل على $\mathbb{R}[X]$ لكل $j \in \{1,2,\cdots,s\}$.

[9] بالإنجليزية ؛ D'Alembert–Gauss Theorem بالفرنسية. Théorème de D'Alembert–Gauss

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

مثال 40 : تحليل X^4+16 على $\mathbb{C}[X]$ هو :

$$X^4+16=\left(X-2e^{-\imath\pi/4}\right)\left(X-2e^{\imath\pi/4}\right)\left(X-2e^{-3\imath\pi/4}\right)\left(X-2e^{3\imath\pi/4}\right)$$

و نحصل عليه بإيجاد الجذور الرابعة للعدد -16 في $\mathbb{C}$.

أمّا في $\mathbb{R}[X]$ فنحصل عليه بأخذ كل حدّين مترافقين في التحليل السابق :

$$\begin{aligned}\left(X-2e^{-\imath\pi/4}\right)\left(X-2e^{\imath\pi/4}\right)&=X^2-2\left(e^{-\imath\pi/4}+e^{\imath\pi/4}\right)X+4=X^2-4X\cos\frac{\pi}{4}+4\\&=X^2-2\sqrt{2}X+4\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\left(X-2e^{-3\imath\pi/4}\right)\left(X-2e^{3\imath\pi/4}\right)&=X^2-2\left(e^{-3\imath\pi/4}+e^{3\imath\pi/4}\right)X+4=X^2-4X\cos\frac{3\pi}{4}+4\\&=X^2+2\sqrt{2}X+4\end{aligned}$$

منه $X^4+16=\left(X^2-2\sqrt{2}X+4\right)\left(X^2+2\sqrt{2}X+4\right)$ و هو تحليل على $\mathbb{R}[X]$ ؛

أو بطريقة إكمال المربع :

$$\begin{aligned}X^4+16&=\left(X^2\right)^2+4^2+2\times4X^2-2\times4X^2=\left(X^2+4\right)^2-\left(2\sqrt{2}X\right)^2\\&=\left(X^2+4-2\sqrt{2}X\right)\left(X^2+4+2\sqrt{2}X\right)\end{aligned}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ملحق ب

المعادلات من الدرجة الثالثة و الرابعة

ب.1 المعادلات التكعيبية

ب.1.1 مقدمة تاريخية

إهتمّ العلماء منذ القِدم بمسألة حلّ المعادلات التكعيبية و ظهرت طُرق هندسية (نقط تقاطع قطوع مخروطية) لحلها، خاصة على أيدي علماء مسلمين أمثال المهني، إبن الهيثم، البيروني، عمر خيام، شرف الدين الطوسي، الكاشي[1] و غيرهم ؛ و قد كتب الخيام أنه حاول إيجاد طريقة جبرية لكنه أخفق و أنه يأمل أن يتمكن أحد العلماء من بعده من إيجادها، و هو ما تحقق فعلاً.
فقد تمكن علماء إيطاليون في عصر النهضة الأوربية من إيجاد صيغ عامة لحلول المعادلات من الدرجة الثالثة، و بعدها بقليل صيغ لحلول المعادلات من الدرجة الرابعة مستعملين رموزًا تخيلية كما أشرنا إليه في مدخل الباب الأول من هذا الكتاب، و كان ذلك أكبر تقدّم في الرياضيات بعد العصور الوسطى.
و على خلاف المعادلات التربيعية التي تطلبت إدخال رموز تخيلية لحلها بصفة كاملة بإنشاء مجموعة الأعداد المركبة، فالمعادلات من الدرجة الثالثة و الرابعة تقبل كل حلولها في $\mathbb{C}$، بل كل كثير حدود و مهما كانت درجته يقبل كل جذوره في $\mathbb{C}$ كما تنص عليه النظرية الأساسية في الجبر.

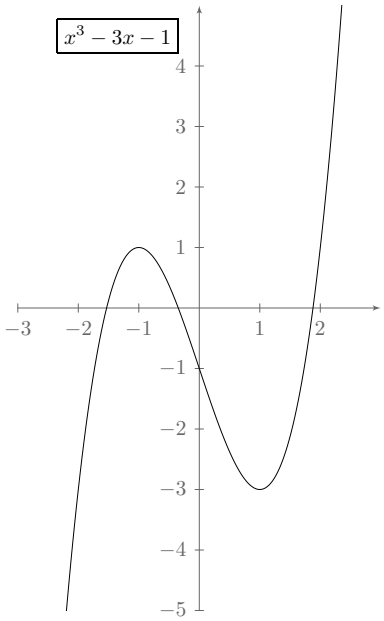
ب.1.2 الطريقة الأولى : طريقة دال فيرو ﴿Del Ferro﴾

لتكن $a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ معادلة من الدرجة الثالثة حيث $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}$ و $a_1\neq 0$.
بقسمة طرفَيْ المعادلة على a_1 هذه الأخيرة تُصبح من الشكل $x^3+ax^2+bx+c=0$.
بدايةً نتخلص من الحد ax^2 و ذلك بإجراء «إنسحاب» على الشكل $x=y+h$ حيث h عدد يجب تعيينه حتى ينعدم معامل الحد y^2. لدينا :

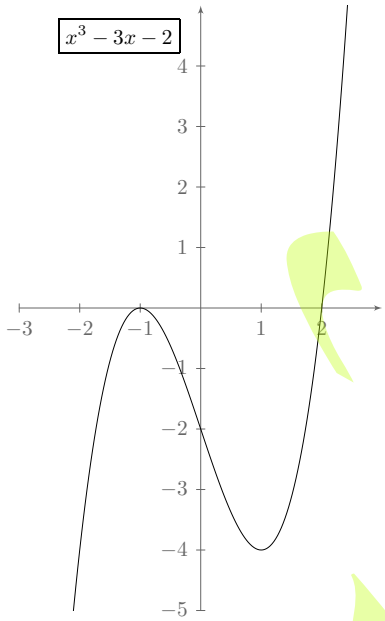
$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+c=0 &\iff (y+h)^3+a(y+h)^2+b(y+h)+c=0\\ &\iff y^3+3hy^2+3h^2y+h^3+a\left(y^2+2hy+h^2\right)+by+bh+c=0\\ &\iff y^3+(3h+a)y^2+\left(3h^2+2ah+b\right)y+h^3+ah^2+bh+c=0\end{aligned}$$

[1] لهذا العالم طريقة عددية رائعة لإيجاد قيمة تقريبية لحل المعادلة $x^3+q=px$ أي $x=\frac{q+x^3}{p}$ ذات المجهول x كما يلي : بداية، يأخذ $x_0=\frac{q}{p}$ كقيمة تقريبية للحل، ثمّ $x_1=\frac{q+x_0^3}{p}$ ثمّ $x_2=\frac{q+x_1^3}{p}$ ، ... ، ثمّ $x_n=\frac{q+x_{n-1}^3}{p}$ ، إلخ.
يمكن أن نثبت أنّ هذه الطريقة تتقارب بسرعة نحو الحل.

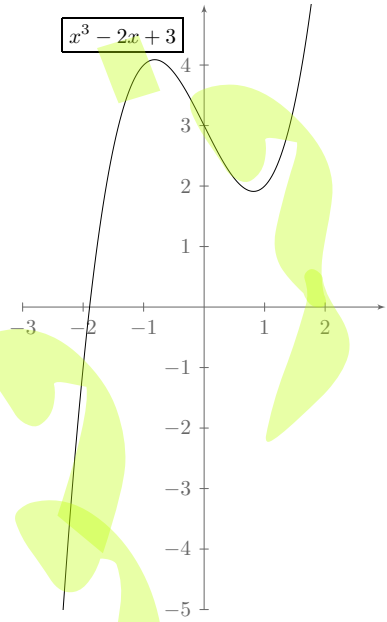
http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى



شكل ب.3: ثلاثة جذور



شكل ب.2: جذران حقيقيان



شكل ب.1: جذر حقيقي واحد

إذن يجب أن يكون $3h + a = 0$ أي $h = -\frac{a}{3}$.

بعد هذا، تُصبح المعادلة من الشكل : $X^3 + pX + q = 0$.

بما أنّ $\lim\limits_{X \to -\infty} \left(X^3 + pX + q\right) = -\infty$ و $\lim\limits_{X \to +\infty} \left(X^3 + pX + q\right) = +\infty$ و بما أنّ الدالة $X \longmapsto X^3 + pX + q$ مستمرة (متصلة) على $\mathbb{R}$ فإنّ المعادلة $X^3 + pX + q = 0$ تقبل حلاً حقيقيا على الأقل.

في الحقيقة، و كما تبيِّنه الأشكال ب.1 ، ب.2 و ب.3 فإنّ هذه المعادلة يمكن أن تقبل حلاً حقيقيا واحدا، حلّين حقيقيين (أحدهما مضاعف) أو ثلاثة حلول حقيقية.

الآن، لحلّ المعادلة نكتب x على شكل مجموع عددين : $x = u + v$ و المعادلة التكعيبية تُصبح :

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$$

و يمكن إعادة كتابتها على الشكل :

$$\left(u^3 + v^3\right) + 3uv(u+v) = -q - p(u+v)$$

بطبيعة الحال، يوجد عدد لانهائي من الأزواج $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ و التي تحقق هذه المعادلة، لكن إذا أضفنا الشرطين :

$$u^3 + v^3 = -q \quad \text{و} \quad 3uv = -p$$

فإننا نجد أنّ $u^3 + \left(\frac{-p}{3u}\right)^3 = -q$ أي $u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0$ (لأنّ $v = \frac{-p}{3u}$) و هي معادلة تربيعية في المجهول $t = u^3$.

للمعادلة $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ حلان في $\mathbb{C}$ و هما $t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$ منه :

$u^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$ و بالتالي $v^3 = -q - u^3 = -q - \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$ ؛

أو $u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$ و بالتالي $v^3 = -q - u^3 = -q - \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2} = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$.

- إذا كان $u^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4}{27}p^3}}{2}$ فإنّ :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

$$u=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}=\alpha$$

أو $u=j\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}=j\alpha$

أو $u=j^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}=j^2\alpha$

حيث $j=e^{2\imath\pi/3}$ و $j^3=1$.

← إذا كان $u=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$ فإنّ $v=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}=\beta$ (لأنّ $3uv=-p$).

← إذا كان $u=j\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$ فإنّ $v=j^2\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}=j^2\beta$ (لأنّ $3uv=-p$ أي أنّ الجداء $3uv$ يجب أن يكون حقيقيا و يساوي $-p$ و لأنّ $j\times j^2=1$).

← إذا كان $u=j^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}$ فإنّ $v=j\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}=j\beta$ (لأنّ $3uv=-p$ أي أنّ الجداء $3uv$ يجب أن يكون حقيقيا و يساوي $-p$ و لأنّ $j^2\times j=1$).

- إذا كان $u^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}$ فإنّ :

$u=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}=\beta$ منه $v=\alpha$ ؛

أو $u=j\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}=j\beta$ منه $v=j^2\alpha$ ؛

أو $u=j^2\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4}{27}p^3}}{2}}=j^2\beta$ منه $v=j\alpha$.

