الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الجلفة

ثانوية عبد المؤمن بن علي بالإدرسية — اختبار الثلاثي الأول — التاريخ: 01 ديسمبر 2019

الشعبة: ثالثة علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 02 سا

التمرين الأول : (10ن)

I) لتكن العبارة $A(x)$ ذات المتغير الحقيقي الموجب تماما x بحيث : $A(x)=(\ln x)^3+\ln x-2$

1) بين أنه من كل عدد الحقيقي اوجب تماما x فإن : $A(x)=(\ln(x)-1)\left((\ln x)^2-+\ln(x)+2\right)$

2) حل في $\mathbb{R}_+^*$ المعادلة التالية: $A(x)=0$ واستنتج إشارة العبارة $A(x)$.

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\ln x+\dfrac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=-\infty$ وأنّ $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا .

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{A(x)}{x(\ln x)^3}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.26<\alpha<0.27$.

4) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة اللوغاريتم النيبيري $x\mapsto \ln x$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. ماذا يمثل المنحني (C) بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ب) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المنحني (C) على المجال $]1;+\infty[$.

5) أنشئ المنحنى (C_f).

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة التالية: $f(x)=|m|$

سؤال إضافي: يمكنك عدم الاجابة عليه

7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بما يلي : $g(x)=f(-x)$

اشرح كيفية الحصول على المنحني (C_g) انطلاقا من المنحني (C_f).و استنتج إشارة $f(-x)$

التمرين الثاني :

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $g(x)=1+x+e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α من المجال $]-1.3;-1.2[$.

3) حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (C) المنحنى البياني لها .

1) أ) أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

ب) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

2) بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y=x$. ثم ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (C) و (Δ) (تؤخذ $3cm$ كوحدة و $f(\alpha)=-0.3$).

II) H نقطة فاصلتها x (حيث $x > 0$) وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (C) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N، نضع $h(x) = MN$

1) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما فإن : $h(x) = \dfrac{x}{1+e^x}$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $h'(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \cdot g(-x)$.

3) استنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x = -\alpha$.

4) برهن أن $f(-\alpha) = 1$.

5) بين أن مماس المنحنى (C) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) .اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

سؤال إضافي:

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x + m + x = 0$.

التصحيح النموذجي للاختبار الأول في مادة الرياضيات

السنة الدراسية : 2020/2019

المستوى: ثالثة علوم

المراحل	العلامة

التمرين الأول :

لدينا : $A(x)=(\ln x)^3+\ln x-2$

1) اثبات أن : $A(x)=(\ln x-1)((\ln x)^2+\ln x+2)$

$(\ln x-1)((\ln x)^2+\ln x+2)$

$=(\ln x)^3+\cancel{(\ln x)^2}+2\ln x-\cancel{(\ln x)^2}+\ln x-2$

$=(\ln x)^3+\ln x-2=A(x)$

وهو المطلوب :

2) حل المعادلة في $\mathbb{R}_+^*$:

$A(x)=0$

تعني أن $(\ln x-1)=0$

أو $(\ln x)^2+\ln x+2=0 \ldots (1)$

$\ln x=1$

تكافئ $\boxed{x=e}$

نضع $z=\ln x$

(1) تكافئ $z^2+z+2=0$

حساب المميز $\Delta=(1)^2-4(2)(1)=-7<0$

المعادلة لا تقبل حلول .

ومنه حلول المعادلة $A(x)=0$ هي $x=e$

اشارة $A(x)$:

لدينا $(\ln x)^2+\ln x+2>0$ لأن $\Delta<0$

فاشارة $A(x)$ من اشارة $\ln x-1$

وعليه $\ln x-1<0$ لما $x<e$.

x	0		e		$+\infty$
$\ln x-1$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\ln x+\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$

1) اثبات أن $\lim_{x\to0^>} f(x)=-\infty$

0.10

$\lim_{x\to0^>} \ln x+\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}=\lim_{x\to0^>}\left(\ln x+\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}\right)$

$\lim_{x\to0^>} f(x)=-\infty$

اثبات أن : $\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to1^<} f(x)=\lim_{x\to1} \ln x+\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}=+\infty$

$\lim_{x\to1^>} f(x)=\lim_{x\to1^>} \ln x+\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}=+\infty$

