التمرين 01:

نعتبر المتتالية (u_n) ذات الحدود الموجبة بحيث: $u_0=5$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}$.

1) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\geq 4$.

2) نريد في هذا السؤال دراسة تقارب (u_n) بطريقتين:

أ) * بين أن (u_n) متناقصة.

* إستنتج مما سبق أن (u_n) متقاربة و عين نهايتها.

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-4\leq\frac{1}{4}(u_n-4)$

* بين أن من أجل كل عدد طبيعي n: $0\leq u_n-4\leq\frac{1}{4^n}$.

* إستنتج أن (u_n) متقاربة و عين نهايتها.

التمرين 02:

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

1) بين أنه إذا كـــان $x\geq 1$ فـــإن $f(x)\geq 1$.

2) نعرف المتتالية (u_n) بـ: $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n، أن $u_n\geq 1$.

ب) أدرس إتجـــــاه تغير المتتالية (u_n).

ج) إستنتج أن (u_n) متقاربة و أحسب نهايتها ℓ.

3) (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n=\ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين عناصرها المميزة.

ب) أكتب v_n بدلالة n و إستنتج أن: $u_n=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

التمرين 03:

(u_n) متتالية عددية معرف بـ: $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{2u_n-3}{4-u_n}$.

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون $u_{n+1}=a+\frac{b}{4-u_n}$

2) برهن بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي n، أن: $-1\leq u_n\leq 3$

3) أدرس رتابة المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-3}{u_n+1}$.

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

5) أحسب، بدلالة n المجموع $S=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$.

التمرين 04:

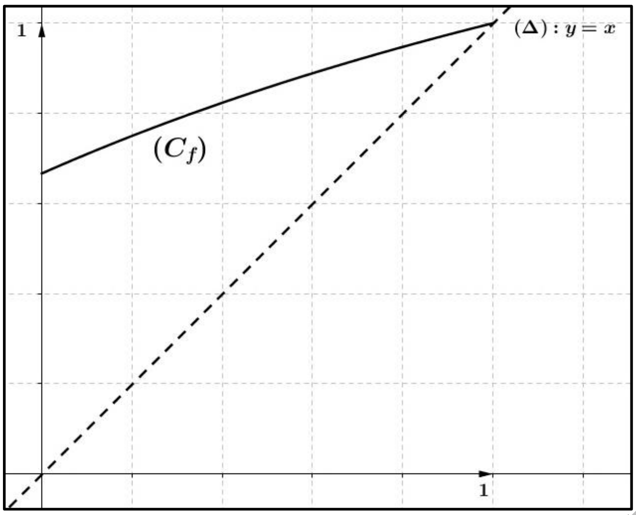
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x)=\frac{2x+2}{x+3}$

1) أدرس تغيرات الدالة f، ثم بين أنه من أجل $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$

2) لتكن (u_n) متتالية معرفة بحدهـــــا الأول $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$.

ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f فـــي معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطــــــــول $10cm$).

باستخدام المنحنى (C_f) و المنصف الأول $(\Delta): y=x$ مثل الحدود الأربعة



الأولى للمتتالية (u_n) على محور الفواصل.

ج) خمن إتجاه تغير المتتالية (u_n)، هــل هي متقاربة؟

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\in[0;1]$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n+2)(1-u_n)}{u_n+3}$

ج) إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n)

د) بين أنهـــا متقاربة ثم عين نهـــايتها.

4) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+2}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أسساها و حدها الأول.

ب) عين عبارة v_n و u_n بدلالة n ثم إستنتج من جديد نهاية (u_n).

التمرين 05:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=u_n-\ln(u_n^2+1) & ;n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\ln(x^2+1)$

* حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=x$

* بين أن الدالة f متزايدة علـــــى المجال $[0;1]$.

* إستنتج أنه إذا كـــان $x\in[0;1]$ فإن $f(x)\in[0;1]$.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n\in[0;1]$.

* أدرس إتجـــاه تغير المتتالية (u_n).

* بين أن المتتالية (u_n) متقاربة . أحسب نهايتهـــــا.