و بما أنّ $x=u+v$ فإنّ $x=\alpha+\beta$ أو $x=j\alpha+j^2\beta$ أو $x=j^2\alpha+j\beta$ أو بتعبير آخر :

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+(4p^3/27)}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+(4p^3/27)}}{2}}$$

أو $x=\left(\frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+(4p^3/27)}}{2}}+\left(\frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+(4p^3/27)}}{2}}$

أو $x=\left(\frac{-1-\imath\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+(4p^3/27)}}{2}}+\left(\frac{-1+\imath\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+(4p^3/27)}}{2}}$

عند النظر إلى هذه الصيغ، يبدو أنّ الحل الأول حقيقي و الحلين الآخرين مركبين لكن المعادلة x^3-3x-1 (شكل ب.3) تقبل ثلاثة حلول حقيقية؟! كيف ذلك ؟

الجواب نجده عند التمعن في العبارة : $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3$. كما هو الحال بالنسبة للمعادلات التربيعية، هذا العدد يُسمى **مميِّز** المعادلة و هو عدد حقيقي يمكن أن يكون سالباً و بالتالي فالعدد Δ يمكن أن يكون مركباً و كذلك الحال بالنسبة للجذور التكعيبية. بتعبير أدقّ، لدينا (نُذكِّر أنّ : $j+j^2=-1$) :

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

	الحل الأول	الحل الثاني	الحل الثالث
$\Delta > 0$	حقيقي	مركب	مركب
$\Delta = 0$	حقيقي	حقيقيان و متساويان	
$\Delta < 0$	حقيقي	حقيقي	حقيقي

بما أنّ معاملات المعادلة حقيقية، فإنّ الحلين المركبين (عندما $\Delta > 0$) مترافقان.

ما مدى أهمية هذه الصيغ ؟

إذا كانت هذه الصيغ مهمة و مساعدة، فلِمَ لا تُستخدم كثيراً كما هو الحال بالنسبة إلى المعادلات التربيعية ؟
للإجابة على هذا السؤال، ندرس بعض الأمثلة :

مثال 41 : نعتبر المعادلة :

$$x^3 + 6x - 2 = 0$$

أحد الحلول، حسب الصيغ السابقة هو :

$$x = \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{4 + 32}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{4 + 32}}{2}} = \sqrt[3]{-2} + \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$$

و هي بدون شك نتيجة مُرضية و كان من المستحيل ظنّ أنّ هذا العدد (فرق جذرين تكعيبيين) حلّ لتلك المعادلة البسيطة !

مثال 42 : نعتبر المعادلة :

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

أحد الحلول، حسب الصيغ السابقة هو :

$$x = \sqrt[3]{\frac{4 - \sqrt{16 + 4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{16 + 4}}{2}} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$$

و هي نتيجة لا بأس بها أيضاً.
لكن إذا استعملنا آلة حاسبة لإيجاد قيمة تقريبية لهذا الحلّ، سوف نلاحظ أنّ $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1$ و بالفعل، عند التعويض نجد أنّ $x = 1$ حلّ للمعادلة السابقة و بما أنّ $\Delta = 20 > 0$ فحسب ما سبق، $x = 1$ هو الحل الحقيقي الوحيد للمعادلة إذن $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = 1$.
هذا يُبرز أحد نقائص هذه الصيغ : بالنسبة للمعادلات التربيعية، صيغة الحلول تُخبرنا دائماً عن طبيعتها (حلول ناطقة أو صمّاء)؛ لكن في مثالنا، الحل ناطق (بل طبيعي) لكن الصيغة العامة فشلت في الكشف عن ذلك (لا يمكن التنبؤ بأن العدد $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ طبيعي إلاّ بعد الحساب) !

مثال 43 : لنستمرّ في اختبارنا لمدى نجاعة هذه الصيغ، و لنعتبر معادلة حلولها معروفة مسبقاً بحيث يكون مجموع هذه الحلول معدوماً (مجموع الحلول يساوي معاكس معامل x^2) .
مثلاً $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ و $x_3 = -3$. المعادلة هي إذن :

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = x^3 - 7x + 6 = 0$$

و حسب الصيغ السابقة، إحدى الحلول هي :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$x = \sqrt[3]{\frac{-6-\sqrt{36-(1372/27)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-6+\sqrt{36-(1372/27)}}{2}}$$
$$= \sqrt[3]{-3-\sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3+\sqrt{-\frac{100}{27}}}$$
$$= \sqrt[3]{-3-\frac{10\sqrt{3}}{9}\imath} + \sqrt[3]{-3+\frac{10\sqrt{3}}{9}\imath}$$

و هي نتيجة بعيدة كلّ البعد عن الحلول -3 ، 2 و 1 !

في الأخير، إذا كانت صيغ الحلول بسيطة و سهلة للحفظ، فإنها غير عملية (لا تساعدنا كثيراً في الحالات التطبيقية) : في غالب الأحيان لا تُعبِّر عن الحلول في أبسط صيغة ! هذا ما يُبرِّر عدم استعمالها إلاّ في حالات قليلة ؛ لكن ذلك لا ينفي أهميتها النظرية فقد شكّل حلّ المعادلات التكعيبية قفزةً كبيرة في تاريخ الرياضيات !

تطبيق 7 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1. $x^3 + 3x + 2 = 0$
2. $x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} = 0$
3. $x^3 - \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} = 0$
4. $x^3 - 15x - 4$

الحلّ.

1. لدينا : $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 2^2 + \frac{4}{27} \times 3^3 = 8$ منه :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-2-\sqrt{8}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-2+\sqrt{8}}{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{2}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$$
$$x = j\sqrt[3]{\frac{-2-\sqrt{8}}{2}} + j^2\sqrt[3]{\frac{-2+\sqrt{8}}{2}} = j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - j\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$$
$$x = j^2\sqrt[3]{\frac{-2-\sqrt{8}}{2}} + j\sqrt[3]{\frac{-2+\sqrt{8}}{2}} = j\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - j^2\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$$

2. لدينا : $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{4}{27} \times \left(-\frac{3}{4}\right)^3 = 0$ منه :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{4}-\sqrt{0}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{4}+\sqrt{0}}{2}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$
$$x = j\sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{4}-\sqrt{0}}{2}} + j^2\sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{4}+\sqrt{0}}{2}} = -\frac{1}{2}j - \frac{1}{2}j^2 = -\frac{1}{2}\left(j+j^2\right) = -\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}$$
$$x = j^2\sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{4}-\sqrt{0}}{2}} + j\sqrt[3]{\frac{-\frac{1}{4}+\sqrt{0}}{2}} = -\frac{1}{2}j^2 - \frac{1}{2}j = -\frac{1}{2}\left(j^2+j\right) = -\frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

• 3 لدينا : $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = \left(\frac{27}{4}\right)^2 + \frac{4}{27} \times \left(-\frac{27}{4}\right)^3 = 0$ منه :

$$x = \sqrt[3]{\frac{-\frac{27}{4} - \sqrt{0}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-\frac{27}{4} + \sqrt{0}}{2}} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$$
$$x = j\sqrt[3]{\frac{-\frac{27}{4} - \sqrt{0}}{2}} + j^2\sqrt[3]{\frac{-\frac{27}{4} + \sqrt{0}}{2}} = -\frac{3}{2}j - \frac{3}{2}j^2 = -\frac{3}{2}\left(j + j^2\right) = -\frac{3}{2} \times (-1) = \frac{3}{2}$$
$$x = j^2\sqrt[3]{\frac{-\frac{27}{4} - \sqrt{0}}{2}} + j\sqrt[3]{\frac{-\frac{27}{4} + \sqrt{0}}{2}} = -\frac{3}{2}j^2 - \frac{3}{2}j = -\frac{3}{2}\left(j^2 + j\right) = -\frac{3}{2} \times (-1) = \frac{3}{2}$$

• 4 لدينا : $\Delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = (-4)^2 + \frac{4}{27} \times (-15)^3 = -484 = (22\imath)^2$. نأخذ $\sqrt{\Delta} = 22\imath$ منه :

$$x = \sqrt[3]{\frac{4 - 22\imath}{2}} + \sqrt[3]{\frac{4 + 22\imath}{2}} = \sqrt[3]{2 - 11\imath} + \sqrt[3]{2 + 11\imath}$$
$$x = j\sqrt[3]{\frac{4 - 22\imath}{2}} + j^2\sqrt[3]{\frac{4 + 22\imath}{2}} = j\sqrt[3]{2 - 11\imath} + j^2\sqrt[3]{2 + 11\imath}$$
$$x = j^2\sqrt[3]{\frac{4 - 22\imath}{2}} + j\sqrt[3]{\frac{4 + 22\imath}{2}} = j^2\sqrt[3]{2 - 11\imath} + j\sqrt[3]{2 + 11\imath}$$

نضع $z = a + \imath b$ حيث $z^3 = 2 + 11\imath$ منه $z^3 = (a + \imath b)^3 = a^3 - 3ab^2 + \imath\left(3a^2b - b^3\right)$ و بالتالي :
$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 2 \\ 3a^2b - b^3 = 11 \end{cases}$. نلاحظ أنّ الزوج $(a, b) = (2, 1)$ يُحقق هذه الجملة، إذن نأخذ $z = 2 + \imath$.

من جهة أخرى، لدينا : $\overline{2 + 11\imath} = \overline{(2 + \imath)^3} = \left(\overline{2 + \imath}\right)^3 = (2 - \imath)^3$ إذن $2 - 11\imath$ جذر تكعيبي للعدد $2 - 11\imath$. منه :

$$x = 2 - \imath + 2 + \imath = 4$$
$$x = j(2 - \imath) + j^2(2 + \imath) = 2\left(j + j^2\right) + \imath\left(-j + j^2\right) = -2 - \sqrt{3}$$
$$x = j^2(2 - \imath) + j(2 + \imath) = 2\left(j^2 + j\right) + \imath\left(-j^2 + j\right) = -2 + \sqrt{3}$$

■

تطبيق 8 :
أوجد الشرط اللازم و الكافي الذي يجب أن يُحققه العددان $p \neq 0$ و $q \neq 0$ حتى يكون للمعادلة $x^3 + px + q = 0$ على الأقل حلين طويلتها 1 . إستنتج حلول المعادلتين :

• 1 $x^3 - 2x + \sqrt{3} = 0$

• 2 $x^3 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 0$

الحلّ. بدايةً، نلاحظ أنّ العددين -1 و 1 لا يمكن أن يكونا حلين معاً (في آن واحد) للمعادلة لأنه في هذه الحالة يكون $q - p + 1 = 0 = -1 - p + q$ منه $q = 0$ و هذا يُناقض الفرض $q \neq 0$.
و بما أنّ معاملات المعادلة حقيقية، فإنه إذا كان α حلاً للمعادلة، فإنّ $\overline{\alpha}$ حلّ لها أيضاً و بالتالي، إذا كان للمعادلة حلان طويلتهما 1 فإنّ هذين الحلين مترافقان و نكتبهما على الشكل $e^{\imath\theta}$ و $e^{-\imath\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ ، و في هذه الحالة المعادلة تقبل حلاً ثالثاً x_0 . منه :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- إذا كان $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ فإنّ 1 حل مضاعف للمعادلة.
- إذا كان $\theta = \pi \pmod{2\pi}$ فإنّ -1 حل مضاعف للمعادلة.
- إذا كان $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ فإنّ $e^{\imath\theta}$ و $e^{-\imath\theta}$ مركبان و مترافقان ، و للمعادلة حل ثالث x_0 و هو حقيقي. لدينا :

$$\begin{cases} x_0 + e^{\imath\theta} + e^{-\imath\theta} = 0 \\ x_0 e^{\imath\theta} + x_0 e^{-\imath\theta} + e^{\imath\theta} e^{-\imath\theta} = p \\ x_0 e^{\imath\theta} e^{-\imath\theta} = -q \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 + 2\cos\theta = 0 \\ 2x_0 \cos\theta + 1 = p \\ x_0 = -q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\cos\theta = -x_0 = q \\ 1 - x_0^2 = p \\ x_0 = -q \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{q}{2} \\ x_0 = -q \\ 1 - q^2 = p \end{cases} \quad ; \quad q \in [-2, 2]$$ مع

و بالتالي إذا كان $1 - q^2 = p$ و $q \in [-2, 2]$ فإنّ المعادلة تقبل حلاً حقيقيا $x_0 = -q$ و حلين مركبين مترافقين $e^{\imath\theta}$ و $e^{-\imath\theta}$ مع $\cos\theta = \dfrac{q}{2}$.

