إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول

-1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{2x+1}-e^{x}=\frac{2}{e}$.

-2 بين أن الدالة $f: x\mapsto 3^{x}$ حل للمعادلة التفاضلية $y'-y\ln 3=0$.

-3 بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+e^{1+2\ln x}}{x^{2}}=e$.

التمرين الثاني

✍ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=1-\frac{1}{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=1-\sqrt{1-u_n}$

.1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

.2 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية و تقاربها.

✍ (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(1-u_n)$.

.3 بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم احسب حدها الأول.

.4 أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

.5 نضع $P_n=(1-u_0)\times(1-u_1)\times\ldots\ldots\times(1-u_n)$ ، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $P_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-2}$.

التمرين الثالث

.I لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ : $f(x)=\frac{(x-2)e^{x}}{x^{3}}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

.1 أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ثم فسر النتائج هندسيا.

.2 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{0\}$: $f'(x)=\frac{e^{x}(x^{2}-4x+6)}{x^{4}}$.

.3 أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

.4 بين أن $y=\frac{e^{2}}{8}(x-2)$ هي معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

.II لتكن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{e^{x}}{x^{3}}$ ، يعطى جدول تغيراتها كالآتي :

x	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{e^2}{8}$ ↘	$\frac{e^3}{27}$ ↗	$+\infty$

.1 بين أن المعادلة $g(x)=\frac{e^{2}}{8}$ تقبل حل وحيد α في المجال $]3,+\infty[$

ثم تحقق أن $4.2<\alpha<4.3$.

.2 استنتج إشارة $g(x)-\frac{e^{2}}{8}$ في المجال $]0,+\infty[$.

3. استنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) في المجال $]0,+\infty[$.

4. أرسم (Δ) و (C_f) في المجال $]0,+\infty[$.

III. لتكن الدالة h المعرفة على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي : $h(x)=f(\ln x)$ و (C_h) تمثيلها البياني.

1. استنتج نهايات الدالة h عند أطراف مجموعة تعريفها.

2. استنتج اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

بالتوفيق للجميع

تصحيح اختبار الفصل الأول ثالثة تقني رياضي 2019-2020

التمرين الأول

-1 $e^{2x+1}-e^{x}=\frac{2}{e}$ أي $e\times e^{2x+1}-e\times e^{x}=e\times\frac{2}{e}$ أي $e^{2x+1+1}-e^{x+1}-2=0$ أي $e^{2(x+1)}-e^{x+1}-2=0$

$\left(e^{x+1}\right)^2-e^{x+1}-2=0\cdots\cdots(1)$ نضع $e^{x+1}=X$ ومنه المعادلة (1) تصبح $X^2-X-2=0$ نحسب المميز

$\Delta=9>0$ المعادلة تقبل حلين $X_1=-1$ أو $X_2=2$ ومنه $e^{x+1}=-1$ (لا تقبل حل) أو $e^{x+1}=2$ أي

$x=-1+ln\,2$ ومنه $S=\{-1+ln\,2\}$.

-2 $\left(3^x\right)'-ln\,3\times3^x=3^x\times ln\,3-ln\,3\times3^x=0$

-3 لدينا : $\frac{x+e^{1+2ln\,x}}{x^2}=\frac{1}{x}+e$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e^{1+2ln\,x}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+e\right)=e$.

التمرين الثاني

.1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$:

نضع $P(n):0<u_n<1$

- من أجل $n=0$: $0<u_0<1$ أي $0<1-\frac{1}{e}<1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.
- نفرض صحة $P(n):0<u_n<1$ و نثبت صحة $P(n+1):0<u_{n+1}<1$.

لدينا $0<u_n<1$ أي $1>1-u_n>0$ أي $-1<-\sqrt{1-u_n}<0$ أي $0<1-\sqrt{1-u_n}<1$ أي $0<u_{n+1}<1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة ، إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$.

