تمارين و مسائل محلولة حول المتتاليات العددية

تحت إشراف : أساتذة الثانوية الجديدة " برح منايل – ولاية بومرداس"

1

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

نضع : $A_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$ وَ $v_n=u_{2n}$

أجب بصحيح (ص) أو خطأ (خ) في كل مما يلي :

أ) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ب) (u_n) متتالية متناقصة .

جـ) المتتالية (u_n) متقاربة نحو الصفر .

د) من أجل كل p من $\mathbb{N}^*$: $A_{2p}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^p\right]$

هـ) من أجل كل p من $\mathbb{N}^*$: $A_{2p-1}=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}\right]$

2

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=1$ وَ $2u_{n+1}=u_n-1$

(v_n) متتالية معرفة بـ : $v_n=u_n+\frac{1}{2}$

أجب بصحيح (ص) أو خطأ (خ) في كل مما يلي :

أ) (v_n) متتالية هندسية .

ب) من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right]$

جـ) إذا كان $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$ إذن (u_n) متباعدة .

د) $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{1}{2}\left[5-n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

هـ) $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=-\frac{1}{2}$

3

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

أجب بصحيح (ص) أو خطأ (خ) في كل مما يلي :

أ) المتتالية (u_n) متزايدة تماماً .

ب) المتتالية (u_n) متقاربة نحو الصفر .

جـ) $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$

د) $\lim_{n\to+\infty}S_n=-\infty$

هـ) $\lim_{n\to+\infty}n\,u_n=-\infty$

4

(u_n) متتالية معرفة بحدها الأول $u_1=1$ وَ بـِ $u_{n+1}=2u_n+3$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

نضع $v_n=u_n+3$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب إيجاد أساسها .

- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_1+v_2+.....+v_n$

جـ) أثبت أن : $u_1+u_2+.....+u_n+3n$ مضاعف للعدد 4 ، و هذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

5

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\,;\,u_1=4\\ u_{n+1}=4u_n-u_{n-1}\quad :n\geq 1\end{cases}$

أ) جد عددين حقيقيين a وَ b حيث : $a+b=4$ وَ $ab=1$.

ب) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=u_{n+1}-au_n$

برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n=u_{n+1}-bu_n$

برهن أن (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

د) أكتب v_n وَ w_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

6

1) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و أساسها r حيث : $\begin{cases}v_1+v_2+v_3=24\\ v_4+v_5+v_6+v_7=74\end{cases}$

أ) عين v_1 وَ r .

ب) استنتج v_n بدلالة n و عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $v_n>6023$

2) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها d .

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$

- عين u_1 وَ d حتى يكون $2S_n=n(3n+7)$ ، و هذا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

7

(α_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و حدها الأول $\alpha_1=3$ وَ $\alpha_3+\alpha_5=\frac{15}{16}$.

أ) عين أساس المتتالية (α_n) .

ب) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_n$

جـ) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $\beta_n=\ln(\alpha_n)$ ($\ln$ هو اللوغاريتم النيبيري)

1) برهن أن (β_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

2) أحسب بدلالة n المجموع : $t_n=\beta_1+\beta_2+.....+\beta_n$

8

1) (u_n) متتالية معرفة كما يلي : $u_0=e^3-1$ و مهما يكن العدد الطبيعي n : $e^3u_{n+1}=1-e^3+u_n$.

أ) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

ب) أثبت أن مهما يكن العدد الطبيعي n : $1+u_n>0$

حـ) بيّن أن (u_n) متناقصة تماما .

2) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ : $v_n=2(1+u_n)$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب) أحسب v_n بدلالة n .

جـ) نضع : $S_n=v_0+v_1+.....v_n$

- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

د) عين n حتى يكون : $v_n\geq 2+10^{-9}$

9

1) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و حدها الأول u_0 حيث : $\ln u_1+\ln u_5=-12$ وَ $\ln u_2-\ln u_4=4$

أ) عين أساس هذه المتتالية و حدها u_0 .

ب) أحسب u_n بدلالة n .

جـ) نسمي S_n المجموع : $u_0+u_1+.....u_n$

- أحسب S_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

2) (v_n) متتالية عددية معرفة بـ : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

ب) نضع : $S'_n=v_0+v_1+.....v_n$

- عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $S'^2_n=2^{30}$

10

ليكن a عدد حقيقي و من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$u_n=1+\cos a+\cos 2a+.....+\cos na$$

$$v_n=\sin a+\sin 2a+.....+\sin na$$

أ) برهن أن من أجل $a\not\equiv 0[2\pi]$: $u_n+iv_n=e^{in\frac{a}{2}}\cdot\dfrac{e^{i(n+1)\frac{a}{2}}-e^{-i(n+1)\frac{a}{2}}}{e^{i\frac{a}{2}}-e^{-i\frac{a}{2}}}$

ب) استنتج عبارتي u_n وَ v_n بدلالة n .

11

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ : $u_{n+1}=\frac{3}{u_n+2}$ وَ $u_0=0$.

