التمرين 1

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

① بين أن (u_n) متتالية هندسية، أساسها وحدها الاول.

② أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. ماذا تستنتج ؟

③ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

❷ نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = ln(u_n)$

① عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج نوعها .

② أحسب بدلالة n العدد P_n حيث :

$P_n = ln(u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n)$

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث : $P_n + 4n > 0$

التمرين 2

لتكن (u_n) متتالية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$ و $v_n = u_n + 4$

① بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحده الاول .

② أكتب كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n

③ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$

④ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

⑤ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$w_n = 5\left(\frac{1}{v_n + 5} - 1\right)$

✍ بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

✍ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - w_n)$ ومذا تستنتج ؟

التمرين 3

❶ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

① برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

② برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة

③ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة

❷ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

① برهن ان المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول .

②اكتب عبارة الحد العام للمتتالية(v_n) .

③ استنتج أن $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ من اجل n من $\mathbb{N}$

④ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 4

❶ (U_n) متتاليّة عدديّة معرّفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + \frac{1}{2}U_n^2} \end{cases}$$

① برهن بالتّراجع أنّ : $U_n > \sqrt{10}$

② بيّن أنّ المتتاليّة (U_n)متناقصة تماما ؛ ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

③ (V_n) متتاليّة معرّفة كما يلي : $V_n = \beta - U_n^2$ حيث βعدد حقيقي .

◄ عيّن قيمة β حتى تكون (V_n)هندسيّة أساسها $\frac{1}{2}$

④ نضع: $\beta = 10$

أ) أكتب (U_n)بدلالة n؛ ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

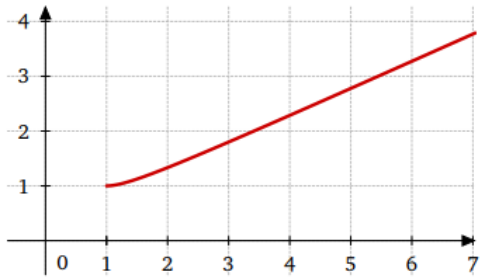
ب) أحسب بدلالة nالمجموع S_nحيث :

$S_n = U_0^2 + U_1^2 + \ldots\ldots + U_n^2$

التمرين 5

fالدّالّة المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة :

$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$كما في الشّكل أدناه



❶ بيّن أنّ f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

❷ لتكن المتتاليّة العدديّة (U_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$U_0 = 6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي: $U_{n+1} = f(U_n)$

أ) أنقل المنحنى المقابل ؛ ثمّ مثّل الحدود الأربعة الأولى للمتتاليّة (Un) على حامل محور الفواصل (دون حسابها) موضحا خطوط الإنشاء

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) وتقاربها

ح) برهن بالتراجع أن: $1 \leq U_n \leq 6$ من أجل كل عدد طبيعي n

د) أدرس إتجاه تغير (U_n)

هـ) برر تقارب المتتالية (U_n)

❸ نعتبر المتتاليتين (V_n) و (W_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$ و $W_n \ln V_n$.

أ) برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها 2. يطلب تعيين حدها الأول.

ب) أكتب V_n بدلالة n ثم W_n بدلالة n

ج) بين أن $U_n = \dfrac{1}{1-(\frac{5}{6})^{2^n}}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n$

❹ أحسب بدلالة n المجموع التالي:

$$S_n = \frac{1}{W_0} + \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \ldots + \frac{1}{W_n}$$

التمرين 6

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

❶ الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{4x+1}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني

① عين إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;\infty[$

② أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقسم (D) ذي المعادلة $y = x$

③ مثل (C_f) و (D) على المجال $[0;6]$

❷ نعتبر المتتاليتين (U_n) و (V_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} V_0 = 5 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$$

① أ) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود $V_3; V_2; V_1; V_0; U_3; U_2; U_1; U_0$ دون حسابها

ب) خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين (U_n) و (V_n)

② أ) أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي أن : $2 \leq U_n < \alpha$ و $\alpha < V_n \leq 5$ حيث $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

ب) استنتج تغير كل من المتتاليتين (U_n) و (V_n)

③ أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي أن:

$V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{3}(V_n - U_n)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي

$0 < (V_n - U_n) \leq (\frac{1}{3})^{n-1}$

ج) استنتج ان $\lim\limits_{n\to+\infty}(V_n - U_n)$ ثم حدد نهاية كل من (U_n) و (V_n)

التمرين 7

❶ f دالة معرفة على المجال $]1,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x}{lnx}$$

① عين نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

② ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

③ أرسم المنحنى (C) الممثل للدالة f

❷ لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

① أرسم المستقيم الذي معادلته $y = x$ والنقط M_1 و M_2 من المنحنى (C) التي فواصلها على الترتيب u_1 و u_2 علما ان M_0 فاصلتها u_0

② برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n \geq e$

③ برهن ان المتتالية (u_n) متناقصة

④ بين أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها

التمرين 8

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بالشكل التالي

$u_0 = 3$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ و

$v_0 = 4$ ، $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$

❶ أحسب u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2

❷ لتكن (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = v_n - u_n$

① برهن ان المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

② اكتب عبارة (w_n) بدلالة n ، ثم عين نهاية المتتالية (w_n)

③ أدرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n)

④ برهن ان المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ماذا تستنتج ؟

❸ نفرض المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل :

$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$

① برهن ان المتتالية (t_n) ثابتة

② استنتج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n)

التمرين 9

(v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 4 - \frac{1}{v_n - 2} \end{cases}$$

① أحسب v_1 ; v_2

② برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$

③ ثم حدد اتجاه تغير المتتالية (v_n) ، ماذا تستنتج؟

④ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \frac{3}{3 - v_n}$

✍ بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

✍ أكتب u_n بدلالة n، ثم إستنتج v_n بدلالة n ، ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n)$

⑤ أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث:

$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + ... + u_n v_n$

التمرين 10

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

❶ الدالة المعرفة على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

و (C_f) تمثيلها البياني

① عين إتجاه تغير الدالة f على المجال $]\frac{1}{2}; +\infty[$

② أدرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقسم (D) ذي المعادلة $y = x$

③ مثل (C_f) و (D)

❷ نعتبر المتتالية (U_n) و المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

① مثل الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3$ على حامل محور الفواصل مبينا خطوط الإنشاء

② برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

③ بين أن (u_n) متناقصة تماما، ماذا تستنتج ؟

❸ أ)أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا

$u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$u_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$ ثم إستنتج نهاية المتتالية (u_n).

❹ لتكن (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

أ) بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم أكتب v_n بدلالة n

ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + ... + \frac{v_n - 1}{u_n}$