1• لدينا $p = -2$ و $q = \sqrt{3}$ منه $1 - q^2 = 1 - 3 = -2$ و $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. نأخذ $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ فيكون للمعادلة المعطاة الحل الحقيقي $x_0 = -q = -\sqrt{3}$ و الحلين المركبين المترافقين $e^{\imath\pi/6}$ و $e^{-\imath\pi/6}$.

2• لدينا $p = \dfrac{3}{4}$ و $q = \dfrac{1}{2}$ منه $1 - q^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ و $\cos\theta = \dfrac{1}{4}$ منه $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \dfrac{15}{16}$ و بالتالي فالمعادلة المعطاة تقبل الحل الحقيقي $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ و الحلين المركبين المترافقين $\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{15}}{4}\imath$ و $\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{15}}{4}\imath$.

■

ب.3.1 الطريقة الثانية : طريقة لاڤرانج ﴿LAGRANGE﴾

كما في الفقرة السابقة، بالتعويض $y = x - \dfrac{a}{3}$ نُحوِّل المعادلة $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ إلى الشكل $X^3 + pX + q = 0$.
ليكن كثير الحدود $P(X) = X^3 + pX + q$ و لتكن α ، β و γ جذوره الثلاثة في المجموعة $\mathbb{C}$.
لدينا : $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ بعد النشر و الترتيب نجد :

$$P(X) = X^3 + (\alpha + \beta + \gamma) X^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) X - \alpha\beta\gamma$$

و بالمقارنة مع العبارة الأصلية ينتج : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ، $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = p$ و $\alpha\beta\gamma = -q$.
نضع $\delta = (\alpha - \beta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\gamma - \alpha)^2$. لدينا :

$$\delta = -4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^3 - 27(\alpha\beta\gamma)^2 = -4p^3 - 27q^2 = -108\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

نعتبر الأعداد :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$$\begin{aligned} 3\xi_0 &= \alpha+\beta+\gamma \\ 3\xi_1 &= \alpha+\mathrm{j}\beta+\mathrm{j}^2\gamma \\ 3\xi_2 &= \alpha+\mathrm{j}^2\beta+\mathrm{j}\gamma \end{aligned} \qquad (1)$$

حسب ما سبق، $\xi_0 = 0$ و :

$$\xi_1^3 = -\frac{q}{2}+\frac{\sqrt{3}}{18}\imath\sqrt{\delta} = -\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}$$
$$\xi_2^3 = -\frac{q}{2}-\frac{\sqrt{3}}{18}\imath\sqrt{\delta} = -\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}$$

حيث إعتمدنا على المساواة :

$$\begin{aligned} 9\xi_1\xi_2 &= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\left(\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= (\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 0-3p = -3p \end{aligned}$$

لإيجاد قيمة ξ_2^3 . منه :

$$\xi_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$
$$\xi_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

حيث نختار الجذرين التكعيبيين بمراعاة الشرط $\xi_1\xi_2 = -\frac{p}{3}$.

مُحدِّد الجملة (1) هو :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{vmatrix} = 3\left(\mathrm{j}^2-\mathrm{j}\right) = -3\sqrt{3}\imath \neq 0$$

و بما أنه غير معدوم فإنّ هذه الجملة تقبل حلاً وحيدا و هو :

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi_1+\xi_2 \\ \beta &= \mathrm{j}^2\xi_1+\mathrm{j}\xi_2 \\ \gamma &= \mathrm{j}\xi_1+\mathrm{j}^2\xi_2 \end{aligned}$$

حيث تمّ التعبير أعلاه عن ξ_1 و ξ_2 بدلالة p و q و هي نفس الصِّيَغ التي وجدناها بطريقة **دال فيرو**.

ب.4.1 الطريقة الثالثة : طريقة فييت ﴿VIÈTE﴾

في هذه الفقرة، نستعمل المتطابقة المثلثية $\cos(3t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$ و التي برهنّاها في الفقرة 1 • صفحة 48 .

ليكن a عدداً حقيقيا حيث $|a| < 1$.

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

- بدايةً، نبرهن أنّ المعادلة $\cos 3\alpha = a$ تُكافئ المعادلة $x^3 + px + q = 0$ مع $4p^3 + 27q^2 < 0$:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha = a &\iff 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = a\\ &\iff \cos^3\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha - \frac{a}{4} = 0\\ &\iff x^3 + px + q = 0\end{aligned}$$

حيث $x = \cos\alpha$ ، $p = -\frac{3}{4}$ و $q = -\frac{a}{4}$. لدينا :

$$4p^3 + 27q^2 = 4\left(-\frac{3}{4}\right)^3 + 27\left(-\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{27}{16}\left(a^2 - 1\right)$$

و بما أنّ $|a| < 1$ فإنّ $4p^3 + 27q^2 < 0$.

- الآن، نبرهن أنه إذا كان $p, q \in \mathbb{R}^*$ بحيث $4p^3 + 27q^2 < 0$ فإنه يوجد $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in \mathbb{R}$ بحيث حلول المعادلة $x^3 + px + q = 0$ هي $\rho\cos\theta$ ، $\rho\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$ و $\rho\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$:

نعتبر المعادلة :

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

نضع $x = \rho\cos\theta$. بما أنّ $q \neq 0$ فإنّ $x = 0$ ليس حلاً للمعادلة (2) ، و بما أنّ $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$ فإنّ :

$$\begin{aligned}x^3 + px + q = 0 &\iff \rho^3\cos^3\theta + p\rho\cos\theta + q = 0\\ &\iff \rho^3\left(\frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}\right) + p\rho\cos\theta + q = 0\\ &\iff \rho^3\frac{\cos 3\theta}{4} + \left(\frac{3\rho^3}{4} + p\rho\right)\cos\theta + q = 0\\ &\iff \cos 3\theta + \left(3 + \frac{4p}{\rho^3}\right)\cos\theta + \frac{4q}{\rho^3} = 0\end{aligned}$$

لكن $4p^3 + 27q^2 < 0$ إذن $p < 0$.

نختار ρ بحيث $3 + \frac{4p}{\rho^2} = 0$ أي $\rho = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}$. نختار القيمة $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-p}$ فيكون

$$\frac{4q}{\rho^3} = -\frac{4q \times 3\sqrt{3}}{8p\sqrt{-p}} = -\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}$$

منه :

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0 \\ x = \rho\cos\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos 3\theta = \dfrac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}} \\ \rho = 2\sqrt{-\dfrac{p}{3}} \\ x = \rho\cos\theta \end{cases}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

نلاحظ أنّ $\left|\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}\right| < 1$ لأنّ :

$$4p^3+27q^2<0 \implies 0\le\frac{27q^2}{-4p^3}<1 \qquad (p^3<0 \text{ لأنّ})$$
$$\implies 0\le\sqrt{\frac{27q^2}{-4p^3}}<1$$
$$\implies \left|\sqrt{\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}}\right|<1$$

لحلّ المعادلة (2) ، نحلّ : $\cos 3\theta=\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}=\cos\varphi$.

$$\cos 3\theta=\cos\varphi \iff 3\theta=\pm\varphi \pmod{2\pi} \iff \theta=\pm\frac{\varphi}{3}\left(\text{mod }\frac{2\pi}{3}\right)$$

بما أنّ الدالة cos زوجية و 2π—دورية فإنّ حلول المعادلة (2) هي :

$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$ ، $2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$ و $2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)$.

تطبيق 9 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $x^3-4x+\frac{8}{3}=0$.

الحلّ. لدينا : $4p^3+27q^2=4(-4)^3+27\left(\frac{8}{3}\right)^2=-64<0$ ، إذن بإمكاننا إستخدام الطريقة المثلثية.

نضع $\rho=2\sqrt{\frac{-p}{3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$. و نبحث عن θ بحيث :

$$\cos 3\theta=\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}=-\frac{8\sqrt{3}}{8\times 2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{6}$$

نجد : $\theta=\pm\frac{5\pi}{18}\left(\text{mod }\frac{2\pi}{3}\right)$.

إذن حلول المعادلة $x^3-4x+\frac{8}{3}=0$ هي : $\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\frac{5\pi}{18}$ ، $\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\frac{7\pi}{18}$ و $\frac{4}{\sqrt{3}}\cos\frac{17\pi}{18}$. ■

ب.2 المعادلات من الدرجة الرابعة

أوّل من تمكن من إيجاد صيغة عامة لحلول المعادلات من الدرجة الرابعة هو العالم الإيطالي **فيراري** (FERRARI).
نستعرض فيما يلي طريقة **ديكارت**، طريقة **فيراري** و بعدها طريقة **لاغرانج** .

ب.2.1 الطريقة الأولى : طريقة ديكارت DESCARTES

نعتبر المعادلة $a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$ حيث $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\mathbb{R}$ و $a_1\neq 0$.
بقسمة الطرفين على a_1 نكتب هذه الأخيرة على الشكل $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ و بالتعويض $x=y+h$ ، حيث $h=-\frac{a}{4}$ ، نكتبها على الشكل $X^4+pX^2+qX+r=0$.
إذا كان $q=0$ فإنّ المعادلة مضاعفة التربيع و يتم حلها بوضع $t=X^2$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

نفرض إذن أنّ $q \neq 0$. ليكن $P(X) = X^4 + pX^2 + qX + r$.
نبحث عن ثلاثة أعداد حقيقية u ، v و w بحيث يكون $P(X) = \left(X^2 + uX + v\right)\left(X^2 - uX + w\right)$.
بدايةً، نلاحظ أنّ $u \neq 0$ بالضرورة (و إلاّ سيكون $P(X) = X^4 + (v+w)X^2 + vw$ منه $q = 0$ و هذا مرفوض) . لدينا :

$$P(X) = \left(X^2 + uX + v\right)\left(X^2 - uX + w\right) \iff P(X) = X^4 + \left(v + w - u^2\right)X^2 + (uw - uv)X + vw$$
$$\iff X^4 + pX^2 + qX + r = X^4 + \left(v + w - u^2\right)X^2 + (uw - uv)X + vw$$
$$\iff \begin{cases} v + w - u^2 = p \\ uw - uv = q \\ vw = r \end{cases}$$

من المعادلة الأولى نستخرج $w + v = p + u^2$ و من المعادلة الثانية $w - v = \frac{q}{u}$ منه $w = \frac{1}{2}\left(p + u^2 + \frac{q}{u}\right)$ و $v = \frac{1}{2}\left(p + u^2 - \frac{q}{u}\right)$ و بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد :

$$r = vw = \frac{1}{2}\left(p + u^2 - \frac{q}{u}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(p + u^2 + \frac{q}{u}\right) = \frac{1}{4u^2}\left(u^6 + 2pu^4 + p^2u^2 - q^2\right)$$

أي

$$u^6 + 2pu^4 + (p^2 - 4r)u^2 - q^2 = 0$$

و بوضع $t = u^2$ تُصبح هذه المعادلة :

$$t^3 + 2pt^2 + (p^2 - 4r)t - q^2 = 0$$

و هي معادلة تكعيبية في المجهول t . ليكن t_0 أحد حلولها . نأخذ $u = \sqrt{t_0}$ منه :

$$v = \frac{1}{2}\left(p + t_0 - \frac{q}{\sqrt{t_0}}\right) \quad \text{و} \quad w = \frac{1}{2}\left(p + t_0 + \frac{q}{\sqrt{t_0}}\right)$$

بقي الآن أن نحل المعادلتين $X^2 + uX + v = 0$ و $X^2 - uX + w = 0$ و تكون حلولها هي حلول المعادلة من الدرجة الرابعة $X^4 + pX^2 + qX + r = 0$.

