1 التحويلات النقطية

I الإنسحاب

إستكمالا لما تطرقنا له من تحويلات نقطية في السنوات السابقة ، ها نحن عزيز التلميذ نعيد تذكيرك بالإنسحاب للوصول إلى تعريف جديد له خاصة أنك درسة مجموعة الأعداد المركبة والتي سنستعين بها للوصول إلى هذا التعريف .

نشاط

ليكن T التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(x,y)$ إلى النقطة $M'(x',y')$ وفق الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

1. مانوع التحويل النقطي T ؟
2. أكتب علاقة شعاعية تصف فيها التحويل T.
3. لتكن الأعداد المركبة التالية z ، z' و $z_{\vec{u}}$ لواحق النقطتين M و M' والشعاع $\vec{u}$ على الترتيب ، أكتب عبارة تصف فيها التحويل T بدلالة z ، z' و $z_{\vec{u}}$

التحويل الوحيد الذي درسته ويحول نقطة إلى نقطة أخرى وفق شعاع هو الإنسحاب

1. طبيعة التحويل النقطي : التحويل T هو إنسحاب لأنه التحويل النقطي الوحيد الذي يحول نقطة إلى نقطة أخرى وفق شعاع .
2. العلاقة الشعاعية :

T يحول M إلى M' وفق الشعاع $\vec{u}$ معناه : $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$

3. العبارة المركبة :

$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ تكافئ : $z'-z=z_{\vec{u}}$ ومنه : $z'=z+z_{\vec{u}}$

تعريف الإنسحاب

نعرف الإنسحاب T الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' وفق الشعاع $\vec{u}$ الذي لاحقته $z_{\vec{u}}$ بالعبارة التالية : $z'-z=z_{\vec{u}}$

مثال 01

العبارة المركبة : $z'-z=1+i$ تعرف تحويل نقطي هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

مثال 02

العبارة المركبة : $z'=z-2+3i$ تعرف تحويل نقطي هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

مبرهنة 01 العبارة التحليلية للإنسحاب

T الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ويحول $M(x,y)$ إلى $M'(x',y')$ ، الإنسحاب T

معرف بالجملة التالية : $\begin{cases}x'=x+\alpha\\y'=y+\beta\end{cases}$ نسمي هذه الأخيرة بالعبارة التحليلية لـ T

البرهان

بوضع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$ و $z_{\vec{u}}=\alpha+i\beta$ نجد : $z'=z+z_{\vec{u}}$ يكافئ :

$x'+iy'=x+\alpha+i(y+\beta)\cdots(\clubsuit)$ وبما أن تساوي عددين مركبين معناه تساوي

جزءهما الحقيقيين وتساوي جزءهما التخيليين فإن : $(\clubsuit)$ تكافئ : $\begin{cases}x'=x+\alpha\\y'=y+\beta\end{cases}$

مبرهنة 02 خواص الإنسحاب

$[AB]$ قطعة مستقيمة ، $[A'B']$ صورة القطعة $[AB]$ بالإنسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$

وبالتالي : $AB=A'B'$

البرهان

لدينا : $T\left([AB]\right)=[A'B']$ معناه أن : $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{u}$

أي : $z_{A'}-z_A=z_{B'}-z_B$ ومنه : $z_B-z_A=z_{B'}-z_{A'}$

أي : $\left|z_B-z_A\right|=\left|z_{B'}-z_{A'}\right|$ وبالتالي هذا معناه أن : $AB=A'B'$

ملاحظة :

المبرهنة 02 تعني أن الإنسحاب يحافظ على الأطوال (المسافات)

مبرهنة 03 خواص الإنسحاب

(Δ) مستقيم من المستوي ، (Δ') صورة المستقيم (Δ) بالإنسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ وبالتالي : $(\Delta) \parallel (\Delta')$

البرهان

نعتبر المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ وبالتالي معامل توجيه المستقيم (Δ) هو $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ولدينا الإنسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

حيث : $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ و $T\big((\Delta)\big) = (\Delta')$ ومنه معامل توجيه (Δ') هو : $a' = \dfrac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1}$ وبالتالي بإستعمال العبارة التحليلية نجد :

$$a' = \frac{y_2 + \beta - (y_1 + \beta)}{x_2 + \alpha - (x_1 + \alpha)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

أي $a = a'$ وبالتالي : $(\Delta) \parallel (\Delta')$

ملاحظة :

المبرهنة 03 تعني أن صورة مستقيم بالإنسحاب هو مستقيم يوازيه .

تمرين تطبيقي

T الإنسحاب الذي يحول $A(1,2)$ إلى $B(-1,3)$.