أ) عيّن الدالة f بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

ب) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على محور الفواصل .

جـ) هل الدالة f متزايدة أو متناقصة ؟

12

لتكن (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+.....+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$

أ) بملاحظة أن كل حد من حدود المجموع محصور بين الحد الأول و الحد الأخير ، برهن أن :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}\le u_n\le\frac{n}{n+1}$$

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة ، ثم عين نهاية (u_n) .

13

(u_n) متتالية معرفة بـ : $u_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{3}{u_n+2}$

و لتكن (v_n) متتالية بحيث : $v_n=u_n-1$

أ) بيّن أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1}=\frac{-v_n}{2+u_n}$

ب) استنتج أن : $|v_n+1|\le\frac{1}{2}|v_n|$

جـ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $|v_n|\le\frac{1}{2^n}$

14

مؤسسة تنقيب قدرت مبلغ المتر الأول بـ $1000\,DA$ و زيادة $100\,DA$ لكل متر إضافي .

نرمز بـ (u_n) الثمن بالدينار للمتر النوني للتنقيب .

أ) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

ب) عبر من أجل كل $n\in\mathbb{N}^*$ عن u_{n+1} بدلالة u_n . ماذا تستنتج ؟

جـ) أعط عبارة u_n بدلالة u_1 وَ n .

د) أحسب المبلغ اللازم للتنقيب عن عمق $20m$.

هـ) ليكن C_n مبلغ التنقيب عن n متراً .

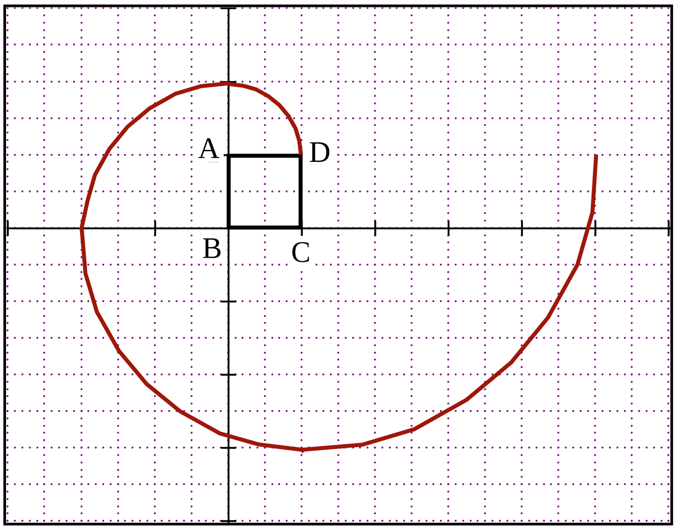
- عبّر عن C_n بدلالة n .

و) علما أن المؤسسة رصدت مبلغاً أعظمياً قدره $500\,000\,DA$ للتنقيب .

- ما هو العمق الذي نصل إليه ؟

15

انطلاقا من المربع $ABCD$ حيث $AB=1cm$ ، ننشئ حلزون و ذلك برسم على التوالي أرباع الدوائر ذات المراكز A ، B ، C ، D على الترتيب (أنظر الشكل) .



ليكن n عدد طبيعي غير معدوم .
نرمز بـ C_n لربع الدائرة و بـ r_n لنصف قطر C_n وَ بـ L_n لطول الحلزون المحصل عليه انطلاقا من n ربع دائرة C_1 ، C_2 ، C_3 ، ..... ، C_n.

أ) أحسب r_1 ، r_2 ، r_3 ، و عبّر عن r_{n+1} بدلالة r_n من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم . ماذا تستنتج ؟

ب) عبّر عن r_n بدلالة n و أحسب u_n طول ربع الدائرة C_n .

جـ) أحسب L_n طول الحلزون بدلالة n .

16

مؤسسة بنكية تقترح على زبائنها عقداً للتوفير يتمثل فيما يلي :
- رصيد ابتدائي $10000DA$ ، و رصيد شهري $500DA$ و نسبة فوائد شهرية $0,4\%$ تضاف إلى الرصيد الابتدائي .
نرمز بـ C_n للمبلغ بالدينار المتحصل عليه خلال n شهراً .
لدينا : $C_0 = 10000DA$

أ) أحسب C_1 ، C_2 ، C_3 .

ب) علّل انه من أجل كل عدد طبيعي n : $C_{n+1} = 1,004C_n + 500$

جـ) برهن أنه توجد متتالية وحيدة ثابتة (u_n) بحيث من أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} = 1,004C_n + 500$

د) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = C_n - u_n$

1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية عين أساسها وحدها الأول.

2) عبّر عن v_n ثم C_n بدلالة n .
3) ما هو رصيد الزبون بعد 5 سنوات من التوفير ؟

17

متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

أ) عيّن الدالة f بحيث من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ ، و أنشئ (C) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب) باستعمال (C) و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ ، مثل نقاط المحور $(O,\vec{i})$ ذات الفواصل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 .