تطبيق 10 : حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :
$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 20x - 65 = 0 \qquad (3)$$

الحلّ . لدينا $h = -\frac{a}{4} = -\frac{-4}{4} = 1$. بالتعويض $x = y + 1$ يكون :

$$(3) \iff (y+1)^4 - 4(y+1)^3 + 8(y+1)^2 + 20(y+1) - 65 = 0$$
$$\iff y^4 + 2y^2 + 28y - 40 = 0 \qquad (4)$$

نبحث عن أعداد حقيقية $u \neq 0$ ، v و w بحيث : $y^4 + 2y^2 + 28y - 40 = \left(y^2 + uy + v\right)\left(y^2 - uy + w\right)$.
هذه الأعداد تُحقق :

$$\begin{cases} v + w - u^2 = p \\ uw - uv = q \\ vw = r \end{cases} \iff \begin{cases} v + w - u^2 = 2 \\ uw - uv = 28 \\ vw = -40 \end{cases} \iff \begin{cases} v = \frac{1}{2}\left(2 + u^2 - \frac{28}{u}\right) \\ w = \frac{1}{2}\left(2 + u^2 + \frac{28}{u}\right) \\ vw = -40 \end{cases}$$

و بالتالي فإنّ u حل للمعادلة : $u^6 + 4u^4 + 164u^2 - 784 = 0$ و بوضع $t = u^2$ يكون t حلاً للمعادلة :

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

$t^3+4t^2+164t-784=0$ ، و هي معادلة تكعيبية. لحلها، نتّبع أحد الطرق السابقة. نجد أنّ $t_0=4$ حلّ لها، منه $u=\sqrt{t_0}=2$ ، $v=-4$ و $w=10$.

بقي لنا أن نحل المعادلتين $y^2+2y-4=0$ و $y^2-2y+10=0$ ؛ نجد أنّ الحلول هي $y_1=-1-\sqrt{5}$ و $y_2=-1+\sqrt{5}$ للمعادلة الأولى ؛ $y_3=1-3\imath$ و $y_4=1+3\imath$ للمعادلة الثانية.

و بما أنّ $x=y+1$ فإنّ حلول المعادلة (3) هي : $x_1=y_1+1=-\sqrt{5}$ ، $x_2=y_2+1=\sqrt{5}$ ، $x_3=y_3+1=2-3\imath$ و $x_4=y_4+1=2+3\imath$. ■

ب.2.2 الطريقة الثانية : طريقة فيراري FERRARI

نعتبر المعادلة : $x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0$.

الهدف هو التخلص من الحد $2px^3$ و ذلك بإتمام المربع كما يلي : ليكن u عدداً حقيقيا.

بما أنّ : $(x^2+px+u)^2=x^4+2px^3+(2u+p^2)x+u^2$ فإنّ :

$$(x^2+px+u)^2=(p^2-q+2u)x^2+2(pu-r)x+(u^2-s)$$

نختار u بحيث يكون $(p^2-q+2u)x^2+2(pu-r)x+(u^2-s)$ مربعاً تاماً و هذا يتحقق عندما يكون $\Delta=0$ حيث Δ هو مميِّز المعادلة : $(p^2-q+2u)x^2+2(pu-r)x+(u^2-s)=0$ ، و في هذه الحالة يكون $x_0=-\dfrac{pu-r}{2(p^2-q+2u)}$ حلاً مضاعفاً لها. لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta&=(2(pu-r))-4(p^2-q+2u)(u^2-s)\\&=-8u^3+4qu^2+8(s-pr)u+4p^2s-4qs+4r^2\end{aligned}$$

إذن :

$$\Delta=0 \iff -2u^3+qu^2+2(s-pr)u+p^2s-qs+r^2=0$$

و هي معادلة تكعيبية في المجهول u . ليكن u_0 أحد حلولها. لدينا :

$$\begin{aligned}(p^2-q+2u_0)x^2+2(pu_0-r)x+(u_0^2-s)&=\left[x-\left(-\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}\right)\right]^2\\&=\left(x+\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}\right)^2\end{aligned}$$

منه :

$$\begin{aligned}(x^2+px+u_0)^2&=(p^2-q+2u_0)x^2+2(pu_0-r)x+(u_0^2-s)\\\iff (x^2+px+u_0)^2&=\left(x+\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}\right)^2\\\iff x^2+px+u_0&=-\left(x+\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}\right)\\x^2+px+u_0&=\left(x+\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}\right)\qquad \text{أو}\\\iff x^2+(p+1)x+u_0+\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}&=0\\x^2+(p-1)x+u_0-\frac{pu_0-r}{2(p^2-q+2u_0)}&=0\qquad \text{أو}\end{aligned}$$

و تكون حلول هاتين المعادلتين هي حلول المعادلة الأصلية.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

تطبيق 11 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :
$$x^4+2x^3+x^2-14x-56=0 \quad (5)$$

الحلّ. لدينا : $p=1$ ، $q=1$ ، $r=-7$ و $s=-56$.
نبحث عن u بحيث : $\left(x^2+px+u\right)^2=\left(p^2-q+2u\right)x^2+2\left(pu-r\right)x+\left(u^2-s\right)$ أي بحيث :
$\left(x^2+x+u\right)^2=2ux^2+2\left(u+7\right)x+u^2+56$. لدينا : $\Delta=4\left(u+7\right)^2-4\left(2u\right)\left(u^2+56\right)$ منه :
$$\Delta=0 \iff -8u^3+4u^2-392u+196=0 \iff -2u^3+u^2-98u+49=0$$
نجد أنّ $u_0=\frac{1}{2}$ حل لهذه المعادلة منه :
$$2u_0x^2+2\left(u_0+7\right)x+u_0^2+56=x^2+\frac{15}{2}x+\frac{225}{4}=\left(x+\frac{15}{2}\right)^2$$
و بالتالي :
$$\left(x^2+px+u_0\right)^2=2u_0x^2+2\left(u_0+7\right)x+u_0^2+56 \iff \left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{15}{2}\right)^2$$
$$\iff x^2+x+\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{15}{2}\right) \quad \text{أو} \quad x^2+x+\frac{1}{2}=x+\frac{15}{2}$$
$$\iff x^2+2x+8=0 \quad \text{أو} \quad x^2-7=0$$
$$\iff x=-1-\imath\sqrt{7} \quad \text{أو} \quad x=-1+\imath\sqrt{7} \quad \text{أو} \quad x=-\sqrt{7} \quad \text{أو} \quad x=\sqrt{7}$$
إذن الحلول هي : $x_1=-1-\imath\sqrt{7}$ ، $x_2=-1+\imath\sqrt{7}$ ، $x_3=-\sqrt{7}$ و $x_4=\sqrt{7}$. ■

ب.3.2 الطريقة الثانية : طريقة لاڤرانج LAGRANGE

نعتبر المعادلة $x^4+px^2+qx+r=0$ حيث $p,q,r\in\mathbb{R}$. لتكن z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حلولها في $\mathbb{C}$. لدينا :
$$x^4+px^2+qx+r=\left(x-z_1\right)\left(x-z_2\right)\left(x-z_3\right)\left(x-z_4\right)$$
بعد النشر و الترتيب نستنتج أنّ :
$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3+z_4=0 \\ z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4=p \\ z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=-q \\ z_1z_2z_3z_4=r \end{cases}$$
الآن، نعتبر الأعداد :
$$\begin{cases} \zeta_1=\left(z_1+z_2\right)\left(z_3+z_4\right) \\ \zeta_2=\left(z_1+z_3\right)\left(z_2+z_4\right) \\ \zeta_3=\left(z_1+z_4\right)\left(z_2+z_3\right) \end{cases}$$
نتأكد بالحساب من أنّ :
$$\begin{cases} \zeta_1+\zeta_2+\zeta_3=2\left(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4\right)=2p \\ \zeta_1\zeta_2+\zeta_2\zeta_3+\zeta_3\zeta_1=\left(z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4\right)^2-4z_1z_2z_3z_4=p^2-4r \\ \zeta_1\zeta_2\zeta_3=-\left(z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4\right)^2=-q^2 \end{cases}$$
و بالتالي فإنّ ζ_1 ، ζ_2 و ζ_3 هي جذور كثير الحدود :
$$P\left(X\right)=X^3-2pX^2+\left(p^2-4r\right)X+q^2$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

و هو كثير حدود من الدرجة الثالثة و بالتالي بإمكاننا إيجاد عبارة جذوره ζ_1 ، ζ_2 و ζ_3 بدلالة p ، q و r .
نتأكد بسهولة من أنّ :

$$\begin{cases} z_1+z_2=\sqrt{-\zeta_1} \\ z_1+z_3=\sqrt{-\zeta_2} \\ z_1+z_4=\sqrt{-\zeta_3} \\ z_3+z_4=-\sqrt{-\zeta_1} \\ z_2+z_4=-\sqrt{-\zeta_2} \\ z_2+z_3=-\sqrt{-\zeta_3} \end{cases}$$

حيث يتم إختيار الجذور التربيعية بمراعاة الشرط $\sqrt{-\zeta_1}\sqrt{-\zeta_2}\sqrt{-\zeta_3}=-q$. منه :

$$\begin{cases} z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\zeta_1}+\sqrt{-\zeta_2}+\sqrt{-\zeta_3}\right) \\ z_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\zeta_1}-\sqrt{-\zeta_2}-\sqrt{-\zeta_3}\right) \\ z_3=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{-\zeta_1}+\sqrt{-\zeta_2}-\sqrt{-\zeta_3}\right) \\ z_4=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{-\zeta_1}-\sqrt{-\zeta_2}+\sqrt{-\zeta_3}\right) \end{cases}$$

و هي حلول المعادلة الأصلية.

تطبيق 12 : حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : (6)

$$x^4-90x^2-320x-231=0$$

الحلّ. لدينا : $p=-90$ ، $q=-320$ و $r=-231$ منه :

$$P(X)=X^3-2pX^2+\left(p^2-4r\right)X+q^2=X^3+180X^2+9024X+102400$$

بالتعويض $X=y-60$ نحصل على : $P(y)=y^3-1776y-7040$.
و هو كثير حدود من الدرجة الثالثة جذوره هي $y_1=-4$ ، $y_2=44$ و $y_3=-40$ و بالتالي فإنّ جذور كثير الحدود الأصلي هي $X_1=-64$ ، $X_2=-16$ و $X_3=-100$. منه نستنتج أنّ (نراعي الشرط $\sqrt{-X_1}\sqrt{-X_2}\sqrt{-X_3}=-q=320$) :

$$\begin{cases} z_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{64}+\sqrt{16}+\sqrt{100}\right)=11 \\ z_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{64}-\sqrt{16}-\sqrt{100}\right)=-3 \\ z_3=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{64}+\sqrt{16}-\sqrt{100}\right)=-7 \\ z_4=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{64}-\sqrt{16}+\sqrt{100}\right)=-1 \end{cases}$$

و هي حلول المعادلة (6) . ■

ب.3 و المعادلات من الدرجة الخامسة ؟

الآن، بعد أن تمكنّا من حل كل المعادلات التي درجتها أصغر من أو تساوي 4 ، و بطرق عدّة من بينها طريقة **لاغرانج** التي تصلح لكل هذه الأنواع من المعادلات، نتساءل عمّا إذا كانت هذه الطريقة تصلح للمعادلات التي درجتها تفوق 5 ، أو عن

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

وجود طرق أخرى لحل المعادلات من الدرجة الخامسة فما فوق ؟

للأسف، لا توجد أي طريقة لحل المعادلات التي درجتها تفوق 5 ، فقد أثبت العالم النرويجي **آبل** (ABEL) أنه من المستحيل إيجاد صيغ عامة لحلول المعادلات من الدرجة الخامسة بدلالة معاملاتها و العمليات الحسابية $(+ \ ، \ - \ ، \ \times \ ، \ \div)$ و الجذور $(\sqrt{} \ ، \ \sqrt[3]{} \ ، \ \sqrt[5]{} \ ، \ \ldots$ إلخ) .