.2 تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n^2-u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$ ثم استنتاج اتجاه تغير المتتالية و تقاربها:

$$u_{n+1}-u_n=1-\sqrt{1-u_n}-u_n=\frac{\left((1-u_n)-\sqrt{1-u_n}\right)\left((1-u_n)+\sqrt{1-u_n}\right)}{\left((1-u_n)+\sqrt{1-u_n}\right)}=\frac{(1-u_n)^2-\left(\sqrt{1-u_n}\right)^2}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}=\frac{u_n^2-u_n}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}=\frac{u_n(u_n-1)}{1-u_n+\sqrt{1-u_n}}$$

لدينا $u_n-1<0$ ، $u_n>0$ ، $\left(1-u_n+\sqrt{1-u_n}\right)>0$ ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

- بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 0 فإنها متقاربة.

.3 تبيان أن (v_n) متتالية هندسية:

$$v_{n+1}=ln(1-u_{n+1})=ln\left(1-\left(1-\sqrt{1-u_n}\right)\right)=ln\left(\sqrt{1-u_n}\right)=ln(1-u_n)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}ln(1-u_n)=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول: $v_n=ln(1-u_0)=ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$

.4 كتابة v_n و u_n بدلالة n ثم استنتاج $\lim_{n\to+\infty}u_n$:

- **كتابة v_n بدلالة n :** $v_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- **كتابة** u_n **بدلالة** n : أولا نكتب u_n بدلالة v_n لدينا $v_n=\ln(1-u_n)$ أي $e^{v_n}=1-u_n$ أي

$$u_n=1-e^{v_n}=1-e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- $$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\underbrace{e^{-\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}^{0}}}_{1}\right)=0$$

5. تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2}$:

$$\begin{aligned}P_n&=(1-u_0)\times(1-u_1)\times\dots\dots\times(1-u_n)\\&=\left(1-\left(1-e^{v_0}\right)\right)\times\left(1-\left(1-e^{v_1}\right)\right)\times\dots\dots\times\left(1-\left(1-e^{v_n}\right)\right)\\&=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\dots\dots\times e^{v_n}\\&=e^{v_0+v_1+\cdots\cdots v_n}\end{aligned}$$

$$=e^{-\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}-1}\right]}=e^{-\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}\right]}=e^{\left[\cancel{2}\times\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\right]}=e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2}$$

التمرين الثالث

I.

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)e^x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{e^x}{x^3}}_{+\infty}\times\underbrace{(x-2)}_{+\infty}=+\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)e^x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{xe^x}^{0}-\overbrace{2e^x}^{0}}{\underbrace{x^3}_{-\infty}}=0$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{(x-2)e^x}{x^3}=\lim_{\substack{>\\x\to0}}\frac{\overbrace{(x-2)}^{-2}\overbrace{e^x}^{1}}{\underbrace{x^3}_{0^+}}=-\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{(x-2)e^x}{x^3}=\lim_{\substack{<\\x\to0}}\frac{\overbrace{(x-2)}^{-2}\overbrace{e^x}^{1}}{\underbrace{x^3}_{0^-}}=+\infty$$

- التفسير الهندسي : يقبل المنحى (C_f) مستقيمان مقاربان معادلتهما $x=0$ و $y=0$.

2- تبيان أن : $f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}$:

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+(x-2)e^x\right)x^3-3x^2(x-2)e^x}{\left(x^3\right)^2}=\frac{x^3e^x+x^4e^x-2x^3e^x-3x^3e^x+6x^2e^x}{x^6}=\frac{x^2e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^6}=\frac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا إشارة المشتقة من إشارة $\left(x^2-4x+6\right)$ لأن $\frac{e^x}{x^4}>0$ ، نحسب مميز العبارة $\left(x^2-4x+6\right)$ نجد $\Delta=-8<0$ ومنه لا توجد حلول إذن إشارة $x^2-4x+6>0$ ، ومنه نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما.

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

4- تبيان أن $y=\frac{e^2}{8}(x-2)$ **هي معادلة للمماس** (Δ) : $y=\underbrace{f'(2)}_{\frac{e^2}{8}}(x-2)+\underbrace{f(2)}_{0}=\frac{e^2}{8}(x-2)$

.II

1- تبيان أن المعادلة $g(x)=\frac{e^2}{8}$ **تقبل حل وحيد** α **في المجال** $]3,+\infty[$: من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]3,+\infty[$ و $\frac{e^2}{8}\approx 0.92\in\left]\frac{e^3}{27}\approx 0.74,+\infty\right[$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=\frac{e^2}{8}$ تقبل حل وحيد α.