جـ) هل (u_n) متزايدة أم متناقصة ؟

د) هل (u_n) محدودة ؟ ما هي القيم الحدية ؟

هـ) هل (u_n) متقاربة ؟ علّل إجابتك .

و) نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$.

- علّل المساواة $\ell = \sqrt{\ell + 2}$ و استنتج قيمة ℓ .

الحلول

1

القضية (أ) : خ

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ و حدها الأول $\frac{1}{2}$.

القضية (ب) : خ

(u_n) لا هي متزايدة و لا هي متناقصة .

من أجل n زوجي فكل الحدود موجبة ، و من أجل n فردي فكل الحدود معدومة .

القضية (جـ) : ص

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$

و بالتالي (u_n) متقاربة نحو الصفر .

القضية (د) : ص

لدينا : $A_{2p} = v_1 + v_2 + ... + v_p = \frac{1}{2}\left[\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^p}{1-\frac{1}{4}}\right]$

و منه : $A_{2p} = \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^p\right]$

القضية (هـ) : ص

لدينا : $A_{2p-1} = v_1 + v_2 + ... + v_{p-1}$ و منه : $A_{2p-1} = \frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{p-1}\right]$

2

القضية (أ) : ص

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$.

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول $\frac{3}{2}$.

القضية (ب) : خ

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و منه : $u_n=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2^n}-1\right]$

القضية (جـ) : خ

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2^n}=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-\frac{1}{2}$. إذن (u_n) متقاربة .

القضية (د) : ص

لدينا : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}v_k-\frac{1}{2}(n+1)=3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}$

و منه: $S_n=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}n-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\left[5-n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

القضية (هـ) : ص

لدينا : $\frac{S_n}{n}=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{n}-1-\frac{3}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=-\frac{1}{2}$

3

القضية (أ) : ص

f معرفة على المجال $I=]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

الدالة f متزايدة تماماً على I .

القضية (ب) : ص

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=0$ و منه المتتالية (u_n) متقاربة نحو الصفر .

القضية (جـ) : ص

من أجل كل k من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $u_k=\ln k-\ln(k+1)$

و منه : $S_n=-\ln(n+1)=\ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$

القضية (د) : ص

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$ وَ $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}x=-\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=-\infty$

القضية (هـ) : خ

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

لدينا : $n\,u_n = n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ و منه $n\,u_n = -n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ أي $n\,u_n = -\frac{\ln\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

لكن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ وَ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = -1$

4

أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+3+3=2(u_n+3)=2v_n$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 و حدها الأول $v_1=u_1+3=4$.

- كتابة v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n=v_1\times q^{n-1}=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

- استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $u_n=v_n-3=2^{n+1}-3$

ب) حساب بدلالة n المجموع $S_n=v_1+v_2+.....+v_n$:

لدينا : $S_n=v_1\times\frac{q^n-1}{q-1}=4\times\frac{2^n-1}{2-1}=4(2^n-1)$

جـ) إثبات أن $u_1+u_2+.....+u_n+3n$ مضاعف للعدد 4 ، و هذا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$:

لدينا : $u_1+u_2+.....+u_n+3n=(v_1-3)+(v_2-3)+.....+(v_n-3)+3n$

$=v_1+v_2+.....+v_n-3n+3n$

$=4(2^n-1)$

و هو مضاعف للعدد 4 .

5

(u_n) متتالية معرفة كما يلي : $\begin{cases}u_0=2\,;\,u_1=4\\ u_{n+1}=4u_n-u_{n-1}\quad : n\geq 1\end{cases}$

أ) إيجاد a وَ b :

لدينا : $\begin{cases}a+b=4\\ ab=1\end{cases}$ يعني $a^2-4a+1=0$

مميز المعادلة $a^2-4a+1=0$ هو $\Delta'=3$ و منه $\begin{cases}a=2-\sqrt{3}\\ b=2+\sqrt{3}\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=2+\sqrt{3}\\ b=2-\sqrt{3}\end{cases}$

ب) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها b :

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+2}-au_{n+1}$

$=4u_{n+1}-u_n-au_{n+1}=(4-a)u_{n+1}-1\,u_n$

و منه : $v_{n+1}=bu_{n+1}-abu_n=b(u_{n+1}-au_n)=bv_n$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها b .

جـ) إثبات أن (w_n) متتالية هندسية أساسها a :

لدينا : $w_{n+1} = u_{n+2} - bu_{n+1} = 4u_{n+1} - u_n - bu_{n+1}$
$= (4-b)u_{n+1} - 1u_n$
$= a\,u_{n+1} - ab\,u_n = a(u_{n+1} - bu_n) = aw_n$

و منه (w_n) متتالية هندسية أساسها a .