و بعد بضعة سنوات فقط، عمّم العالم الفرنسي **غالوا** (GALOIS) هذه النتيجة و ذلك بإيجاد شرط لازم و كافٍ على كثير حدود حتى يكون بالإمكان التعبير عن جذوره بدلالة معاملاته و العمليات الحسابية $(+ \ ، \ - \ ، \ \times \ ، \ \div)$ و الجذور $(\sqrt{} \ ، \ \sqrt[3]{} \ ، \ \sqrt[5]{} \ ، \ \ldots$ إلخ) ، واضعاً بذلك أُسس فرع مهم من فروع الرياضيات الحديثة و الذي يُعرف بـ**نظرية غالوا** (و التي غالباً ما تُدرَّس في سنوات الماستر — أي بعد الليسانس).

مثلاً، نبرهن باستعمال نظرية **غالوا** أنه لا يمكن التعبير عن جذور كثير الحدود $P(X) = X^5 - 10X + 5$ بدلالة معاملاته و العمليات الحسابية الأساسية.

نلفت الإنتباه هنا إلى إمكانية تحويل المعادلة $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ إلى الشكل $X^5 - X - A = 0$ أي بوسيط واحد فقط (A) و أول من قام بذلك هو العالم **برينهث** (BRING) و هذا ما فتح المجال لإيجاد طرق تحليلية لحل المعادلات من الدرجة الخامسة باستعمال دوال **متسامية**[2] و هي **الدوال الناقصية**[3] (على غرار طريقة **فييت** لحل المعادلات التكعيبية باستعمال **الدوال المثلثية**[4] — و هي دوال متسامية) : هذا يعكس ما آلت إليه الرياضيات الحديثة من تقارب بين الجبر، التحليل و الهندسة ...

[2] Transcendental Functions بالإنجليزية ؛ Fonctions transcendentes بالفرنسية.
[3] Elliptic Functions بالإنجليزية ؛ Fonctions elliptiques بالفرنسية.
[4] Trigonometric (or Circular) Functions بالإنجليزية ؛ Fonctions trigonométriques (ou circulaires) بالفرنسية.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

ملحق ج

الحروف اليونانية و اللاتنية

كثيراً ما تُستعمل الحروف اليونانية[1] في الرياضيات، و نظراً لأهميتها، نُدرج فيما يلي كتابة هذه الحروف بالصيغتين الكبيرة[2] و الصغيرة[3] ، تسميتها[4] (أي نطقها – بالفرنسية) و الحروف اللاتنية المكافئة لها.
تليها الحروف اللاتنية بمختلف كتاباتها الأكثر إستعمالاً في الرياضيات.

ج.1 الأرقام

الأرقام العربية	الأرقام الهندية	الأرقام الفارسية	الأرقام الرومانية
0	٠	۰	
1	١	۱	I
2	٢	۲	II
3	٣	۳	III
4	٤	۴	IV
5	٥	۵	V
6	٦	۶	VI
7	٧	۷	VII
8	٨	۸	VIII
9	٩	۹	IX

[1] Greek Letters بالإنجليزية ؛ Lettres grecques بالفرنسية
[2] Uppercase بالإنجليزية ؛ Majuscules بالفرنسية
[3] Lowercase بالإنجليزية ؛ Minuscules بالفرنسية
[4] Appellation

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

ج.2 الحروف اليونانية

Majuscule	Minuscule	Appellation	Correspondance latine
A	α	*alpha*	a
B	β , $\mathfrak{b}$	*bêta*	b
Γ	γ	*gamma*	g
Δ	δ	*delta*	d
E	ϵ , ε	*epsilon*	e (bref)
Z	ζ	*dzêta*	dz
H	η	*êta*	e (long)
Θ	θ , ϑ	*thêta*	t (aspiré)
I	ι	*iota*	i
K	κ , $\varkappa$	*kappa*	k
Λ	λ	*lambda*	l
M	μ	*mu*	m
N	ν	*nu*	n
Ξ	ξ	*ksi*	ks
O	o	*omicron*	o (bref, fermé)
Π	π , ϖ	*pi*	p
P	ρ , ϱ	*rhô*	r
Σ	σ , ς	*sigma*	s
T	τ	*tau*	t
Υ	υ	*upsilon*	u
Φ	ϕ , φ	*phi*	p (aspiré)
X	χ	*khi* (ou *chi*)	k (aspiré)
Ψ	ψ	*psi*	ps
Ω	ω	*omega*	o (long, ouvert)

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ج.3 الحروف اللاتنية

a, A	a, A	$\mathfrak{a}, \mathfrak{A}$	$\mathfrak{a}, \mathfrak{A}$	a, A	a, A	$\mathbb{a}, \mathbb{A}$	$\mathfrak{a}, \mathfrak{A}$
b, B	b, B	$\mathfrak{b}, \mathfrak{B}$	$\mathfrak{b}, \mathfrak{B}$	b, B	b, B	$\mathbb{b}, \mathbb{B}$	$\mathfrak{b}, \mathfrak{B}$
c, C	c, C	$\mathfrak{c}, \mathfrak{C}$	$\mathfrak{c}, \mathfrak{C}$	c, C	c, C	$\mathbb{c}, \mathbb{C}$	$\mathfrak{c}, \mathfrak{C}$
d, D	d, D	$\mathfrak{d}, \mathfrak{D}$	$\mathfrak{d}, \mathfrak{D}$	d, D	d, D	$\mathbb{d}, \mathbb{D}$	$\mathfrak{d}, \mathfrak{D}$
e, E	e, E	$\mathfrak{e}, \mathfrak{E}$	$\mathfrak{e}, \mathfrak{E}$	e, E	e, E	$\mathbb{e}, \mathbb{E}$	$\mathfrak{e}, \mathfrak{E}$
f, F	f, F	$\mathfrak{f}, \mathfrak{F}$	$\mathfrak{f}, \mathfrak{F}$	f, F	f, F	$\mathbb{f}, \mathbb{F}$	$\mathfrak{f}, \mathfrak{F}$
g, G	g, G	$\mathfrak{g}, \mathfrak{G}$	$\mathfrak{g}, \mathfrak{G}$	g, G	g, G	$\mathbb{g}, \mathbb{G}$	$\mathfrak{g}, \mathfrak{G}$
h, H	h, H	$\mathfrak{h}, \mathfrak{H}$	$\mathfrak{h}, \mathfrak{H}$	h, H	h, H	$\mathbb{h}, \mathbb{H}$	$\mathfrak{h}, \mathfrak{H}$
i, I	i, I	$\mathfrak{i}, \mathfrak{I}$	$\mathfrak{i}, \mathfrak{I}$	i, I	i, I	$\mathbb{i}, \mathbb{I}$	$\mathfrak{i}, \mathfrak{I}$
j, J	j, J	$\mathfrak{j}, \mathfrak{J}$	$\mathfrak{j}, \mathfrak{J}$	j, J	j, J	$\mathbb{j}, \mathbb{J}$	$\mathfrak{j}, \mathfrak{J}$
k, K	k, K	$\mathfrak{k}, \mathfrak{K}$	$\mathfrak{k}, \mathfrak{K}$	k, K	k, K	$\mathbb{k}, \mathbb{K}$	$\mathfrak{k}, \mathfrak{K}$
l, L	l, L	$\mathfrak{l}, \mathfrak{L}$	$\mathfrak{l}, \mathfrak{L}$	l, L	l, L	$\mathbb{l}, \mathbb{L}$	$\mathfrak{l}, \mathfrak{L}$
m, M	m, M	$\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$	$\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$	m, M	m, M	$\mathbb{m}, \mathbb{M}$	$\mathfrak{m}, \mathfrak{M}$
n, N	n, N	$\mathfrak{n}, \mathfrak{N}$	$\mathfrak{n}, \mathfrak{N}$	n, N	n, N	$\mathbb{n}, \mathbb{N}$	$\mathfrak{n}, \mathfrak{N}$
o, O	o, O	$\mathfrak{o}, \mathfrak{O}$	$\mathfrak{o}, \mathfrak{O}$	o, O	o, O	$\mathbb{o}, \mathbb{O}$	$\mathfrak{o}, \mathfrak{O}$
p, P	p, P	$\mathfrak{p}, \mathfrak{P}$	$\mathfrak{p}, \mathfrak{P}$	p, P	p, P	$\mathbb{p}, \mathbb{P}$	$\mathfrak{p}, \mathfrak{P}$
q, Q	q, Q	$\mathfrak{q}, \mathfrak{Q}$	$\mathfrak{q}, \mathfrak{Q}$	q, Q	q, Q	$\mathbb{q}, \mathbb{Q}$	$\mathfrak{q}, \mathfrak{Q}$
r, R	r, R	$\mathfrak{r}, \mathfrak{R}$	$\mathfrak{r}, \mathfrak{R}$	r, R	r, R	$\mathbb{r}, \mathbb{R}$	$\mathfrak{r}, \mathfrak{R}$
s, S	s, S	$\mathfrak{s}, \mathfrak{S}$	$\mathfrak{s}, \mathfrak{S}$	s, S	s, S	$\mathbb{s}, \mathbb{S}$	$\mathfrak{s}, \mathfrak{S}$
t, T	t, T	$\mathfrak{t}, \mathfrak{T}$	$\mathfrak{t}, \mathfrak{T}$	t, T	t, T	$\mathbb{t}, \mathbb{T}$	$\mathfrak{t}, \mathfrak{T}$
u, U	u, U	$\mathfrak{u}, \mathfrak{U}$	$\mathfrak{u}, \mathfrak{U}$	u, U	u, U	$\mathbb{u}, \mathbb{U}$	$\mathfrak{u}, \mathfrak{U}$
v, V	v, V	$\mathfrak{v}, \mathfrak{V}$	$\mathfrak{v}, \mathfrak{V}$	v, V	v, V	$\mathbb{v}, \mathbb{V}$	$\mathfrak{v}, \mathfrak{V}$
w, W	w, W	$\mathfrak{w}, \mathfrak{W}$	$\mathfrak{w}, \mathfrak{W}$	w, W	w, W	$\mathbb{w}, \mathbb{W}$	$\mathfrak{w}, \mathfrak{W}$
x, X	x, X	$\mathfrak{x}, \mathfrak{X}$	$\mathfrak{x}, \mathfrak{X}$	x, X	x, X	$\mathbb{x}, \mathbb{X}$	$\mathfrak{x}, \mathfrak{X}$
y, Y	y, Y	$\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$	$\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$	y, Y	y, Y	$\mathbb{y}, \mathbb{Y}$	$\mathfrak{y}, \mathfrak{Y}$
z, Z	z, Z	$\mathfrak{z}, \mathfrak{Z}$	$\mathfrak{z}, \mathfrak{Z}$	z, Z	z, Z	$\mathbb{z}, \mathbb{Z}$	$\mathfrak{z}, \mathfrak{Z}$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

ملخص الدرس

د.1 الشكل الجبري للأعداد المركبة

الشكل الجبري (أو الكتابة الجبرية) لعدد مركب هو $a+\imath b$ حيث a و b عددان حقيقيان.

إذا كان $z = a+\imath b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ ، فإنّ a هو الجزء الحقيقي للعدد z و b هو جزؤه التخيلي و نكتب :

$a = \mathrm{Re}(z)$ و $b = \mathrm{Im}(z)$.

الجزء الحقيقي و الجزء التخيلي لعدد مركب هما عددان حقيقيان.