التمرين 06:

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 و بعلاقة التراجع الآتية: من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\dfrac{3u_n-1}{2u_n}$.

1) عين قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثـــابتة.

2) نفرض في كل مــا يأتي أن: $u_0=2$.

أ) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$.

ب) أدرس إتجــــاه تغير المتتالية (u_n).

ج) هــل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برر إجـــابتك.

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أســاسها $\dfrac{1}{2}$.

ب) أحسب، بدلالة n من S_n و P_n حيث: $S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$.

التمرين 07:

أ) نعرف المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=\dfrac{1}{2}$ و بالعلاقة التراجعية: $u_{n+1}=\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)u_n$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n\geq 0$

2) أدرس إتجــاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة .

3) أوجد نهـــاية المتتالية (u_n).

ب) نعرف المتتالية العددية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n كما يلي: $v_n=\dfrac{u_n}{n}$

1) أثبت أن (v_n) هندسية و عين اساسها وحدها الأول

2) أكتب v_n بدلالة n و إستنتج u_n بدلالة n .

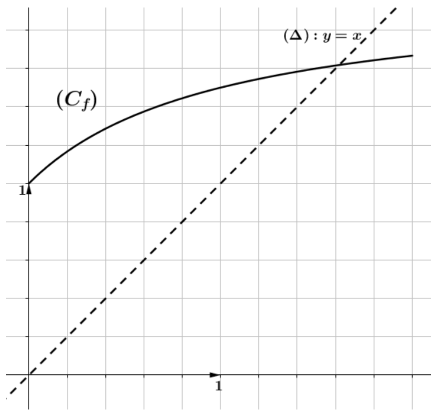
3) أوجد من جديد نهـــاية u_n

التمرين 09:

f دالة معرفة على المجال $[0;2]$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$، (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (أنظر الشكل)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ و $\begin{cases}v_0=2\\v_{n+1}=f(v_n)\end{cases}$

1) أ) باستعمال المنحنى (C) و المنصف الأول للمعلم مثل على محور الفاصل الثلاث الحدود الأولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n).



ب) أعط تخمينا حول إتجـاه تغير و تقارب كـل من (u_n) و (v_n).

2) أ) برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n ما يلي: * $1\leq u_n\leq 2$ * $u_n\leq u_{n+1}$.

ب) برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n ما يلي: * $1\leq v_n\leq 2$ * $v_{n+1}\leq v_n$.

ج) مـــاذا تستنتج بالنسبة لتقارب كل من (u_n) و (v_n)؟

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}\ .$$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$

ج) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n-u_n\leq\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n-u_n\geq 0$.

هـ) إستنتج أن (u_n) و (v_n) متجاورتان ، ثم أحسب نهاية كل منهما.

التمرين 10:

أ) لكل عدد طبيعي n غير معدوم نعتبر المتتالية (u_n) حيث:

$$\begin{cases}u_1=e^2\\u_{n+1}=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}\end{cases}$$

1) أحسب كـــــل من u_2 و u_3.

2) أثبت أنه لكل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $u_n>\dfrac{1}{e}$.

3) برهن أن لكل عدد طبيعي n غير معدوم فإن: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

ب) نضع لكل n من $\mathbb{N}^*$: $w_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\ln u_n$

1) أثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسهـــا $\dfrac{1}{2}$.

2) عبر عن w_n بدلالة n ثم إستنتج أن: $u_n=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$.

3) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) أحسب الجداء: $P_n=u_1\times u_2\times\dots\times u_n$

التمرين 11:

I) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\dfrac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\dfrac{3}{2}\left[1-\dfrac{1}{1+2u_n}\right]$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0<u_n<1$.

2) أ) تحقق أن $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n، ثم إستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) بين أن (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتهـــــا.

II) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدهـــا الأول

ب) أكتب v_n بدلالة n و إستنتج u_n بدلالة n، ثم أحسب من جديد نهـــــاية المتتالية (u_n).

ج) أحسب بدلالة n المجموعين $S_n=v_0+v_1+\dots+v_n$ و $T_n=v_0+3v_1+9v_2+\dots+3^nv_n$.

التمرين 12:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $3u_{n+1}=u_n+4n+4$.

