مديرية التّربية لولاية عين الدفلى	السنة الدّراسية:2020/2019	ثانوية احمد ملاحي المخاطرية

امتحان الثلاثي الأوّل في مادّة الرياضيات

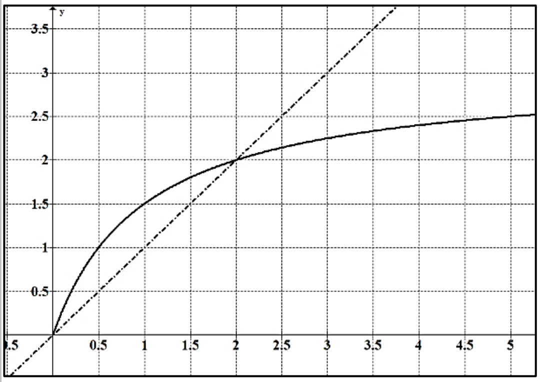
اليوم: الاثنين 02 ديسمبر 2019	المدّة: 3 ساعات	الشعبة: 3 تقني رياضي

التمرين الاوّل:(04 نقاط)

أثبت صحّة مايلي:

1. الدالة $f : x \mapsto (\ln x)^3 + \ln\frac{1}{x}$ تنعدم ثلاث مرّات مغيّرة اشارتها من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(x+1)}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{\ln(x+1)}=+\infty$.
3. الدّالة $f : x \mapsto -3\sin\left(4x-\frac{2019\pi}{2}\right)$ هي دالة زوجية على $\Re$ و دورية دورها $\frac{\pi}{2}$.
4. اذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإنّ e^{u_n} هي متتالية هندسية.

التمرين الثّاني: (06 نقاط)



I. نعتبر f الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{3x}{x+1}$.

(u_n) و (v_n) المتتاليتان المعرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = \frac{1}{2} \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$$

الشكل المقابل يمثل المنحنى (C) للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$.

1 .أ. أُنقل الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الاولى لكل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب. ما تخمينك حول إتجاهي تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) وتقاربهما ؟ ماذا تستنتج؟

2. أ. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $v_n \le 2 \le u_n$.

ب. ادرس حسب قيم x من المجال $[0;+\infty[$ اشارة $f(x)-x$ ثم استنتج اتجاه تغيّر كل من (u_n) و (v_n).

ت. استنتج أنّ (u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان ثمّ جِدْ نهايتهما المشتركة.

II. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $w_n=\ln\left(1-\frac{2}{u_n}\right)$.

1. بين أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب كتابة عبارة حدّها العام.
2. بيّن من أجل كل عدد طبيعي n $u_n=\dfrac{2}{1-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ ثمّ احسب $\lim_n u_n$.
3. أُحسب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n المعرّفين كما يلي : $S_n=w_0+w_1+\ldots+w_n$

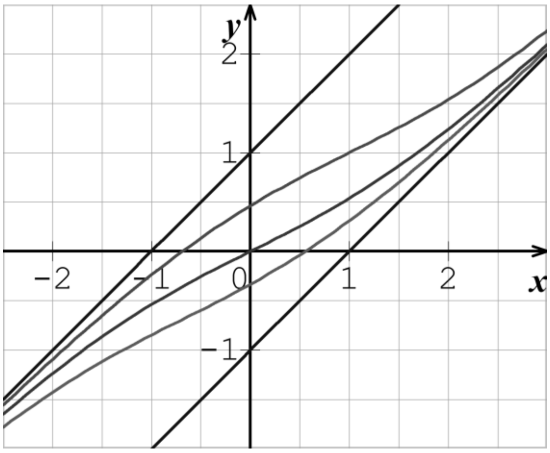
و $P_n=\left(\frac{u_0}{u_0-2}\right)\times\left(\frac{u_1}{u_1-2}\right)\times\ldots\times\left(\frac{u_n}{u_n-2}\right)$ ثمّ أُحسب $\lim_n S_n$ و $\lim_n P_n$.

التمرين الثّالث: (10 نقاط)

الجزء 1: من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\Re$ بـ $f_k\left(x\right)=x+\dfrac{1-ke^x}{1+ke^x}$.

و نرمز بـ $\left(C_k\right)$ إلى تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

في الشكل المقابل قمنا برسم المستقيمين (d) و (d') اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=x-1$ و $y=x+1$ و كذلك عدة منحنيات $\left(C_k\right)$ مرفقة لقيم خاصة لـ k.



1. ضع تخمينا حول النهايات ؛ المستقيمات المقاربة و جدول تغيّرات الدّالة f_k.
2. بيّن من أجل كل عدد حقيقي x أنّ $f_k'(x)=\dfrac{1+k^2e^{2x}}{\left(1+ke^x\right)^2}$.
3. عيّن قيمة k في كلّ حالة من الحالات التّالية:
   أ. f_k دالة فردية.
   ب. $\left(C_k\right)$ يشمل النقطة $A(1;1)$.
   ج. $\left(C_k\right)$ يقبل مماسا عند -1 معامل توجيهه $\dfrac{1}{2}$.

الجزء 2 : لتكن (E) المعادلة التفاضلية المعرّفة كما يلي: $(E):2y'=\left(y-x\right)^2+1$.

1. تحقق أنّ الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية (E).
2. استنتج اشارة $f_k'\left(x\right)$ ثمّ شكل جدول تغيّرات الدّالة f_k (يطلب حساب النهايات).
3. بيّن باستعمال (E) أنّ $\left(C_k\right)$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $-\ln(k)$.
4. أ. تحقق من اجل كلّ عدد حقيقي x أنّ : $f_k(x)=x-1+\dfrac{2}{1+ke^x}$ ......(1) وَ $f_k(x)=x+1-\dfrac{2ke^x}{1+ke^x}$ ......(2).
   ب. بيّن أنّ $\left(C_k\right)$ يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما.
   ج. بيّن من أجل كلّ عدد حقيقي x أن $x-1<f_k\left(x\right)<x+1$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيا.
5. بيّن أنّ المعادلة $f_k\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي الى $\Re$ ثمّ استنتج اشارة $f_k\left(x\right)$ حسب قيم x من $\Re$.

الجزء 3 : من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما k، نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\Re$ بـ $g_k\left(x\right)=x^2+2x-4\ln\left(1+ke^x\right)$

و نرمز بـ $\left(\Psi_k\right)$ إلى تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. بيّن من أجل كل عدد حقيقي x أنّ $g_k\left(x\right)=x^2-2x-4\ln\left(k+e^{-x}\right)$ ثمّ احسب نهايات الدّالة g_k.
2. بيّن من أجل كل عدد حقيقي x أنّ $g_k'(x)=2f_k(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة g_k.
3. نسمي (Γ) المنحنى البياني المعرّف بالمعادلة $y=x^2-2|x|$. بيّن أنّ (Γ) و $\left(\Psi_k\right)$ متقاربين بجوار $+\infty$ و $-\infty$.
   ثمّ استنتج وضعيّة $\left(\Psi_k\right)$ بالنسبة الى (Γ).
4. أ. أوجد قيمة k حتى تكون g_k دالّة زوجية
   ب. اشرح كيف يمكن رسم (Γ) انطلاقا من التمثيل البياني للدّالة مربّع (لاحظ أن $x^2-2x=\left(x-1\right)^2-1$)
   جـ. ارسم (Γ) و $\left(\Psi_1\right)$.