د) كتابة v_n وَ w_n بدلالة n :

- لدينا : $v_n = v_0 b^n = (u_1 - au_0)b^n = (4-2a)b^n$

لكن : $a+b=4$ إذن $v_n = (b-a)b^n$

- لدينا : $w_n = w_0 a^n = (u_1 - bu_0)a^n = (4-2b)a^n$

لكن : $a+b=4$ إذن $w_n = (a-b)a^n$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

- لدينا : $w_n = (a-b)a^n = u_{n+1} - bu_n$ وَ $v_n = (b-a)b^n = u_{n+1} - au_n$

بالطرح طرفا لطرف نجد : $w_n - v_n = au_n - bu_n = (a-b)u_n$

و منه : $u_n = \dfrac{w_n - v_n}{a-b} = \dfrac{(a-b)a^n - (b-a)b^n}{a-b}$

و منه : $u_n = a^n + b^n$ أي : $u_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n + \left(2+\sqrt{3}\right)^n$

6

1) أ) تعيين v_1 وَ r :

بما أن (v_n) متتالية حسابية فإن $v_n = v_1 + (n-1)r$

لدينا : $\begin{cases} v_1+v_2+v_3=24 \\ v_4+v_5+v_6+v_7=74 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} v_1+r=8 \\ 2v_1+9r=37 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} v_1=5 \\ r=3 \end{cases}$

ب) استنتاج v_n بدلالة n و تعيين أصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n > 6023$:

لدينا : $v_n = 5 + (n-1)\times 3$ و منه $v_n = 3n+2$.

و لدينا : $v_n > 6023$ يعني $3n+2 > 6023$ أي $n > 2007$ و منه $n = 2008$

2) تعيين u_1 وَ d حيث $2S_n = n(3n+7)$:

لدينا : $2S_n = n(3n+7)$ يعني $n(u_1+u_n) = n(3n+7)$

أي $(d-3)n + d + 2u_1 - 7 = 0$ من أجل كل عدد طبيعي n . و منه : $d=3$ ، $u_1=5$.

7

أ) تعيين أساس المتتالية (α_n) :

لدينا : (α_n) متتالية هندسية حدودها موجبة و حدها الأول $\alpha_1 = 3$ يعني $\alpha_n = 3q^{n-1}$.

و لدينا : $\alpha_3 + \alpha_5 = \dfrac{15}{16}$ يعني $3q^2 + 3q^4 = \dfrac{15}{16}$

أي $48q^4+48q^2-15=0$ و هي معادلة مضاعفة التربيع بحلها نجد أن $q=\frac{1}{2}$ أما الحل الآخر $\left(q=-\frac{1}{2}\right)$ فهو مرفوض لأن حدود المتتالية موجبة .

ب) حساب بدلالة n المجموع $S_n=\alpha_1+\alpha_2+.....+\alpha_n$:

لدينا : $$S_n=3\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=6-6\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

جـ) 1) إثبات أن (β_n) متتالية حسابية :

لدينا : $$\beta_{n+1}=\ln(\alpha_{n+1})=\ln\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$=\ln\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]$$

$$=\ln\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]$$

$$=\ln\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ln\alpha_n+(-\ln 2)$$

إذن (β_n) هي متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$.

2) حساب المجموع t_n بدلالة n :

لدينا : $$t_n=\beta_1+\beta_2+.....+\beta_n=\frac{n}{2}(\beta_1+\beta_n)$$

حيث : $\beta_1=\ln(\alpha_1)=\ln 3$

$$\beta_n=\beta_1+(b-1)\times(-\ln 2)$$

$$=(-\ln 2)n+\ln 2+\ln 3$$

$$=\ln\left(2^{n-1}\right)+\ln 3=-\ln\left(2^{n-1}\right)+\ln 3$$

و منه : $$t_n=\frac{n}{2}\left(\ln 3+\ln 3-\ln 2^{n-1}\right)$$

$$=\frac{n}{2}\left(2\ln 3-\ln 2^{n-1}\right)$$

$$=\frac{n}{2}\left[\ln\left(\frac{9}{2^{n-1}}\right)\right]$$

8

1) أ) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 :

لدينا : $u_0 = e^3 - 1$ وَ $e^3 u_{n+1} = 1 - e^3 + u_n$

و منه : $(u_1 , u_2 , u_3) = \left(0 , \frac{1-e^3}{3} , \frac{1-e^6}{6}\right)$

ب) إثبات أن $1 + u_n > 0$:

نبرهن بالتراجع أن $1 + u_n > 0$.

- من أجل $n = 0$ لدينا $1 + u_n > 0$ فهي محققة .

- نفرض أن $1 + u_n > 0$ و نبرهن أن $1 + u_{n+1} > 0$.

لدينا : $1 + u_{n+1} = 1 + \frac{1 - e^3 + u_n}{e^3} = \frac{1 + u_n}{3}$

بما أن $1 + u_n > 0$ فإن $1 + u_{n+1} > 0$ و منه الخاصية صحيحة .

حـ) إثبات أن (u_n) متناقصة تماما :

- نبيّن أن $u_{n+1} - u_n < 0$ و نبرهن أن $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$.

لدينا : $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1 - e^3 + u_{n+1}}{e^3} - \frac{1 - e^3 + u_n}{e^3} = \frac{u_{n+1} - u_n}{e^3}$

و بما أن $u_{n+1} - u_n < 0$ فإن $u_{n+2} - u_{n+1} < 0$ و منه المتتالية (u_n) متناقصة .

2) أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا : $v_{n+1} = 2(1 + u_{n+1}) = 2\left(1 + \frac{1 - e^3 + u_n}{e^3}\right) = \frac{1}{e^3} \times 2(1 + u_n)$

و منه نجد أن : $v_{n+1} = \frac{1}{e^3} v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e^3}$ و حدها الأول

$v_0 = 2(1 + u_0) = 2e^3$.

ب) حساب v_n بدلالة n :

لدينا : $v_n = 2e^3 \times \left(\frac{1}{e^3}\right)^n$ و منه $v_n = 2e^{3-3n}$.

جـ) حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$:

لدينا : $S_n = v_0 + v_1 + ...v_n$

$S_n = v_0 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2e^3 \times \frac{\left(\frac{1}{e^3}\right)^n - 1}{\frac{1}{e^3} - 1} = \frac{2e^6}{e^3 - 1}\left[1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right]$ و منه : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{2e^6}{e^3 - 1}$

د) تعيين n حتى يكون $v_n \geq 2 + 10^{-9}$:

لدينا : $v_n \geq 2 + 10^{-9}$ يعني $2 \times e^{3-3n} \geq 2 + 10^{-9}$ أي أن $n \leq 1 + 3\ln 10$ أي $n \leq 7$ (لأن $n \in \mathbb{N}$)

و منه : $n \in \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$

9

1) أ) تعيين أساس هذه المتتالية و حدها الأول u_0 :

المتتالية (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : و حدها الأول u_0 حيث :

$$\begin{cases} \ln u_1 + \ln u_5 = -12......(1) \\ \ln u_2 - \ln u_4 = 4.........(2) \end{cases}$$

لدينا : $u_n = u_0 q^n$ و منه $u_2 = u_0 q^2$ و $u_4 = u_0 q^4$

(2) تكافئ $\dfrac{u_2}{u_4} = e^4$ أي $\dfrac{\cancel{u_0} q^2}{\cancel{u_0} q^4} = e^4$ و منه $q = e^{-2}$ (لأن الحدود موجبة)

(1) تكافئ $u_1 \times u_5 = e^{-12}$ أي $u_0 q \times u_0 q^5 = e^{-12}$

و منه $u_0^2 q^6 = e^{-12}$ أي $u_0 \times \left(e^{-2}\right) = e^{-12}$ و منه $u_0 = 1$.

ب) عبارة الحد العام : $u_n = 1 \times \left(e^{-2}\right)^n = e^{-2n}$

جـ) حساب المجموع S_n بدلالة n :

لدينا : $$S_n = u_0 + u_1 + ...u_n = u_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1 \times \frac{\left(e^{-2}\right)^{n+1} - 1}{e^{-2} - 1}$$

$$= \frac{e^2}{e^2 - 1}\left[1 - e^{-2n-1}\right]$$

- حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$:

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{e^2}{e^2 - 1}$

2) أ) إثبات أن (v_n) متتالية حسابية :

لدينا : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

$$v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+2} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+2}}{u_n}\right) = \ln e^{-4} = -4$$

إذن : (v_n) متتالية حسابية أساسها -4 و حدها الأول $2-$ $v_0 = \ln u_0 + \ln u_1 = 0 + (-2) = -2$.

ب) تعيين العدد الطبيعي n حيث $S_n'^2 = 2^{30}$:

لدينا : $S_n' = v_0 + v_1 + ...v_n = \dfrac{n+1}{2}\left(-2 + (-2 - 4n)\right)$

و منه : $S_n' = -2(n+1)^2$

لكن : $S_n'^2 = 2^{30}$ يكافئ $\left[-2(n+1)^2\right]^2 = 2^{30}$ أي $(n+1)^4 = 2^{28}$ و منه $(n+1)^4 = 2^{7\times4}$

و منه $(n+1)^4 = \left(2^7\right)^4$ و منه $n+1 = 2^7$ و بالتالي $n = 127$.

10

ليكن a عدد حقيقي و من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$u_n = 1 + \cos a + \cos 2a + ... + \cos na$$
$$v_n = \sin a + \sin 2a + ... + \sin na$$

أ) إثبات أن $u_n + iv_n = e^{in\frac{a}{2}} \cdot \dfrac{e^{i(n+1)\frac{a}{2}} - e^{-i(n+1)\frac{a}{2}}}{e^{i\frac{a}{2}} - e^{-i\frac{a}{2}}}$:

لدينا : $u_n+iv_n=1+q+q^2+.....q^n$ مع $q=e^{ia}$ لأن $\cos ka+i\sin ka=\left(e^{ia}\right)^k$

و منه $$u_n+iv_n=\frac{1-e^{i(n+1)a}}{1-e^{ia}}$$

$$u_n+iv_n=\frac{e^{i(n+1)\frac{a}{2}}\left[e^{-i(n+1)\frac{a}{2}}-e^{i(n+1)\frac{a}{2}}\right]}{e^{i\frac{a}{2}}\left[e^{-i\frac{a}{2}}-e^{i\frac{a}{2}}\right]}$$

$$u_n+iv_n=e^{in\frac{a}{2}}\cdot\frac{e^{i(n+1)\frac{a}{2}}-e^{-i(n+1)\frac{a}{2}}}{e^{i\frac{a}{2}}-e^{-i\frac{a}{2}}}$$

ب) استنتج عبارتي u_n وَ v_n بدلالة n .