حساب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \ln x+\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$

$=\lim_{x\to+\infty} \ln x+\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) أ) اثبات أن : $f'(x)=\frac{A(x)}{x(\ln x)^3}$

f دالة قابلة للاشتقاق على D_f ومن أجل كل x من D_f لدينا :

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{-\frac{1}{x}(\ln x)^2-2(\frac{1}{x})\ln x(1-\ln x)}{(\ln x)^4}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(\ln x)^4-\frac{1}{x}(\ln x)^2-\frac{2}{x}\ln x+\frac{2}{x}(\ln x)^2}{(\ln x)^4}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\ln x\left[(\ln x)^3+\ln x-2\right]}{(\ln x)^4}$

$f'(x)=\frac{A(x)}{x(\ln x)^3}$

ب) بما أن $x>0$ فان اشارة $f'(x)$ من اشارة $A(x)\times(\ln x)^3$

جدول اشارة $f'(x)$:

	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$		$+$		$+$	
$(\ln x)^3$		$-$		$+$		$+$	
$A(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	

العلامة	المراحل	العلامة	المراحل

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]0,1[$ و $[e,+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]1,e]$

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e)=\ln e+\frac{1-\ln e}{(\ln e)^2}=1$$

3) إثبات أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α

لدينا: $f(0,26)=-0,05$

$f(0,27)=0,04$

الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0,1[$ فهي مستمرة ورتيبة على المجال $]0,26;0,27[$ و $f(0,26)\times f(0,27)<0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,26<\alpha<0,27$.

4) أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\ln x=\lim_{x\to+\infty}\ln x+\frac{1-\ln x}{(\ln x)^2}-\ln x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{1}{\ln x}=0$$

ومنه المنحنى (C_{ln}) منحنى مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_{ln}) بالنسبة الى (C_f):

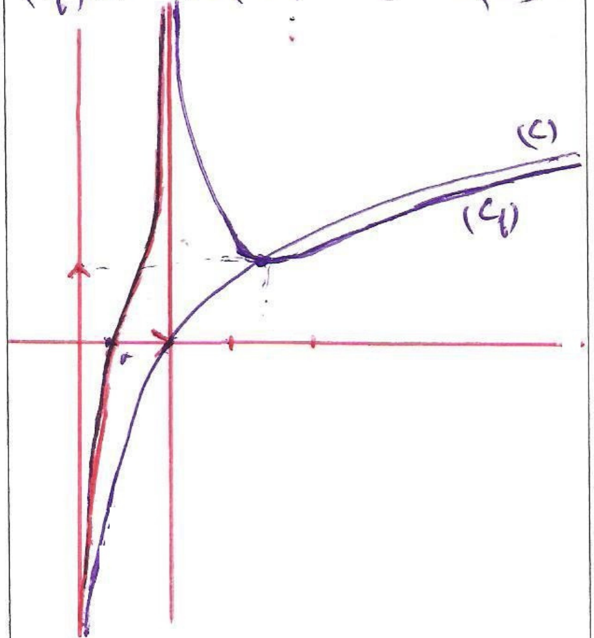
دراسة اشارة $f(x)-\ln$

لدينا: $f(x)-\ln x=\dfrac{1-\ln x}{(\ln x)^2}$

بما أن $(\ln x)^2$ فإشارة $f(x)-\ln x$ من اشارة $1-\ln x$ وعليه

x	1		e		$+\infty$
$f(x)-y$	||	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (C)	||	(C_f) فوق المنحنى (C)	(C_f) يقطع (C)	(C_f) تحت المنحنى (C)	

الرسم: لدينا: $(C_f)\cap(xx')=(\alpha,0)$



المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x)=|m|$ هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=|m|$

لما $m\in]-\infty,-1[$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m=-1$ المعادلة تقبل حل مضاعف هو e وحل آخر.

لما $m\in]-1,1[$ المعادلة تقبل حل وحيد.

لما $m=1$ المعادلة تقبل e كحل مضاعف وحل آخر

لما $m>1$ فإن المعادلة تقبل ثلاث حلول.