- **التحقق أن** $4.2<\alpha<4.3$: بما أن $[4.2,4.3]\subset]3,+\infty[$ و $g(4.2)<\frac{e^2}{8}<g(4.3)$ اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=\frac{e^2}{8}$ تقبل حل وحيد $4.2<\alpha<4.3$.

2- استنتاج إشارة $g(x)-\frac{e^2}{8}$:

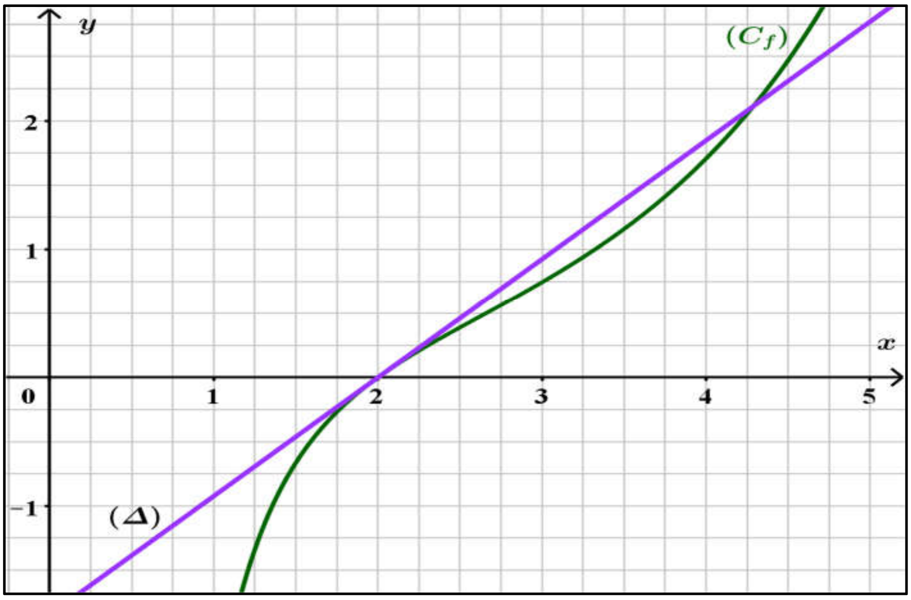
x	0	2	α	$+\infty$
$g(x)-\frac{e^2}{8}$	$+$	$-$	$+$	

3- استنتاج الوضع النسبي بين (C_f) **و** (Δ) : $f(x)-y=\frac{(x-2)e^x}{x^3}-\frac{e^2}{8}(x-2)=\left(g(x)-\frac{e^2}{8}\right)\times(x-2)$

- (C_f) تحت (Δ) في المجال $]0;\alpha[$.
- (C_f) فوق (Δ) في المجال $]\alpha;+\infty[$.
- (C_f) يمس (Δ) في النقطة $A(2,0)$ و يقطعه في النقطة $B(\alpha,f(\alpha))$.

x	0		2		α		$+\infty$
$g(x)-\frac{e^2}{8}$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x-2$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-y$	||	$-$	0	$-$	0	$+$	

4- الرسم:



.III

1- استنتاج نهايات الدالة h :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} h(x) = 0 \quad ، \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \ln(x) = 0^- \\ \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} h(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} \ln(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} h(x) = -\infty \quad ، \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty .$$

2- استنتاج اتجاه تغير الدالة h ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$h'(x) = \frac{1}{x} \times f'(\ln x) = \frac{1}{x} \times \frac{e^{\ln x}\left[(\ln x)^2 - 4(\ln x) + 6\right]}{(\ln x)^4} = \frac{\left[(\ln x)^2 - 4(\ln x) + 6\right]}{(\ln x)^4}$$

ومنه إشارة المشتقة من إشارة $(\ln x)^2 - 4(\ln x) + 6 > 0$ لأننا وجدنا سابقا $x^2 - 4x + 6 > 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما.

- **جدول التغيرات :**

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	‖	$+$
$h(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3- الرسم (إضافي):