مدرسة الغزالي للأجيال — جانفي 2018

تطبيقات حول العد

**ما يجب أن تعلمه :**

لتكن $E$ مجموعة منتهية عدد عناصرها $n$ و $k$ عدد طبيعي

**القوائم :** نسمي قائمة ذات $k$ $(k \geq 1)$ عنصرا من $E$ كل متتالية مرتبة من $k$ عنصرا من عناصر $E$.

عدد القوائم ذات $k$ عنصرا من عناصر $E$ هو $\boxed{n^k}$.

**الترتيبات :** نسمي ترتيبة $k$ $(1 \leq k \leq n)$ عنصرا من $E$ كل متتالية مرتبة من $k$ عنصرا متمايزة مثنى مثنى من عناصر $E$.

عدد ترتيبات $k$ عنصرا من عناصر $E$ هو العدد الطبيعي $A_n^k$

المعرف بـ : $\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}$.

**التبديلات :** نسمي تبديلة لعناصر المجموعة $E$ كل ترتيبة $n$ عنصرا من $E$.

عدد تبديلات مجموعة ذات $n$ عنصرا العدد الطبيعي $A_n^n$ حيث :

$A_n^n = n(n-1)(n-2)...\times 2\times 1$ نرمز لهذا العدد بـ : $n!$

أي: $\boxed{n! = n(n-1)(n-2)...\times 2\times 1}$.

**التوفيقات :** نسمي توفيقة $k$ $(0 \leq k \leq n)$ عنصرا من $E$ كل جزء من $E$ يشمل $k$ عنصرا.

عدد توفيقات $k$ عنصرا من عناصر $E$ هو العدد الطبيعي $C_n^k$

المعرف بـ : $\boxed{C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}}$

ملاحظة : عدد أجزاء $E$ ذات $n$ عنصرا هو 1 لأن $E$ هي الجزء الوحيد الذي يشمل $n$ عنصرا.

ومنه : $C_n^n = \dfrac{n!}{n!(0)!} = 1$ وبالتالي : نصطلاح أن: $\boxed{0! = 1}$

**خواص :**

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$
2. $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

**دستور ثنائي الحد :**

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a\, b^{n-1} + b^n$$

**المثلث العددي :**

| p / n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = C_n^p$

**تمرين 1:** $n$ و $p$ عددان طبيعيان :

1- اكتب على ابسط شكل مايلي :

$\dfrac{7!}{6!}$ ، $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ ، $\dfrac{(n+1)!}{(n-3)!}$ ، $\dfrac{n!}{(n-1)!} + \dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ .

2- احسب : $C_{n+1}^{p+1} + C_n^p$ ‘ $C_n^{p+1} + C_n^{p-1}$

3- حل في $\mathbb{N}$ المعادلات الاتية:

$C_n^2 = 45$ ‘ $C_n^3 = C_n^4$ , $C_n^3 + C_n^2 = 3n(n-1)$ .

4- أثبت أن :

- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ..... + C_n^n = 2^n$
- $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ ثم استنتج المجموع :

$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ..... + nC_n^n$

5-بواسطة دستور ثنائي الحد أنشر : $(1-\sqrt{3})^6$ , $(x-1)^5$

6 – انشر $(1+1)^n$ و $(1-1)^n$ صم استنتج المجاميع الاتية :

$s_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ..... + C_n^n$

$s_2 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + .....$

$s_3 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + .....$

**تمرين 2:** يحتوي كيس على 18 كرية مرقمة و موزعة على النحو التالي :

4 حمراء مرقمة من 1 إلى 4

6 بيضاء مرقمة من 1 إلى 6

8 خضراء مرقمة من 1 إلى 8

1- نسحب من هذا الكيس 3 كريات في أن واحد .احسب عدد الحالات الملائمة للحصول على:

أ- 3 أرقام فردية ب- كرية حمراء على الاقل

جـ- كرية واحدة تحمل الرقم 4

2- نسحب من هذا الكيس 3 كريات على التوالي بحيث نعيد في كل مرة الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي. احسب عدد الحالات الملائمة للحصول على :

أ- 3 أرقام فردية ب- كرية حمراء على الاقل

جـ- كرية واحدة تحمل الرقم 4

**تمرين 3 :** يتكون قسم من مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة . يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث :

أ) يكون الأمين تلميذة ؟

ب) التلميذX موجودا في اللجنة ؟

ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

3) نفرض أن الرئيس تلميذا والأمين تلميذة وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y .