باستعمال نظرية أولر نجد : $$u_n+iv_n=\left(\cos\frac{na}{2}+i\sin\frac{na}{2}\right)\left(\frac{2i\sin(n+1)\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)$$

من أجل $a\not\equiv 0[2\pi]$: $$\left\{\begin{aligned} u_n&=\frac{\cos\left(n\frac{a}{2}\right)\cdot\sin\left[(n+1)\frac{a}{2}\right]}{\sin\frac{a}{2}}\\ v_n&=\frac{\sin\left(n\frac{a}{2}\right)\cdot\sin\left[(n+1)\frac{a}{2}\right]}{\sin\frac{a}{2}}\end{aligned}\right.$$

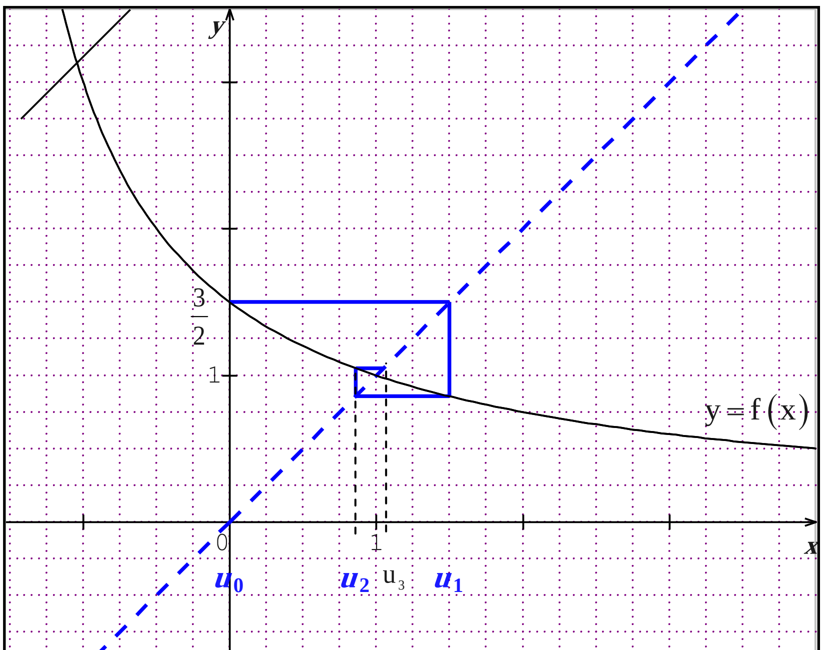
ملاحظة : إذا كان $a=0$ فإن ، $u_n=1+1+.....+1=n+1$ وَ $v_n=0+0+.....+0=0$

11

أ) تعيين الدالة f :

لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f معرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{3}{x+2}$.

ب) تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 على محور الفواصل :



جـ) هل الدالة f متزايدة أو متناقصة :

حسب الرسم فإن المتتالية تبدو ليست متزايدة و ليست متناقصة فهي محدودة بين 0 وَ $\frac{3}{2}$.

لدينا : $u_0 = 0$ ، $u_1 = \frac{3}{2}$ ، $u_2 = \frac{6}{7}$ فالمتتالية ليست رتيبة .

لنبرهن بالتراجع صحة $P(n)$ ، $0 \le u_n \le \frac{3}{2}$

و لدينا : $u_0 = 0$ و منه الخاصية $P(0)$ صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي فإن $0 \le u_n \le \frac{3}{2}$.

إذا كانت $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي فإن $0 \le u_n \le \frac{3}{2}$ وَ $\frac{6}{7} \le \frac{3}{u_{n+2}} \le \frac{3}{2}$.

فالمتتالية متناقصة على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ و منه $0 \le u_{n+1} \le \frac{3}{2}$ و منه الخاصية $P(n+1)$ صحيحة .

و عليه : المتتالية (u_n) محدودة .

12

أ) إثبات أن $\frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$:

(u_n) هي مجموع n حداً محصوراً بين $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ وَ $\frac{1}{n+1}$.

نكتب : $n\left(\frac{1}{n+1}\right) \le u_n \le n\left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)$ و منه $\frac{n}{n+1} \le u_n \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$

ب) استنتاج أن (u_n) متقاربة و تعيين نهايتها :

حسب السؤال (1) لدينا : $w_n \le u_n \le v_n$ مع $v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$ وَ $w_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

بما أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ وَ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ فإن (u_n) محصورة بين متتاليتين متقاربتين نحو 1 و منه نستنتج أن (u_n) متقاربة و نهايتها هي 1 .

