الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية تمنراست – ثانوية الشيخ أمود　　　　السنة الدراسية 2019/2018

المستوى : الثالثة رياضيات + التقني رياضي　　　　المدة : ثلاث ساعات

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين ألأول (4 نقاط) :

I- لتكن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة التراجعية التالية $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$

احسب الحدود $u_1 ; u_2 ; u_3$

II- نعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان كمايلي $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$ و $w_n = \ln(v_n)$

1- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0

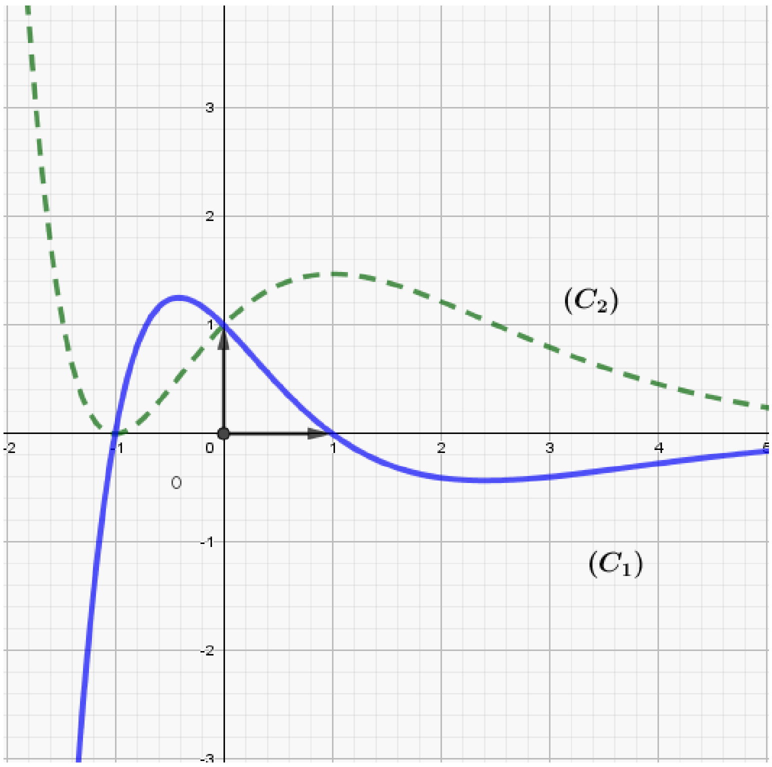
2- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3- بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعين أساسها و حدها الأول ثم أكتب عبارة حدها العام .

4- أحسب المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$ و $S_n' = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ ثم استنتج الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$

التمرين الثاني (06 نقاط) :

I- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) و تمثيل دالتها المشتقة f' المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$



1) أرفق كل من الدالتين f و f' بتمثيلها البياني .

2) عين من البيان النهايات التالية $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

3) أكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

II- اذا علمت أن عبارة الدالة f هي من الشكل

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

1) عين الأعداد الحقيقة $a ; b ; c$

2) لتكن الدالة g المعرفة بـ $g(x) = e^{-f(x)}$ و (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

أ- أحسب $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا .

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

ج-أرسم (C_g) (نضع $g(1) \approx 0,23$) .

التمرين الثالث (10 نقاط)

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعلاقة التالية $f(x)=-\frac{2x}{x+1}+\ln(x+1)$ و (C_f) تمثيلها بياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أحسب نهايتي الدالة f عند -1 ; $+\infty$
2) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .
3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $3{,}9<\alpha<4$
4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0
5) أنشئ (T) و (C_f)
6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=-x+m$

II- لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $k(x)=e^{-x}.\ln(1+e^{2x})$ و (C_k) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}k(x)=0$
2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $k'(x)=-e^{-x}.f(e^{2x})$
3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $k'(x)=0$
4) ادرس اتجاه تغير الدالة k
5) بين أن $k(\ln(\sqrt{\alpha}))=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$
6) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $k(x)=\frac{2x}{e^x}+\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^x}$ ثم أستنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}k(x)$

بالتوفيق للجميع - الأستاذ : جواليل أحمد –ثانوية الشيخ أمود –تمنراست

التصحيح المفصل لاختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين ألأول (4 نقاط) :

I- لتكن المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة التراجعية التالية $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n \end{cases}$

حساب الحدود $u_1 = 2 \ ; \ u_2 = 5 \ ; \ u_3 = 16$

II- نعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان كمايلي $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$ و $w_n = \ln(v_n)$

1- البرهان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q و حدها الأول v_0 : $v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$ و منه

$v_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$ أي أن $v_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5$ و منه

$v_{n+1} = 2u_n + 4n^2 + 6n + 10$ أي أن $v_{n+1} = 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5)$ يعني أن $v_{n+1} = 2v_n$ و منه $q = 2$ و $v_0 = 6$

2- كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n : $v_n = 6 \times 2^n$

و لدينا $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$ و منه $u_n = 6 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