إذا كان الجزء التخيلي لعدد مركب معدومًا، نقول أنه حقيقي.

إذا كان الجزء الحقيقي لعدد مركب معدومًا، نقول أنه تخيلي صِرف.

يتساوى عددان مركبان إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان و تساوى جزءاهما التخيليان أي $\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ فإنّ :

$$a+\imath b = a'+\imath b' \iff a = a' \text{ و } b = b'$$

و بالتالي :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \ a+\imath b = 0 \iff a = b = 0$$

⛔ الشرط $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ مهم جدا!

إذا كانت a ، a' ، b و b' أعداداً حقيقية فإنّ :

$$(a+\imath b)+(a'+\imath b') = (a+a')+\imath(b+b')$$
$$(a+\imath b)\times(a'+\imath b') = (aa'-bb')+\imath(ab'+ba')$$

و إذا كان $a^2+b^2 \neq 0$ (أي $(a,b) \neq (0,0)$) فإنّ :

$$\frac{1}{a+\imath b} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\imath$$

و بالتالي :

$$\frac{a'+\imath b'}{a+\imath b} = \left(\frac{aa'+bb'}{a^2+b^2}\right)+\imath\left(\frac{ab'-ba'}{a^2+b^2}\right)$$

يُسمى العدد المركب $\bar{z} = a-\imath b$ بمرافق العدد $z = a+\imath b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$z \text{ حقيقي} \iff \bar{z} = z$$
$$z \text{ تخيلي صِرف} \iff \bar{z} = -z$$

المرافق يتلاءم (يتماشى) مع كلّ العمليات، بمعنى إذا كان z و z' عددين مركبين و كان n عدداً صحيحًا فإنّ :

$$\overline{z+z'} = \bar{z}+\bar{z'} \ ; \ \overline{z\times z'} = \bar{z}\times\bar{z'} \ ;$$
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \ ; \ \overline{z^n} = \bar{z}^n \ ; \ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$$

مثال : إذا كان $x \in \mathbb{R}$ و $z \in \mathbb{C}$ فإنّ :

$$\overline{\left(\frac{-1+\imath+z^7}{(1-2\imath xz)}+e^{\imath x}(1+\imath x)^{-5}\left(\sqrt{2}+2\imath\right)\right)}$$
$$= \frac{-1-\imath+\bar{z}^7}{(1+2\imath x\bar{z})}+e^{-\imath x}(1-\imath x)^{-5}\left(\sqrt{2}-2\imath\right)$$

إذا كان $z = a+\imath b$ عدداً مركبا مع $a, b \in \mathbb{R}$ فإنّ طويلته هي العدد الحقيقي الموجب $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

لدينا : $z\bar{z} = |z|^2 = a^2+b^2$ و $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

لكل عددين مركبين z و z' و لكل عدد صحيح n لدينا :

$$|z\times z'| = |z|\times|z'| \ ; \ \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$
$$|z^n| = |z|^n \ ; \ \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

لكن بالنسبة للجمع لدينا فقط (المتباينة المثلثية) :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} : \ |z+z'| \leq |z|+|z'|$$

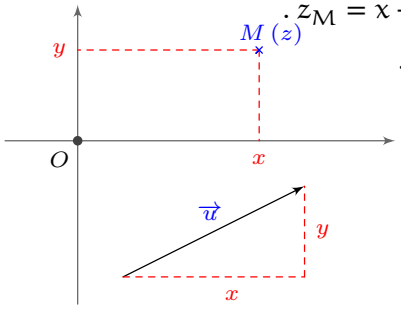
http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

ليكن $a, b, c \in \mathbb{R}$ بحيث $a \neq 0$. نضع $\Delta = b^2 - 4ac$
و ليكن δ عدداً مركبا بحيث $\delta^2 = \Delta$.
لتكن (E) المعادلة $az^2 + bz + c$ ذات المجهول المركب z .

المعادلة (E) تقبل حلّين مركبين :
$z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ و $z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$
لدينا :
$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ و $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

د.2 التفسير الهندسي للأعداد المركبة

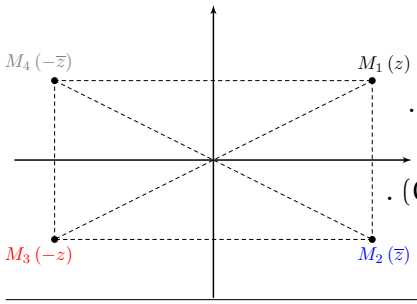
لاحقة نقطة، لاحقة شعاع — الصورة النقطية، الصورة الشعاعية



إذا كانت M النقطة ذات الإحداثيين (x, y) فإنّ لاحقة M هي العدد المركب $z_M = x + iy$.
إذا كان $\vec{u}$ الشعاع ذا المركبتين $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ فإنّ لاحقة $\vec{u}$ هي العدد المركب $z_{\vec{u}} = x + iy$.
إذا كان $z = x + iy$ عدداً مركبا مع $x, y \in \mathbb{R}$ فإنّ :

- $M(x, y)$ هي صورة z (الصورة النقطية) ؛
- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ هو صورة z (الصورة الشعاعية) .

معاكس، مرافق عدد مركب

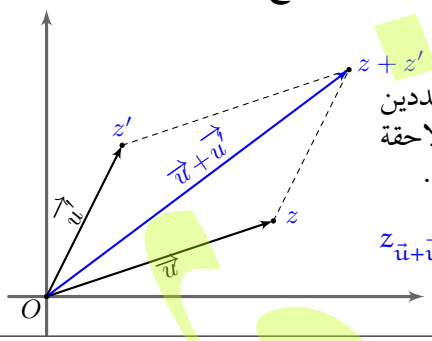


النقطة M_2 ذات اللاحقة $\bar{z}$ هي نظيرة النقطة $M_1(z)$ بالنسبة إلى المستقيم (Ox) .
النقطة M_3 ذات اللاحقة $-z$ هي نظيرة النقطة $M_1(z)$ بالنسبة إلى المبدأ O .
النقطة M_4 ذات اللاحقة $-\bar{z}$ هي نظيرة النقطة $M_1(z)$ بالنسبة إلى المستقيم (Oy) .

العمليات في $\mathbb{C}$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

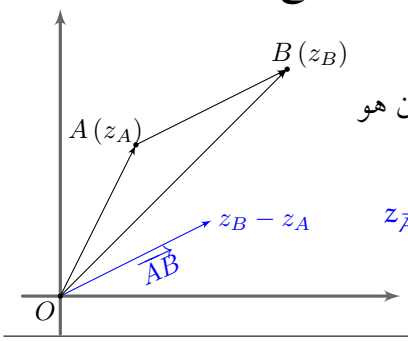
الجمع



مجموع عددين مركبين هو لاحقة مجموع شعاعين.

$z_{\vec{u}+\vec{u'}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{u'}}$

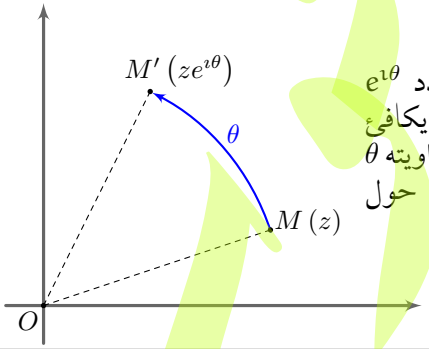
الطرح



فرق عددين مركبين هو لاحقة شعاع.

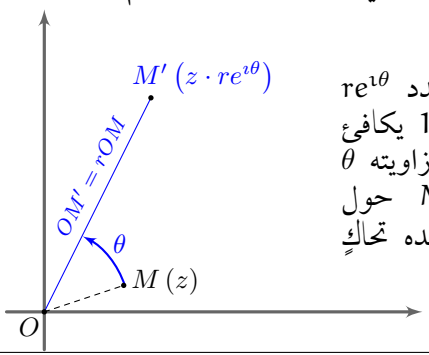
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

الضرب في عدد مركب طويلته 1



ضرب z بالعدد $e^{i\theta}$ الذي طويلته 1 يكافئ إجراء دوران زاويته θ للنقطة $M(z)$ حول المبدأ O .

الضرب في عدد مركب غير معدوم

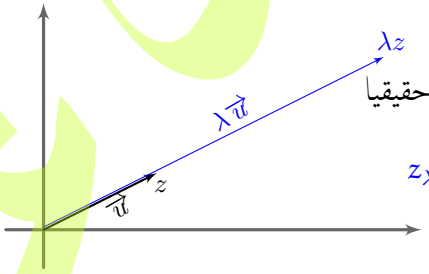


ضرب z بالعدد $re^{i\theta}$ الذي طويلته 1 يكافئ إجراء دوران زاويته θ للنقطة $M(z)$ حول المبدأ O و بعده تحاكٍ نسبته r .

منتصف قطعة مستقيمة

إذا كانت A و B نقطتين من المستوي و كانت I منتصف القطعة [AB] فإنّ : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

الضرب في عدد حقيقي



إذا كان λ عدداً حقيقياً فإنّ :

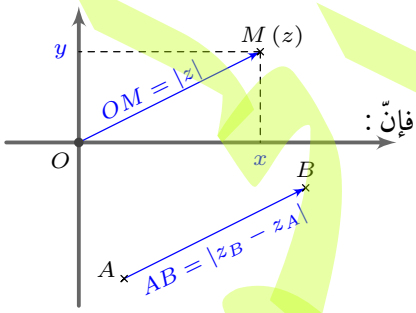
$z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$

مركز المسافات المتناسبة

إذا كانت $A_1(z_1)$ ، $A_2(z_2)$ ، ... ، $A_n(z_n)$ نقطاً من المستوي و كانت a_1 ، a_2 ، ... ، a_n أعداداً حقيقية بحيث $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$ فإنّ لاحقة $G(z_G)$، مركز المسافات المتناسبة للجملة $\{A_1(a_1), A_2(a_2), \cdots, A_n(a_n)\}$ هي :

$$z_G = \frac{a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

طويلة عدد مركب



- إذا كانت M النقطة ذات الإحداثيين (x, y) و كان $z = z_M = x + iy$ فإنّ :
$$|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
- إذا كان $A(x_A, y_A)$ ، $B(x_B, y_B)$ و $z_A = x_A + iy_A$ و $z_B = x_B + iy_B$ فإنّ :
$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
- إذا كانت A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها a ، b ، c و d على الترتيب فإنّ :
$$\left|\frac{d-c}{b-a}\right| = \frac{CD}{AB}$$

الإستقامية : تكون النقط A ، B و C على استقامة واحدة إذا و فقط إذا كان العدد $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ حقيقيا .

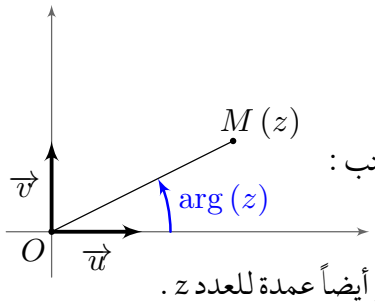
التعامد : الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان إذا و فقط إذا كان العدد $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ تخيليا صِرفا.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

المثلث المتقايس الأضلاع : المثلث ABC متقايس الأضلاع و مباشر إذا و فقط إذا كان $z_C - z_A = e^{\imath\pi/3}(z_B - z_A)$.
المثلث القائم و المتساوي الساقين : المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين إذا و فقط إذا كان $z_C - z_A = \pm\imath(z_B - z_A)$.