1) أحسب u_1، u_2، u_3.

2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$، $u_n>\frac{4}{3}$ و إستنتج نهــــاية المتتالية (u_n).

3) نعرف المتتالية (v_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-2n+1$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدهـا الأول.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=4\left(\frac{1}{3}\right)^n+2n-1$.

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ ثم إستنتج بدلالة n المجموع T_n حيث: $T_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين 13:

I) لتكن (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما و تحقق $\begin{cases} v_1-v_3=\frac{7}{16} \\ v_1\times v_2\times v_3=\frac{27}{64}\end{cases}$، أحسب v_2 ثم الأساس q للمتتالية (v_n).

II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0=\alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $4u_{n+1}=3u_n-2$.

1) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثـــابتة.

2) نضع: $\alpha=-\frac{2}{3}$

أ) أحسب الحدود الأربعة الأولـــــــــــــى.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>-2$.

ج) عين إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم إستنتج أنها متقاربة.

3) أ) بين أن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=u_n-v_n$ ثـابتة.

ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب نهايتهــا.

4) أحسب بدلالة n المجموع التـالي: $S_n=\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+...+\frac{u_n}{v_n}$.

التمرين 14:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-2$.

1) احسب u_1، u_2، u_3.

2) أ) أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ فـــــإن $u_n\geq 0$.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 5$ فإن $u_n\geq n-3$.

ج) إستنتج نهـــــــاية المتتالية (u_n).

3) لتكن (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=-2u_n+3n-\frac{21}{2}$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أســـــاسها و حدهـا الأول.

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}$

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين 15:

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n، كما يلي: $u_0=e$ و $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

1) بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، فإن: $u_n>1$

2) أدرس إتجـــــاه تغير المتتالية (u_n)، و إستنتج تقـــــاربها.

3) لتكن المتتالية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $v_n=\ln(u_n)$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسهـــا و حدها الأول.

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n).

4) نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$ و $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$

أ) أحسب S_n ثــم P_n بدلالة n.

ب) عين العدد الطبيعي n حتـــــى يكون $P_n=e^{\frac{7}{4}}$.

التمرين 16:

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بكل عدد طبيعي n بـ: $u_0=1$ و $u_{n+1}=2u_n+3^n$

1) أحسب الحدود الأربع الأولى.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، أن المتتالية (u_n) هندسية متباعدة.

3) أحسب المجاميع التالية بدلالة n، $S_1=\sum_{k=0}^{n}u_k$ و $S_2=\sum_{k=0}^{n}u_k^2$

4) أحسب الجداء التالي بدلالة n، $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_n$.

5) في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A_n إحداثياتهـــا $(n;u_n)$ حيث n عدد طبيعي

أ) عين إحداثيات G_n مركز ثقل النقط A_n.

ب) هل تأخذ النقطة G_n وضعا نهائيا من أجل n كبير بالقدر الكـــافي؟

التمرين 17:

الجزء الأول: f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=5\ln(x+3)-x$ و ليكن (C_f) المنحنى البياني لها في معلم متعامد ومتجـــــانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

- أحسب $f'(x)$ و أدرس إشـــــارتها على المجال $[0;+\infty[$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا:

$$f(x)=x\left(\frac{5\ln x}{x}-1\right)+5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

ج) إستنتج نهــــــاية الدالة f عند $+\infty$.

د) شكـــــل جدول تغيرات الدالة f.

2) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $[0;+\infty[$ و تحقق أن $14<\alpha<15$

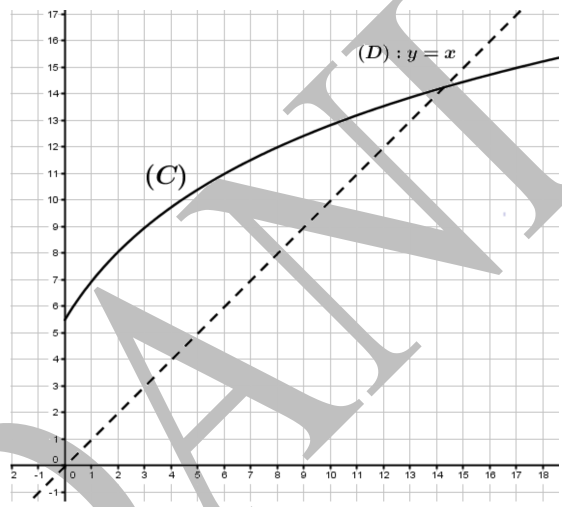
ب) إستنتج إشـــارة الدالة f على المجال $[0;+\infty[$.