3- اثبات أن (w_n) متتالية حسابية : لدينا $w_{n+1} = \ln(v_{n+1})$ و منه $w_{n+1} = \ln(2v_n)$ أي أن

$w_{n+1} = \ln(2) + \ln(v_n) = \ln(2) + w_n$ و منه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln(2)$ وحدها الأول $w_0 = \ln(v_0) = \ln(6)$

عبارة حدها العام : $w_n = \ln(6) + n\ln(2)$

4- حساب المجموعين $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$: $S_n = v_0 \left[\dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right]$ أي ان $S_n = 6\left[\dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right] = 6(2^{n+1} - 1)$

و $S_n' = \dfrac{n+1}{2}[w_0 + w_n]$ و منه $S_n' = \dfrac{n+1}{2}[2\ln(6) + n\ln(2)]$

استنتاج الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times .... \times v_n$ يعني أن

$\ln(P_n) = \ln(v_0) + \ln(v_1) + ... + \ln(v_n) = w_0 + w_1 + ... + w_n = S'_n$ و منه $P_n = e^{S'_n}$ إذن $P_n = e^{\frac{n+1}{2}[2\ln(6) + n\ln(2)]}$

التمرين الثاني (06 نقاط) :

I- الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها البياني (C_f) و تمثيل دالتها المشتقة f' المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) أرفق كل من الدالتين f و f' بتمثيلها البياني

(C_f) هو (C_1) و $(C_{f'})$ هو (C_2)

لان المنحنى (C_1) هو لي دالة متزايدة على المجال $[-1;1]$ و (C_2) هو لدالة موجبة على هذا المجال

و (C_1) هو لي دالة متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]; [1; +\infty[$ و (C_2) هو لدالة سالبة على هذين المجالين

2) تعين من البيان النهايات التالية $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

و $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$ هو العدد المشتق عند -1

3) كتابة معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = f'(0)x + f(0)$ اي أن $y = x + 1$

II- اذا علمت أن عبارة الدالة f هي من الشكل $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

1) تعين الأعداد الحقيقية $a \ ; \ b \ ; \ c$: $f(0) = 1$ يكافئ $c = 1$

ولدينا

$f'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}$ أي أن $f'(x)=\left[-ax^2+(2a-b)x+b-c\right]e^{-x}$

$f'(0)=1$ يعني أن $b-c=1$ و منه $b=2$

$f(-1)=0$ يكافئ $(a-b+c)e^{1}=0$ و منه $a-b+1=0$

و $a-b+1=0$ بالتعويض نجد $a=1$ إذن $f(x)=(x^2+2x+1)e^{-x}$

2) لتكن الدالة g المعرفة بـ $g(x)=e^{-f(x)}$ و (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و منه $y=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ(C_g)

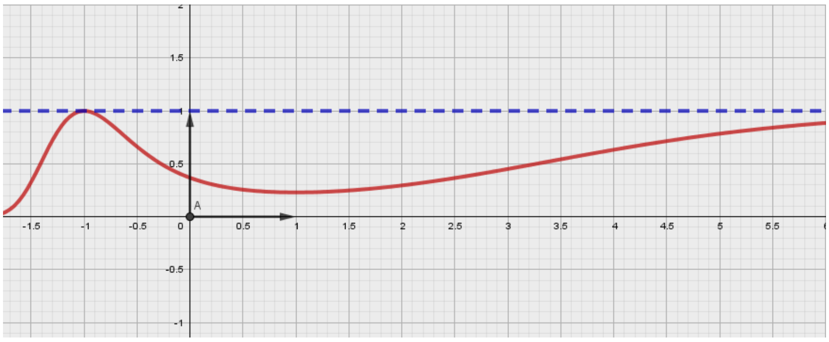
و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و منه $y=0$ معادلة مستقيم مقارب لـ(C_g)

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g : المشتقة : $g'(x)=-f'(x)e^{-f(x)}$ و منه اشارتها من إشارة $-f'(x)$ إذن g متناقصة على المجال $[-1;1]$ و متزايدة على المجالين $]-\infty;-1];[1;+\infty[$.

جدول تغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{4}{e}$	$\nearrow$	1

ج-رسم (C_g) :



التمرين الثالث (10 نقاط)

I- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعلاقة التالية

$$f(x)=-\frac{2x}{x+1}+\ln(x+1)$$

1) حساب نهايتي الدالة f عند -1 ; $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{-2x+(x+1)\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\frac{2}{x+1}=+\infty$ لأن

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}(x+1)\ln(x+1)=0$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$ أي أن $f'(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$ إشارتها من اشارة البسط فهي موجبة على المجال $[1;+\infty[$ و منه الدالة f متزايدة على هذا المجال و سالبة على المجال $]-1;1]$ و منه الدالة f متناقصة على هذا المجال

جدول تغيرات :