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف ؟

**تمرين 4:** يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟

جـ) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر $X_n$ عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن: $X_n = n^2 + 9n + 21$

ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$ .

**تمرين 5:** تريد جمعية مكونة من 5 رجال و 7 نساء تشكيل لجنة تضم 6 أعضاء :

- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث :

ا- يوجد من بين الأعضاء رجلان فقط .

ب- يوجد من بين الأعضاء امرأة على الاقل .

ج- يوجد من بين الأعضاء رجلان على الأكثر.

**تمرين 6 :** 1) ما عدد الأعداد ذات 3 أرقام مختلفة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9 ؟

2) من بين هذه الأعداد . ما عدد الأعداد

أ) الزوجية ؟ ب) مضاعفات 5 ؟

ج) الأصغر من 500 ؟

**تمرين 7:**

1) ماهو عدد الوضعيات التي يمكن أن يجلس بها 8 أشخاص حول طاولة مستديرة؟

2) ) ماهو عدد الوضعيات التي يمكن أن يجلس بها 8 أشخاص حول طاولة مستديرة علما أن الشخص $A$ لا يريد الجلوس مع الشخص $B$

## حساب الإحتمال

ما يجب أن تعلمه : $\Omega$ مجموعة مخارج تجربة عشوائية ومن اجل كل حادثتان $A$ و $B$ من $\Omega$ إذا كان $P$ قانون احتمال متساوي الاحتمال فإن :

$$p(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

إذا كان $A \cap B = \phi$ فإن $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

إذا كان $\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة A فإن $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

$p(\phi) = 0$ و $p(\Omega) = 1$ و $0 \le p(A) \le 1$

**تمرين 1:** نرمي زهرتي نرد سليمتين مرة واحدة لنقرأ الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين .

ما احتمال الحصول على رقمين :

أ- فرديين؟ ب - مجموعهما فردي ؟

جـ - جداؤهما زوجي ؟ د - مجموعهما يقبل القسمة على 3 ؟

**تمرين 2:** نرمي زهرة نرد مغشوشة بحيث احتمال الحصول على الرقمين 4 و 5 متساو وهو ضعف احتمال الحصول على احد الرقمين 2 ؛ 3 وهو 2/3 احتمال الحصول على احد الرقمين 1؛6 . ما احتمال الحصول على رقم زوجي ؟

**تمرين 3:** نرمي قطعة نقد متوازنة (غير مزيفة) ثلاث مرات متتالية في الهواء .

1. شكل شجرة الاحتمالات المرفقة بهذه التجربة.
2. ماهو احتمال :

$A$ : الحصول على الوجه ثلاث مرات .

$B$ : الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل.

**تمرين 4:** يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 و أربع كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 .

نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كرات من الكيس .

1- أحسب احتمال الحصول على :

أ- ثلاث كرات من نفس اللون .

ب- ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .

ج- ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى

**تمرين 5:** نضع داخل كيس 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.

1) نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد

أ) ما احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء ؟

ب) ما احتمال الحصول على 3 كرات سوداء ؟

2) نسحب 4 كرات عشوئيا و في آن واحد

أ)ما احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء و كرة سوداء؟

ب)ماحتمال الحصول على 3 كرات سوداء و كرة بيضاء ؟

3) نسحب الآن 3 كرا ت عشوائيا و في آن واحد

أ - ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل ؟

ب - ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأكثر ؟

**تمرين 6:** يحوي كيس 10 كرات متماثلة . خمس منها بيضاء تحمل الأرقام ( 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ) و ثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام ( 1 ، 2 ، 3 ) و كرتان حمراوان تحملان الرقمين ( 3 ، 3 ) . نسحب عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد

1- ما احتمال الحصول على :

أ) كرة بيضاء و كرتين حمراوين ؟

ب) كرة حمراء على الأقل ؟

جـ) ثلاث كرات مجموع أرقامها يفوق العدد 7 ؟

**طرائق العد :**

| الطريقة/ المطلوب | تشكيل أعداد | تشكيل لجان | سحب من كيس | مجموعات |
|---|---|---|---|---|
| قائمة | الأرقام يمكن أن تتكرر | // | على التوالي مع الإعادة | // |
| ترتيبة | الأرقام لا تتكرر | المهام محددة | على التوالي دون إعادة | // |
| توفيقة | // | المهام غير محددة | في آن واحد | أجزاء مجموعة |