د.3 الشكل المثلثي (الأسي) للأعداد المركبة

عمدة عدد مركب غير معدوم



- المستوي منسوب إلى معلم متعامد، متجانس و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
M نقطة من المستوي تختلف عن O لاحقتها $z \neq 0$.
نُسمي عمدةً للعدد المركب z كلّ قيس (بالراديان) للزاوية الموجهة $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ و نكتب :
$$\arg(z) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) \pmod{2\pi}$$
- إذا كانت θ_0 عمدةً للعدد z فإنّ كلّ عدد من الشكل $\theta_0 + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، هو أيضاً عمدة للعدد z .
- إذا كانت A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها a ، b ، c و d على الترتيب بحيث $A \neq B$ و $C \neq D$ (أي $a \neq b$ و $c \neq d$) فإنّ :
$$\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \pmod{2\pi}$$

تحديد عمدة لعدد مركب : إذا كان z عدداً مركباً غير معدوم فإنّ كلّ عمدة للعدد z هو أيضاً عمدة للعدد $\frac{z}{|z|}$. طويلة العدد $\frac{z}{|z|}$ تساوي 1 و بالتالي يوجد $\theta \in \mathbb{R}$ بحيث : $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + \imath\sin\theta$ ؛ و بالتالي فالعدد الحقيقي θ عمدة للعدد المركب z .

مثال :
$$\arg\left(-\sqrt{3}+\imath\right) = \arg\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath\right) = \arg\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \imath\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$$

الكتابة $e^{\imath\theta}$: لكل عدد حقيقي θ نضع : $e^{\imath\theta} = \cos\theta + \imath\sin\theta$. لدينا :

لكل عددين حقيقيين θ و θ' و لكل عدد صحيح n فإنّ :	لكل عددين مركبين z و z' و لكل عدد صحيح n فإنّ :
• $\left\|e^{\imath\theta}\right\| = 1$. • $\mathrm{Re}\left(e^{\imath\theta}\right) = \cos\theta$ و $\mathrm{Im}\left(e^{\imath\theta}\right) = \sin\theta$. • $e^{\imath\theta} \times e^{\imath\theta'} = e^{\imath(\theta+\theta')}$. • $\frac{1}{e^{\imath\theta}} = e^{-\imath\theta} = \overline{e^{\imath\theta}}$. • $\frac{e^{\imath\theta}}{e^{\imath\theta'}} = e^{\imath(\theta-\theta')}$. • $\left(e^{\imath\theta}\right)^n = e^{\imath n\theta}$.	• $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$. • $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$. • $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(\bar{z}) \pmod{2\pi}$. • $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) \pmod{2\pi}$.

الشكل الأسي للأعداد المركبة

كل عدد مركب غير معدوم z يُكتب على الشكل $z = \rho e^{\imath\theta}$ حيث ρ عدد حقيقي موجب تماماً و θ عدد حقيقي.
هذه الكتابة تُسمى الشكل الأسي للعدد z . العدد θ ليس وحيداً لكن :
لكل عددين حقيقيين موجبين تماماً ρ و ρ' و لكل عددين حقيقيين θ و θ فإنّ :
$$\rho e^{\imath\theta} = \rho' e^{\imath\theta'} \iff \rho' = \rho \text{ و } \theta' = \theta + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

بعض القيم الخاصة

$$e^{0}=1\ ،\ e^{\imath\pi/2}=\imath\ ،\ e^{\imath\pi}=-1\ ،\ e^{-\imath\pi/2}=-\imath\ ،\ e^{2\imath\pi/3}=j=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\imath\ ،\ \sqrt{2}e^{\imath\pi/4}=1+\imath\ .$$

صيغ أولر

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \cos x=\frac{1}{2}\left(e^{\imath x}+e^{-\imath x}\right)\ \text{أي}\ e^{\imath x}+e^{-\imath x}=2\cos x\ .$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \sin x=\frac{1}{2\imath}\left(e^{\imath x}-e^{-\imath x}\right)\ \text{أي}\ e^{\imath x}-e^{-\imath x}=2\imath\sin x\ .$$

صيغة موافر

$$\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \forall n\in\mathbb{Z}\ ,\ \left(e^{\imath x}\right)^{n}=e^{\imath nx}\ \text{أي}\ (\cos x+\imath\sin x)^{n}=\cos nx+\imath\sin nx\ .$$

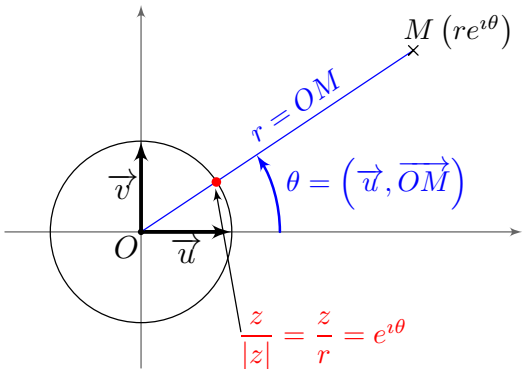
نتيجة

إذا كان $z=e^{\imath x}$ مع $x\in\mathbb{R}$ فإنّ :

$$\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\ ،\ \sin x=\frac{1}{2\imath}\left(z-\frac{1}{z}\right)\ ،\ \cos nx=\frac{1}{2}\left(z^{n}+\frac{1}{z^{n}}\right)\ ،\ \sin nx=\frac{1}{2\imath}\left(z^{n}-\frac{1}{z^{n}}\right)\ .$$

ليكن العدد المركب $z=re^{\imath t}$ مع r و t عددان حقيقيان، و $r\neq 0$. لدينا :

- إذا كان $r>0$ فإنّ $|z|=r$ و $\arg(z)\ =\ t\pmod{2\pi}$ و الشكل الأسي للعدد z هو $re^{\imath t}$.
- إذا كان $r<0$ فإنّ $|z|=-r$ و $\arg(z)\ =\ t+\pi\pmod{2\pi}$ و الشكل الأسي للعدد z هو $-re^{\imath(t+\pi)}$.



- M نقطة من المستوي تختلف عن O لاحقتها $z\neq 0$.

الجُمل التالية متكافئة :

1. $z=re^{\imath\theta}$ حيث r عدد حقيقي موجب تمامًا و θ عدد حقيقي.
2. $r=|z|$ و $\theta=\arg(z)\pmod{2\pi}$.
3. $[r,\theta]$ زوج إحداثيات قطبية للنقطة M .
4. $r=OM$ و $\theta=\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\pmod{2\pi}$.

الجذور النونية

إذا كان a عدداً مركبا غير معدوم فإنّ :

$$z^{n}=a\iff z=z_{k}=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\left(\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}\right)+\imath\sin\left(\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}\right)\right)\ ,\ k\in\{0,1,2,\cdots n-1\}$$

حالة خاصة : الجذور النونية للوحدة هي حلول المعادلة $z^{n}=1$ و هي الأعداد :

$$\omega_{k}=\cos\frac{2k\pi}{n}+\imath\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{2\imath k\pi/n}\ \text{مع}\ k\in\{0,1,2,\cdots n-1\}\ .\longleftarrow\ \boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\omega_{k}=0}$$

حالة الجذور التربيعية : لإيجاد الجذرين التربيعيين للعدد $z=a+\imath b$ ، نبحث عن عددين حقيقيين α و β بحيث

$$(\alpha+\imath\beta)^{2}=a+\imath b\ \text{أي بحيث :}\quad \alpha^{2}-\beta^{2}=a\quad ،\quad 2\alpha\beta=b\quad \text{و}\quad \alpha^{2}+\beta^{2}=\sqrt{a^{2}+b^{2}}\ .$$

4.د تحويلات المستوي المركب

الإنسحاب

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

ليكن $t_{\vec{u}}$ الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$. لكل نقطتين M و M' من المستوي : $M' = t_{\vec{u}}(M) \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
إذا كانت a لاحقة الشعاع $\vec{u}$ فإنّ العبارة المركبة للإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ هي : $z' = z + a$.

- $t_{\vec{u}}$ تَساوي قياس بمعنى يحفظ المسافات.
- $t_{\vec{u}}$ يحفظ الزوايا الموجهة.
- $t_{\vec{u}}$ يحفظ الإستقامية.
- $t_{\vec{u}}$ يحفظ التوازي و التعامد.
- $t_{\vec{u}}$ يحفظ المساحات.
- صُور بعض الأشكال :

← ليكن (D) مستقيماً يمر بنقطة A . صورة (D) بالإنسحاب $t_{\vec{u}}$ هي المستقيم الذي يوازي (D) و يمر بالنقطة $t_{\vec{u}}(A)$.

← صورة القطعة المستقيمة [AB] بالإنسحاب $t_{\vec{u}}$ هي القطعة المستقيمة $[t_{\vec{u}}(A)\, t_{\vec{u}}(B)]$.

← صورة الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها R بالإنسحاب $t_{\vec{u}}$ هي الدائرة التي مركزها $t_{\vec{u}}(I)$ و لها نفس نصف القطر.

التحاكي

ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k . لكل نقطتين M و M' من المستوي : $M' = h(M) \iff \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
إذا كانت ω لاحقة Ω و k عدداً حقيقيا فإنّ العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه Ω و نسبته k هي : $z' = \omega + k(z - \omega)$.

- $h(\Omega) = \Omega$ (Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة) .
- h يضرب المسافات في $|k|$ و يضرب المساحات في k^2.
- h يحفظ الزوايا الموجهة.
- h يحفظ الإستقامية.
- h يحفظ التوازي و التعامد.
- صُور بعض الأشكال :

← ليكن (D) مستقيماً يمر بنقطة A . صورة (D) بالتحاكي h هي المستقيم الذي يوازي (D) و يمر بالنقطة $h(A)$.

← صورة القطعة المستقيمة [AB] بالتحاكي h هي القطعة المستقيمة $[h(A)\, h(B)]$.

← صورة الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها R بالتحاكي h هي الدائرة التي مركزها $h(I)$ و نصف قطرها $|k|R$.

الدوران

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ . لكل نقطتين M و M' من المستوي :

$$M' = r(M) \iff \Omega M' = \Omega M \quad \text{و} \quad \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}\right) = \theta \pmod{2\pi}$$

إذا كانت ω لاحقة Ω و θ عدداً حقيقيا فإنّ العبارة المركبة للدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ هي : $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.

- $r(\Omega) = \Omega$ (Ω هي النقطة الصامدة الوحيدة) .
- r تَساوي قياس بمعنى يحفظ المسافات.
- r يحفظ الزوايا الموجهة.
- r يحفظ الإستقامية و المساحات .
- h يحفظ التوازي و التعامد.
- صُور بعض الأشكال :

← لتكن A و B نقطتين من المستوي. صورة المستقيم (AB) بالدوران r هي المستقيم $(r(A)\, r(B))$.

← صورة القطعة المستقيمة [AB] بالدوران r هي القطعة المستقيمة $[r(A)\, r(B)]$.

← صورة الدائرة التي مركزها I و نصف قطرها R بالدوران r هي الدائرة التي مركزها $r(I)$ و نصف قطرها .

التشابه المستوي المباشر

التشابه المستوي المباشر هو كل تحويل نقطي للمستوي المركب عبارته من الشكل : $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$. نسبة هذا التشابه هي $|a|$.

تركيب تشابهين : تركيب تشابه نسبته k مع تشابه نسبته k' هو تشابه نسبته kk' .

كل تشابه نسبته $k > 0$ هو تطبيق تقابلي للمستوي في نفسه و تطبيقه العكسي هو تشابه نسبته $\frac{1}{k}$.

تحديد تشابه : إذا كانت A ، A' ، B و B' أربع نقط من المستوي بحيث $A \neq A'$ و $B \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد f بحيث $f(A) = A'$ و $f(B) = B'$. نسبة هذا التشابه هي $\frac{A'B'}{AB}$ و زاويته هي $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$.

صُور بعض الأشكال الهندسية بتشابه : كل تشابه نسبته $k > 0$ يحفظ مركز المسافات المتناسبة و يضرب المساحات في k^2 .