الجزء الثاني:

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=5\ln(u_n+3)$

و لنعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=5\ln(x+3)$.

1) أ) على الشكل المقابل، إستعمل المنحنى (C) الممثل للدالة g و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ لتمثيل على حامل محور الفواصل و بدون حساب الحدود u_0، u_1، u_3



ب) ضع تخمينا حول إتجـــاه تغير المتتالية (u_n).

2) أ) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$.

ب) تحقق أن $g(\alpha)=\alpha$.

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ان: $0\le u_n\le\alpha$

د) بين أن $\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$.

التمرين 18:

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف متتالية (u_n) كمـــا يلي:

$$u_n=\frac{1}{2^n}+\alpha n+\beta$$

1) عين العددين الحقيقين α و β بحيث يكون من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n-2u_{n+1}=2n+3$

2) نأخذ فيما يأتي: $\alpha=-2$ و $\beta=1$

نعرف متتالية عددية أخرى (v_n) كما يلي: $v_n=u_n+2n-1$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اســـاسها q و حدها الأول v_0 ثم إستنتج $\lim_{n\to+\infty}v_n$.

ب) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

3) المستوي (P) مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. A، B، C و G أربعة نقاط من هذا المستوي و تحقق العلاقة: $2\vec{GA}+3\vec{GB}+\lambda\vec{GC}=\vec{0}$ حيث λ عدد حقيقي.

* عين λ حتى تكون النقطة G مرجح للجملة: $\{(A,S_0);(B,S_1);(C,S_2)\}$ حيث S_n هو المجموع المذكور

التمرين 19:

لتكن المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+v_n}{3}\end{cases} \text{ و } \begin{cases}v_0=10\\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}\end{cases}$$

1) أ) أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{5}{12}(v_n-u_n)$

ب) من اجل كل عدد طبيعي n، نضع: $w_n=v_n-u_n$

- أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n أن: $w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n$

2) أ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما

ب) إستنتج من نتائج السؤالين 2)أ) و 1)ب) أنه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_n\le 10$ و $v_n\ge 2$

ج) إستنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متقاربتين.

3) أثبت أن للمتتاليتين (u_n) و (v_n) نفس النهاية

4)أ) أثبت ان المتتالية (t_n) المعرفة بـ: $t_n=3u_n+4v_n$ ثابتة

ب) إستنتج أن النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) هي $\frac{46}{7}$

التمرين 20:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt[3]{u_n}\right)^3\end{cases}$

1. بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 1$.

2. أدرس رتابة (u_n) ثم إستنتج أنها متقاربة. (لاحظ أن $8u_n=\left(2\sqrt[3]{u_n}\right)^3$)

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=\sqrt[3]{u_n}-1$

أ/ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب/ أكتب v_n ثم u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

4. نضع: $S_n=\sqrt[3]{u_0}+\sqrt[3]{u_1}+...+\sqrt[3]{u_{n-1}}$، أحسب S_n بدلالة n.

التمرين 21:

1) نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+n-1\end{cases} \text{ و } v_{n+1}=4u_n+6n+15$$

أ) أحسب v_0 ب) بين أن (v_n) متتالية هندسية ثم أحسب v_n بدلالة n.

ج) أحسب u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

2) نضع من اجل كل عدد طبيعي n، $x_n=\dfrac{19}{4\times 3^n}$ و $y_n=\dfrac{6n-15}{4}$

أ) تحقق أن، $u_n=x_n+y_n$ من اجل كل عدد طبيعي n.

ب) بين أن (x_n) متتالية هندسية و (y_n) متتالية حسابية

ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S=u_0+u_1+...+u_n$.

---------------- إنتهـــــى -