1. أكتب العبارة المركبة للإنسحاب T.
2. عين المعادلة الديكارتية للدائرة (C') صورة الدائرة (C) التي مركزها B ونصف قطرها 3 بواسطة الإنسحاب T.
3. عين المعادلة الديكارتية للمستقيم (Δ') صورة المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = 2x - 1$ بواسطة الإنسحاب T.

1. العبارة المركبة : لدينا : $T(A) = B$ معناه :
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -1 + 3i - (1 + 2i) = -2 + i$ وبالتالي عبارة T المركبة هي : $z' = z - 2 + i$

2. صورة الدائرة : لدينا صورة النقطة B هي B' ذات اللاحقة $z_{B'}$ حيث : $z_{B'} = z_B - 2 + i = -1 + 3i - 2 + i = -3 + 4i$
ولدينا نصف قطر الدائرة (C') هو $R = 3$ وبالتالي معادلة (C') هي :

تذكر الإنسحاب يحافظ على الأطوال

$$(x+3)^2+(y-4)^2=3^2$$

تذكر أن صورة مستقيم بالإنسحاب هو مستقيم يوازيه أي لهما نفس معامل التوجيه .

3. صورة المستقيم :

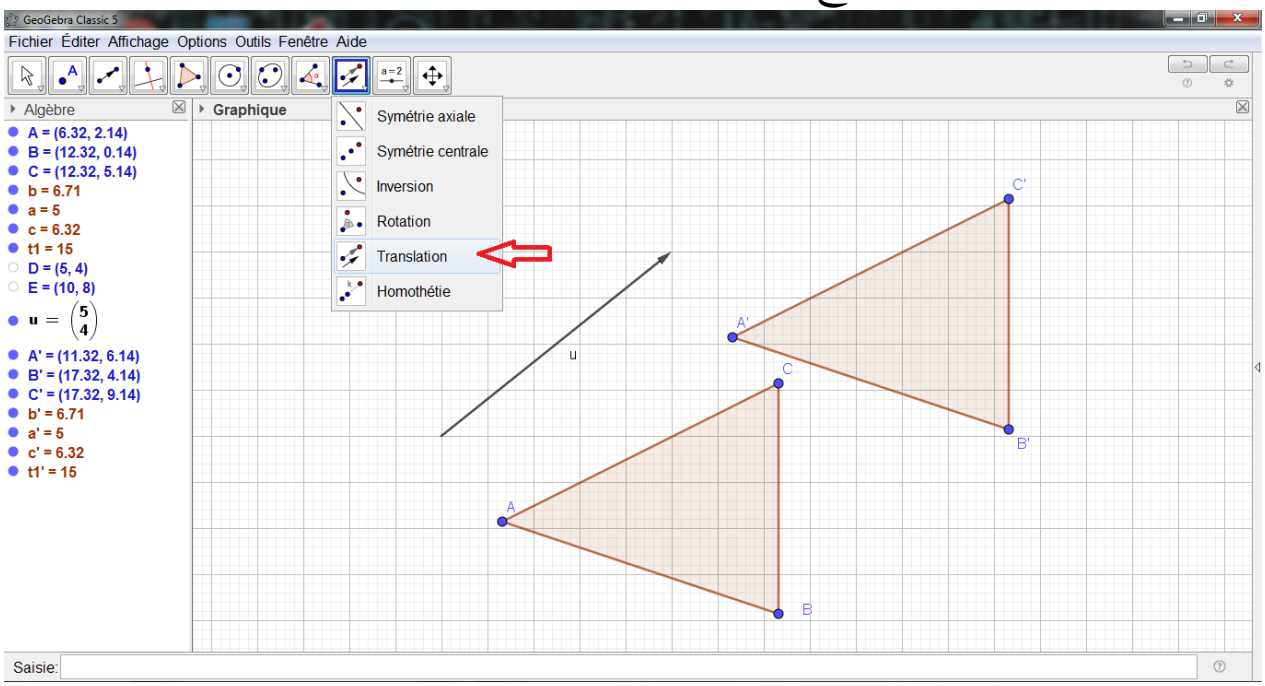
لدينا : $(\Delta'): y=2x+b$ ولدينا النقطة: $E(0,-1)\in(\Delta)$ ومنه :

$E'(-2,0)\in(\Delta')$ أي : $(\Delta'): 0=2(-2)+b$ وبالتالي : $b=4$

وعليه : $(\Delta'): y=2x+4$

للمصادقة GeoGebra

نريد سحب المثلث ABC بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ فنتحصل على المثلث $A'B'C'$ ونلاحظ أن المثلثان متقايسان أي لهما نفس الأطوال ونفس أقياس الزوايا ونلاحظ أيضا أن : $(AB)\parallel(A'B')$ مما يؤكد النتائج السابقة .



نستنتج أن الإنسحاب يحافظ على أقياس الزوايا وعلى الأطوال أيضا .