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

صورة مستقيم بتشابه نسبته $k > 0$ هو مستقيم، صورة قطعة مستقيمة هي قطعة مستقيمة، صورة مثلث هو مثلث مشابه له و صورة دائرة نصف قطرها R هي دائرة نصف قطرها kR .

a و b عددان مركبان حيث $a \neq 0$.
f التحويل النقطي الذي عبارته المركبة هي $z' = az + b$.

- إذا كان $a \neq 1$ فإنّ f هو التشابه المستوي المباشر الذي :
  - مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ (ω هي حل المعادلة $z = az + b$) ،
  - نسبته $k = |a|$ ،
  - و زاويته $\theta = \arg(a) \pmod{2\pi}$.
- إذا كان $a = 1$ فإنّ f هو الإنسحاب الذي لاحقة شعاعه هي b .
- إذا كان a عدداً حقيقيا مع $a \neq 1$ فإنّ f هو التحاكي الذي :
  - مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ (ω حل المعادلة $z = az + b$) ،
  - و نسبته a .
- إذا كان $|a| = 1$ مع $a \neq 1$ فإنّ f هو الدوران الذي :
  - مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ (ω حل المعادلة $z = az + b$) ،
  - و زاويته $\theta = \arg(a) \pmod{2\pi}$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

الهندسة في المستوي المركب

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

المسافة في المستوي المركب

إذا كانت $M(z)$ ، $A(z_A)$ و $B(z_B)$ نقطاً من المستوي المركب فإنّ :

$OM = |z|$ و $AB = |z_B - z_A|$.
معادلة الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $r > 0$ هي : $|z - z_A| = r$.
معادلة محور القطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $|z - z_A| = |z - z_B|$.

الزوايا في المستوي المركب

لتكن $M(z)$ ، $A(z_A)$ ، $B(z_B)$ ، $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقطاً من المستوي المركب بحيث $z \neq 0$ و النقط A ، B ، C و D مختلفة مثنى مثنى و تختلف عن O . لدينا :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi} \qquad \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right) = \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi} \qquad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \pmod{2\pi}$$

الكتابة المركبة لبعض التحويلات النقطية

صورة النقطة $M(z)$ **بالإنسحاب** الذي شعاعه $\vec{u}(b)$ هي النقطة $M'(z')$ بحيث : $z' = z + b$.

صورة $M(z)$ **بالتناظر المركزي** حول النقطة $A(z_A)$ هي $M'(z')$ بحيث : $z' - z_A = -(z - z_A)$.

صورة $M(z)$ بالتحاكي الذي مركزه $A(z_A)$ و نسبته $k \in \mathbb{R}^*$ هي $M'(z')$ بحيث : $z' - z_A = k(z - z_A)$.

صورة $M(z)$ بالدوران الذي مركزه $A(z_A)$ و زاويته $\theta \in \mathbb{R}$ هي $M'(z')$ بحيث : $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$.

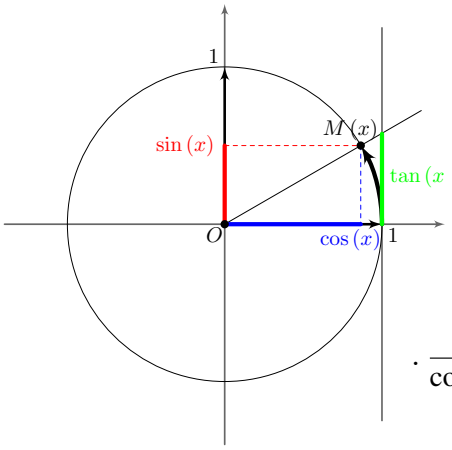
معرفة تحويل نقطي من كتابته المركبة

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ بحيث :	فإنّ M' هي صورة M بِـ :
$z' = z + b$ مع $b \in \mathbb{C}$	**الإنسحاب** الذي شعاعه $\vec{u}(b)$.
$z' = -z + b$ مع $b \in \mathbb{C}$	**التناظر المركزي** حول النقطة $A\left(\frac{b}{2}\right)$.
$z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ و $b \in \mathbb{C}$	**التحاكي** الذي مركزه $A\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و نسبته a .
$z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ ، $\lvert a\rvert = 1$ و $b \in \mathbb{C}$	**الدوران** الذي مركزه $A\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و زاويته $\arg(a)$.

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

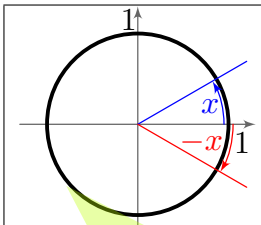
حساب المثلثات

تعريف دالة الجيب، جيب التمام و دالة الظل

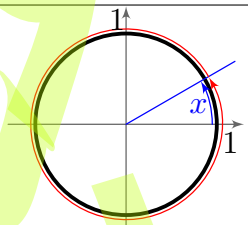


- M نقطة من الدائرة المثلثية و x قيس بالراديان للزاوية $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
  $\cos(x)$ هو فاصلة النقطة M و $\sin(x)$ هو ترتيبة النقطة M .
- إذا لم يكن x من الشكل $\frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإنّ :
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
- لكل عدد حقيقي x لدينا : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
  و إذا لم يكن x من الشكل $\frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ فإنّ : $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$.

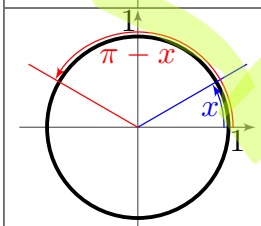
خواص مباشرة



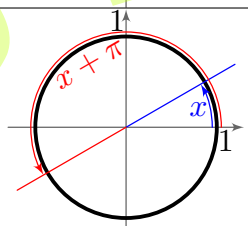
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$



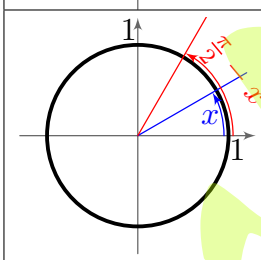
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$
$$\tan(x + 2\pi) = \tan(x)$$



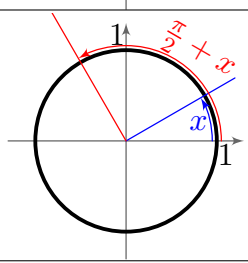
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$
$$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

- الدالة $x \mapsto \cos x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، زوجية و دورية حيث 2π دور لها.
- الدالة $x \mapsto \sin x$ معرفة على $\mathbb{R}$ ، فردية و دورية حيث 2π دور لها.
- الدالة $x \mapsto \tan x$ معرفة على $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$ ، فردية و دورية حيث π دور لها.

المتطابقات المثلثية

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$
$$\sin a \cos b = \tfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$
$$\cos a \sin b = \tfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$
$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \sin b = \tfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$
$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$= 2\cos^2 a - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin 2a = 2 \cos a \sin a$$
$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$
$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$$

$$1 + \cos a = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)$$
$$1 - \cos a = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\tan a = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a}$$

المعادلات المثلثية

- $\cos a = \cos b$ إذا و فقط إذا كان $b = \pm a + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin a = \cos b$ إذا و فقط إذا كان $b = a + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ أو $b = \pi - a + 2k'\pi$ مع $k' \in \mathbb{Z}$.
- $\tan a = \tan b$ إذا و فقط إذا كان $b = a + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

العلاقات المترية في المثلث

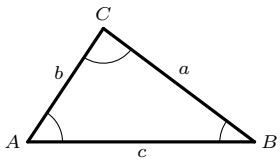
http ://tinyurl.com/Malki1718
وقف لله تعالى

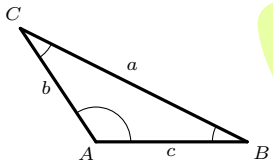
إذا كانت $\mathscr{A}$ مساحة المثلث ABC فإنّ :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}\\ &= \frac{a^2\sin\hat{B}\sin\hat{C}}{2\sin\hat{A}} = \frac{b^2\sin\hat{A}\sin\hat{C}}{2\sin\hat{B}}\\ &= \frac{c^2\sin\hat{A}\sin\hat{B}}{2\sin\hat{C}}\\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}$$

حيث $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

الصيغة الأخيرة تُدعى صيغة **هيرون** (HÉRON).





$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

قِيم جيوب و جيوب تمام بعض الزوايا (غير الشهيرة)

θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$	المرجع
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	تمرين 214 صفحة 305 ؛ تمرين 244 صفحة 336
$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	تمرين 214 صفحة 305 ؛ تمرين 244 صفحة 336 ؛ تمرين 213 صفحة 303
$\frac{4\pi}{5}$	$-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	تمرين 214 صفحة 305 ؛ تمرين 244 صفحة 336 ؛ تمرين 213 صفحة 303
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	تمرين 69 صفحة 136 ؛ تمرين 46 صفحة 116 ؛ تمرين 152 صفحة 223 ؛ تمرين 126 صفحة 194
$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	تمرين 153 صفحة 223
$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$		تمرين 127 صفحة 195
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	تمرين 86 صفحة 146 ؛ تمرين 70 صفحة 137 ؛ تمرين 71 صفحة 138
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	تمرين 86 صفحة 146 ؛ تمرين 148 صفحة 218 ؛ تمرين 70 صفحة 137
$\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	تمرين 86 صفحة 146
$\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	تمرين 86 صفحة 146 ؛ تمرين 148 صفحة 218
$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$	تمرين 72 صفحة 138
$\frac{\pi}{17}$	أنظر أدناه		تمرين 244 صفحة 336
$\frac{2\pi}{17}$	أنظر أدناه		تمرين 245 صفحة 342
$\frac{13\pi}{17}$	أنظر أدناه		ملاحظة 56 صفحة 342

$$\cos\frac{\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)$$

$$\cos\frac{2\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\left(-1+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)$$

$$\cos\frac{13\pi}{17}=\frac{1}{16}\left(1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-\sqrt{68+12\sqrt{17}+16\sqrt{34+2\sqrt{17}}+2\left(1-\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}}\right)$$

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

منوچهر عبادی

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالی

تنظيم الوقت للأسبوع						
	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
06:00							
06:30							
07:00							
07:30							
08:00							
08:30							
09:00							
09:30							
10:00							
10:30							
11:00							
11:30							
12:00							
12:30							
13:00							
13:30							
14:00							
14:30							
15:00							
15:30							
16:00							
16:30							
17:00							
17:30							
18:00							
18:30							
19:00							
19:30							
20:00							
20:30							
21:00							
21:30							
22:00							
22:30							
23:00							
23:30							

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

تنظيم الوقت للشهر						
الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى

هذا الكتاب مُوجه لطلبة الأقسام النهائية (بكالوريا) بالدرجة الأولى لكنه سيكون سنداً لطلبة السنتين الأوليين الجامعيتين و المقبلين على مسابقات توظيف أساتذة التعليم المتوسط و الثانوي و مرجعاً للمعلمين

و هو مُجزّأ إلى الأقسام التالية :

- **مجموعة الأعداد المركبة**
- **الشكل المثلثي لعدد مركب**
- **تطبيقات الأعداد المركبة**
- **تمثيل التحويلات النقطية في المستوي المركب**

كل قسم مرفق بأمثلة و تطبيقات لتسهيل استيعابه.

الجزء الأكبر من الكتاب مُخصص لتمارين محلولة حلاًّ مفصّلاً : تطبيقات مباشرة للدرس ، تمارين بكالوريا و أخرى للتعمق.

إرتأينا أن ندرج في الجزء الأخير ملحقاً يُذكّر بالخواص الأساسية **لكثيرات الحدود** و آخر فيه دراسة وافية **للمعادلات من الدرجة الثالثة و الرابعة**

http ://tinyurl.com/Malki1718

وقف لله تعالى