13

أ) إثبات أن $v_{n+1}=\dfrac{-v_n}{2+u_n}$:

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\dfrac{3}{u_n+2}-1$ و منه $v_{n+1}=\dfrac{1-u_n}{u_n+2}=\dfrac{-v_n}{2+u_n}$

ب) استنتاج أن $|v_{n+1}|\le\dfrac{1}{2}|v_n|$:

بما أن $u_n\ge 0$ فإن $2+u_n\ge 2$ وَ $\dfrac{1}{2+u_n}\le\dfrac{1}{2}$

و بما أن $|v_n|\ge 0$ وَ $|v_n+1|\le\dfrac{|v_n|}{2+u_n}$ و منه : $|v_{n+1}|\le\dfrac{1}{2}|v_n|$.

جـ) البرهان بالتراجع أن $|v_n|\le\dfrac{1}{2^n}$:

لتكن $P(n)$ المتراجحة $|v_n|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

لدينا : $\dfrac{1}{2^0}=1$ و منه $|v_0|=1$ و منه الخاصية $P(0)$ صحيحة .

إذا كانت $P(n)$ صحيحة إذن $|v_n|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)n$ وَ $\dfrac{1}{2}|v_n|\le\dfrac{1}{2^{n+1}}$ و منه $v_{n+1}\le\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

إذن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة .

14

أ) حساب u_2 ، u_3 ، u_4 :

$u_1=1000$ ، $u_2=u_1+100=1100$ ، $u_4=u_2+100=1200$

ب) كتابة u_{n+1} بدلالة u_n :

لدينا : $u_{n+1}=u_n+100$

و منه نستنتج أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r=100$ و حدها الأول $u_1=1000$.

جـ) إعطاء عبارة u_n بدلالة u_1 وً n :

لدينا : $u_n=u_1+(n-1)r=1000+100(n-1)$

و منه : $u_n=100n-900$

د) حساب المبلغ اللازم للتنقيب عن عمق $20m$:

المبلغ اللازم للتنقيب عن عمق $20m$ هو u_{20} و منه : $u_{20}=100(20)-900=2900DA$

هـ) التّعبير عن C_n مبلغ التنقيب عن n متراً بدلالة n :

$$C_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$
$$= \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$
$$= \frac{n}{2}(1000 + 100n + 900)$$
$$= \frac{n}{2}(1900 + 100n)$$
$$= 950n + 50n^2$$

و) إيجاد العمق الذي نصل إليه من أجل المبلغ $500000\,DA$:

لدينا : $C_n \leq 500000$ تكافئ $50n^2 + 950n - 500000 \leq 0$ أي $n^2 + 19n - 10000 \leq 0$

و منه $n_1 = -110$ و $n_2 = 90,95$

$C_n \leq 500000$ يكافئ $n \in [n_1 , n_2]$ و بما ان $n \geq 0$ فإن $n \in [0 , n_2]$.

و عليه : أكبر عمق نصل إليه بالمبلغ المخصص هو $n = 90m$.

15

أ) حساب r_1 ، r_2 ، r_3 ، و كتابة r_{n+1} بدلالة r_n :

لتكن C_n ربع الدوائر ذات نصف القطر r_n .

- C_1 ربع دائرة مركزها A و نصف قطرها r_1 .
- C_2 ربع دائرة مركزها B و نصف قطرها r_2 .
- C_3 ربع دائرة مركزها C و نصف قطرها r_3 .
- C_4 ربع دائرة مركزها D و نصف قطرها r_4 .

نرمز بـ L_n لطول الحلزون المحصل عليه انطلاقاً من n ربع دائرة C_1 ، C_2 ، C_3 ، ..... ، C_n.

فينتج لدينا : $r_1 = 1$ ، $r_2 = r_1 + 1 = 2$ ، $r_3 = r_2 + 1 = 3$ ، ..... ، $r_{n+1} = r_n + 1$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

و منه نستنتج أن المتتالية (r_n) حسابية أساسها 1 و حدها الأول $r_1 = 1$.

ب) التّعبير عن r_n بدلالة n :

لدينا : $r_n = r_1 + (n-1) \times 1 = n$

- حساب u_n طول ربع الدائرة C_n :

طول الحلزون هو : $L_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

حيث u_n يمثل طول ربع الدائرة C_n .

لكن : $u_n = \frac{rn\pi}{2} = \frac{n\pi}{2}$

جـ) حساب L_n طول الحلزون بدلالة n :

مما سبق لدينا : $L_n = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} + ... + \frac{n\pi}{2}$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{\pi}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)\pi}{4}$$

16

أ) حساب C_1 ، C_2 ، C_3 :

لدينا : $C_1 = C_0 + C_0 \times \dfrac{0,4}{100} + 500 = 10540$ ، $C_2 = 11082,16$ ، $C_1 = 11626,49$.

ب) تعليل أن $C_{n+1} = 1,004C_n + 500$:

لدينا : $C_{n+1} = C_n + \dfrac{0,4}{100}C_n + 500 = (1+0,004)C_n + 500$

و منه : $C_{n+1} = 1,004C_n + 500$

جـ) إثبات أنه توجد متتالية وحيدة ثابتة (u_n) بحيث من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $u_{n+1} = 1,004C_n + 500$:

لتكن $C_n = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{N}$ و منه : $\alpha = 1,004\alpha + 500$ أي $\alpha = \dfrac{-500}{0,004} = -125000$

د) 1) التعبير عن v_n ثم C_n بدلالة n :

- نثبت أن المتتالية (v_n) هندسية .

لدينا : $v_n = C_n + 125000$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= C_{n+1} + 125000 \\ &= 1,004C_n + 500 + 125000 \\ &= 1,004C_n + 125500 \end{aligned}$$

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 1,004$ و حدها الأول $v_0 = C_0 - u_0 = 10000 + 125000$

و منه : $v_0 = 135000$.

و منه عبارة الحد العام تكون كما يلي : $v_n = v_0 \times (1,004)^n = 135000(1,004)^n$

لكن : $v_n = C_n - u_n$ تكافئ $C_n = v_n + u_n$.

2) إيجاد رصيد الزبون بعد 5 سنوات (60 شهراً) من التوفير :

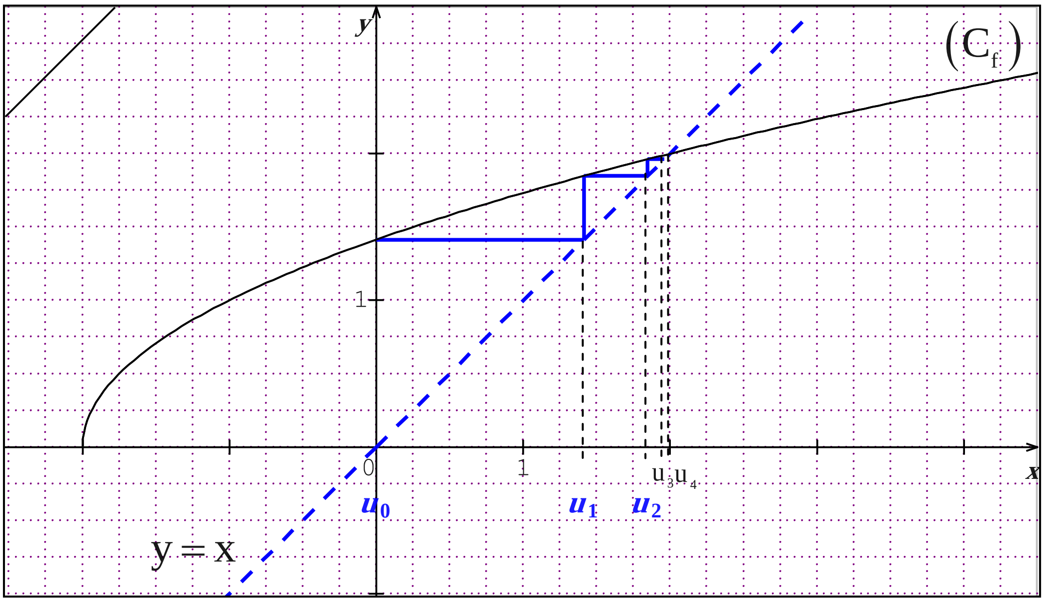
لدينا : $C_{60} = 135000(1,004)^{60} - 125000 = 46536,5DA$

17

أ) تعيين الدالة f بحيث من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $u_{n+1} = f(u_n)$:

لدينا : $f(x) = \sqrt{x+2}$

- إنشاء المنحنى (C) :



ب) تمثيل u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 : (أنظر الشكل السابق)

جـ) المتتالية (u_n) متزايدة .

د) يبدو أن المتتالية (u_n) محدودة بـ 0 وَ 2 .

هـ) هل (u_n) متقاربة مع التعليل :

لتكن الخاصية $P(n)$ حيث : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ و نبرهنها بالتراجع .

- من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \leq 0 \leq \sqrt{2} \leq 2$ و هي محققة .

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة أي : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

- و نبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$.

بما أن f متزايدة تماماً على المجال $[0;2]$ فإن $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(2)$

أي أن $0 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

و بالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن (u_n) متزايدة و محدودة بالعددين 0 وَ 2 .

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة فهي متقاربة .

و) تعليل المساواة $\ell = \sqrt{\ell + 2}$ و استنتاج قيمة ℓ :

نضع $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$ و نقبل أن $\ell = \sqrt{\ell + 2}$ و نعيّن قيمة ℓ .

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = \ell$ وَ $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1}) = \ell$

و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0, +\infty[$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{u_n + 2} = \sqrt{\ell + 2}$.

و بما أن $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ فإن $\ell = \sqrt{\ell + 2}$ تكافئ $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ بحل المعادلة نجد أن : $\ell = -1$ أو $\ell = 2$.

بما أن $\ell \geq 0$ لأن $u_n \geq 0$ فإن $\ell = 2$