المراحل	العلامة	المراحل	العلامة

السؤال الاضافي : لدينا $g(x)=f(-x)$

المنحنى (C_g) هو نظير المنحنى (C_f) بالنسبة الى حامل محور التراتيب.

لدينا : من خلال التمثيل البياني (C_f) :

لما $f(-x)<0$ لما $-x\in]0,\alpha[$ أي أن

$x\in]-\alpha,0[$

لما $f(-x)\geq 0$ لما $-x\in[\alpha,1[\cup]1,+\infty[$

أي أن $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,-\alpha]$

جدول اشارة $f'(-x)$

x	$-\infty$		-1		$-\alpha$		0
$f(-x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$

10

التمرين الثاني :

1) دراسة تغيرات الدالة g : لدينا $g(x)=1+x+e^x$

أ) حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+x+e^x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} (1+x+e^x)=+\infty$$

حساب المشتقة الدالة قابلة للاشتقاق ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن :

$g'(x)=1+e^x>0$

الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) اثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد :

لدينا :

$g(-1,3)=-0,03$

$g(-1,2)=0,1$

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,3;-1,2[$

و $f(-1,3)\times f(-1,2)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1,3<\alpha<-1,2$

اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

اشارة $g(-x)$:

لما $-x\in]-\infty,\alpha[$ فإن $g(-x)<0$

يعني أن $x\in]-\alpha,+\infty[$

لما $-x\in[\alpha,+\infty[$ فإن $g(-x)\geq 0$

يعني أن $x\in]-\infty,-\alpha]$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$g(-x)$		$+$	0	$-$	

مع $1,2<-\alpha<1,3$

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$

حساب $f'(x)$: f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(1+e^x)-(e^x)(xe^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x+e^{2x}+xe^x+\cancel{xe^{2x}}-\cancel{xe^{2x}}}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(g(x))}{(1+e^x)^2}$$

حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}=+\infty$$

اشارة $f'(x)$: بما أن $e^x>0$ و $(1+e^x)^2>0$

فإن اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

أي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha,+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,\alpha[$

جدول التغيرات :

المراحل	العلامة	المراحل	العلامة

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) اثبات أن (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f):

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y =$

$$f(x)-y = \frac{xe^x}{1+e^x} - x = \frac{xe^x-x-e^x}{1+e^x}$$

$$f(x)-y = \frac{-x}{1+e^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{1+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(-1)}{e^x(1+1/e^x)} = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

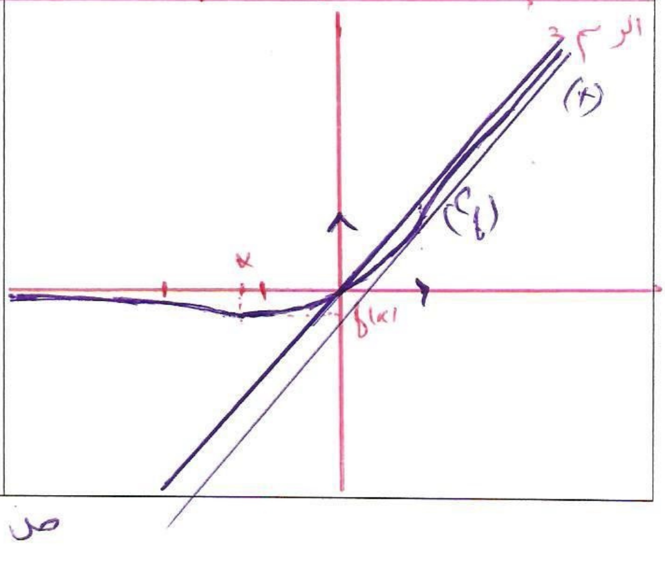
دراسة الوضع النسبي:

لدينا: $f(x)-y = \frac{-x}{1+e^x}$

اشارة $f(x)-y$ من اشارة $-x$ لأن $1+e^x>0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

الرسم 3)



لدينا N نقطة من (Δ) يعني أن $N(x,x)$

H نقطة فاصلتها x

M و N و H نقاط لها نفس الفاصلة لأن تنتمي الى مستقيم موازي لمحور (yy')