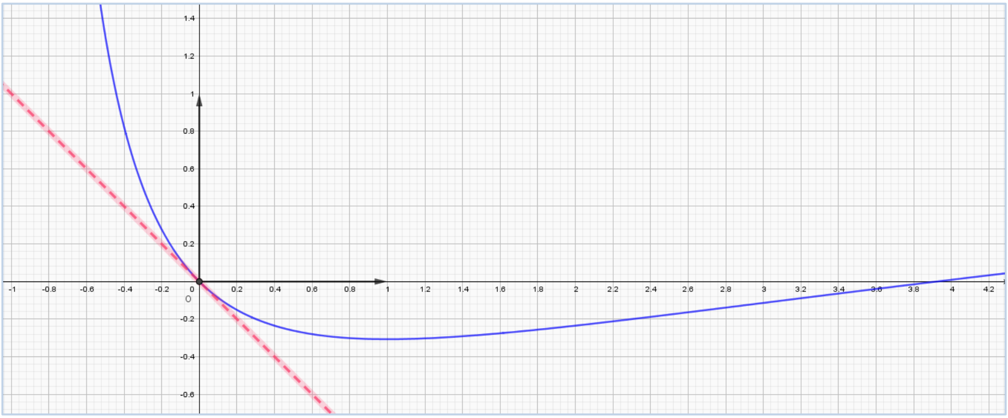
x	-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $3,9<\alpha<4$

لدينا و $f(0)=0$ و $f(4)=0,009$ و $f(3,9)=-0,002$ و الدالة مستمرة و متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ و و الدالة مستمرة و متناقصة على المجال $]-1;1[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين إحداهما معدوم و الأخر α حيث $3,9<\alpha<4$.

4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 : $y=f'(0)x+f(0)$ و منه $(T): y=-x$

5) أنشئ (T) و (C_f)



6) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=-x+m$ حلولها هو ايجاد فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم $(\Delta_m): y=-x+m$

لما $m\in]-\infty;0[$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m=0$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة فاصلتها معدومة و منه للمعادلة حل معدوم .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ ان (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتان فاصلتها مختلفتان في الاشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الاشارة .

II- لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $k(x)=e^{-x}.\ln(1+e^{2x})$ و (C_k) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1) تبين أن $\lim_{x\to-\infty}k(x)=0$ لدينا $\lim_{x\to-\infty}k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^{2x})}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}e^x\left[\frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}\right]=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ و

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}\right]=1$$

بوضع $t=e^{2x}$ و منه $\lim_{x\to-\infty}t=0$ نجد $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(1+e^{2x})}{e^{2x}}\right]=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t}=1$

2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $k'(x)=-e^{-x}.f(e^{2x})$:

لدينا $k'(x)=-e^{-x}.\ln(1+e^{2x})+e^{-x}.\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ و منه $k'(x)=-e^{-x}.\left[\ln(1+e^{2x})-.\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]$ أي أن

$$k'(x)=-e^{-x}.f(e^{2x})$$

3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $k'(x)=0$: $k'(x)=0$ يكافئ $f(e^{2x})=0$ يكافئ $e^{2x}=1$ يكافئ $x=0$ للمعادلة حل وحيد هو 0

4) دراسة اتجاه تغير الدالة k : $k'(x)=-e^{-x}.f(e^{2x})$ اشارتها من اشارة $-f(e^{2x})$

$f\left(e^{2x}\right)$ – هي موجبة لما $0 \le e^{2x}. \le \alpha$ يكافئ $2x \le \ln(\alpha)$ يكافئ $x \le \dfrac{\ln(\alpha)}{2}$ و منه الدالة k متزايدة على المجال $\left]-\infty; \dfrac{\ln(\alpha)}{2}\right]$ و متناقصة على المجال $\left[\dfrac{\ln(\alpha)}{2}; +\infty\right[$.

5) تبين أن $k\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$ لدينا: $k\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)=e^{-\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)}.\ln\left(1+e^{2\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)}\right)$ أي أن $k\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)=e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)}.\ln\left(1+e^{\ln(\alpha)}\right)$ أي أن $k\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}.\ln(1+\alpha)$

و $f(\alpha)=0$ أي ان $-\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}+\ln(\alpha+1)=0$ يكافئ $\ln(1+\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}$

و منه $k\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}\right]$ يكافئ أن $k\left(\ln\left(\sqrt{\alpha}\right)\right)=\left[\dfrac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}\right]$ و هو المطلوب .

6) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $k(x)=\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}$:

$k(x)=e^{-x}.\ln\left(1+e^{2x}\right)$ يكافئ $k(x)=\dfrac{\ln\left(1+e^{2x}\right)}{e^x}$ أي أن $k(x)=\dfrac{\ln\left[e^{2x}\left(e^{-2x}+1\right)\right]}{e^x}$ و منه

$k(x)==\dfrac{\ln\left(e^{2x}\right)+\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}$ أي ان $k(x)==\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}$ و هو المطلوب .

أستنتاج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x}{e^x}+\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}\right]=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x}{e^x}\right]=0$ بالتزايد المقارن و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\ln\left(1+e^{-2x}\right)}{e^x}\right]=0$

انتهى الموضوع - بالتوفيق للجميع