النقطة M فاصلتها x وترتيبها $\frac{xe^x}{1+e^x}$

1) اثبات أن $h(x)=MN=\frac{x}{1+e^x}$

$$MN = \sqrt{(x_N-x_M)^2+(y_N-y_M)^2}$$

$$MN = \sqrt{(x-x)^2+\left(x-\frac{xe^x}{1+e^x}\right)^2}$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{x+xe^x-xe^x}{1+e^x}\right)^2}$$

$$MN = \left|\frac{x}{1+e^x}\right| = \frac{|x|}{1+e^x}$$

وبما أن $x>0$ فإن

$$MN = \frac{x}{1+e^x}$$

وعليه $h(x) = \frac{x}{1+e^x}$

اثبات أن $h'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}(g(-x))$

h دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = \frac{(1+e^x)-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{1+e^x-xe^x}{(1+e^x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x(1-x+e^{-x})}{(1+e^x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{e^x\,g(-x)}{(1+e^x)^2}$$

استنتاج أكبر قيمة لـ MN:

أكبر قيمة لـ MN هي القيمة الحدية العظمى

لدينا $h'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}(g(-x))$ يعني أن

اشارة $h'(x)$ من اشارة $g(-x)$

العلامة	المراحل

وعليه

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

بما أن $h'(x)$ تنعدم وتغير من إشارة عند $-\alpha$ فإن $h(-\alpha)$ قيمة حدية محلية.

الدالة h متزايدة على المجال $]-\infty,-\alpha]$ ومتناقصة على المجال $[-\alpha,+\infty[$ فإن $h(-\alpha)$ قيمة حدية عظمى من أجل $x=-\alpha$.

إثبات أن: $f(-\alpha)=1$

لدينا: $g(+\alpha)=1+\alpha+e^{+\alpha}=0$

$$e^{\alpha}=-1-\alpha$$

$$f(-\alpha)=\frac{-\alpha e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}=\frac{-\alpha e^{-\alpha}\times e^{\alpha}}{1+e^{-\alpha}\times e^{\alpha}}$$

$$f(-\alpha)=\frac{-\alpha}{e^{\alpha}+1}=\frac{-\alpha}{-1-\alpha+1}=1$$

ومنه $\boxed{f(-\alpha)=1}$

إثبات أن المنحنى (C) مماس عند A موازي لـ (Δ) ولكن (T)

$$(T):\ y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)$$

$f'(-\alpha)=1$ يعني أن $(\Delta)\parallel(T)$

$$f'(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}g(-\alpha)}{(1+e^{-\alpha})^2}$$

لدينا: $e^{\alpha}=-1-\alpha$

تكافئ: $e^{-\alpha}=\frac{-1}{1+\alpha}$

$$e^{-\alpha}g(-\alpha)=\left(\frac{-1}{1+\alpha}\right)\left[1-\alpha+e^{-\alpha}\right]$$

$$=\left[\frac{-1}{1+\alpha}\right]\left[1-\alpha-\frac{1}{1+\alpha}\right]$$

العلامة	المراحل

$$e^{-\alpha}g(-\alpha)=\left(\frac{-1}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1-\alpha^2-1}{1+\alpha}\right)$$

$$=\frac{\alpha^2}{(1+\alpha)^2}=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2$$

$$\left(1+e^{-\alpha}\right)^2=\left(1-\frac{1}{1+\alpha}\right)^2=\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2$$

ومنه $f'(\alpha)=\dfrac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2}=1$

وعليه المنحنى (C) يقبل مماس عند النقطة A فاصلتها $-\alpha$ معادلته

$$(T):\ y=1(x-\alpha)+1$$

$$\boxed{y=x-\alpha+1}$$

المناقشة البيانية:

لدينا: $me^{x}+m+x=0$

$$m(e^{x}+1)=-x$$

$$m=\frac{-x}{e^{x}+1}$$

$$m=\frac{-xe^{-x}}{1+e^{-x}}=f(-x)$$

نضع $k(x)=f(-x)$

التمثيل البياني (C') للدالة k هو نظير منحنى (C) للدالة f بالنسبة إلى محور التراتيب

حلول المعادلة $m=k(x)$ هي فواصل نقاط المنحنى (C') مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$

لما $m\in]-\infty,f(\alpha)[$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجب

لما $m\in]f(\alpha),0[$ المعادلة تقبل حلين موجبين

لما $m>0$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب