الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية ساجي مختار -القلعة-

مديرية التربية لولاية غليزان

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

السنة الدراسية 2019--2020

المستوى : 3 الرياضيات

إختبار في مادة : الرياضيات

المدة :03 ساعات

التمرين الأول: (5 نقط)

لتكن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتين عدديتين معرفتين كمايلي: $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n + u_n}{3} \end{cases}$ و $\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = \dfrac{v_n + 2u_n}{3} \end{cases}$

1. من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف المتتالية العددية (L_n) بحيث : $L_n = u_n - v_n$

أ) أثبت أن المتتالية (L_n) هندسية و عيّن أساسها و حدها الأول .

ب) أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n .هل المتتالية (L_n) متقاربة ؟

2. أدرس إتجاه تغير المتتاليتين (v_n) و (u_n) .

3. بيّن أنّ المتتاليتين (v_n) و (u_n) متجاورتان و لهما نفس النهاية التى نرمز لها بـ: ℓ

4. إستنتج بدلالة n عبارة المجموع S_n المعرف بـ: $S''_n = S'_n + S_n$ علما أن:

$S'_n = v_0u_0 - {v_0}^2 + v_1u_1 - {v_1}^2 + \cdots + v_nu_n - {v_n}^2$ و $S''_n = {u_0}^2 - u_0v_0 + {u_1}^2 - u_1v_1 + \cdots + {u_n}^2 - u_nv_n$

5. من أجل كل عدد طبيعي n . نعرف المتتالية العددية (w_n) بحيث : $w_n = u_n + v_n$

أثبت أن (w_n) ثابتة، ثم إستنتج قيمة ℓ

التمرين الثاني: (5 نقط)

نعتبر الدالة العددية f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف

2. بين أن $x - \sqrt{x^2+8} < 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$

3. أحسب الدالة المشتقة للدالة f و إستنتج إشارتها ، ثم شكل جدول تغيرات f

4. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -2x$ مقارب للمنحنى (C_f)

5. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

6. أحسب $f(0)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f)

7. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = -x - \sqrt{x^2+8}$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم السابق .

بيّن أن (C_g) و (C_f) متناظران بالنسبة للمبدأ ، ثم أنشئ (C_g)

التمرين الثالث: (10 نقط)

m عدد حقيقي موجب تماما، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_m(x) = x - 1 + xe^{mx}$

نرمز بـ $\left(C_{f_m}\right)$ للمنحنى الممثل للدالة f_m في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامدالمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

I) نعتبر الدالة g_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_m(x) = 1 + (1 + mx)e^{mx}$

1. أحسب الدالة المشتقة ${g'}_m$ للدالة g_m ، ثم أدرس إشارتها

2. شكل جدول تغيرات الدالة الدالة g_m ، ثم إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $g_m(x) > 0$

II) 1. أ) بيّن أنّ جميع المنحنيات $\left(C_{f_m}\right)$ تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيّين إحداثيتيها .

ب) أحسب : $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f_m(x)$

ج) بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ بجوار $-\infty$

د) أدرس الوضع النسبي لـ (D) و $\left(C_{f_m}\right)$

2. أدرس إتجاه تغير الدالة f_m ،ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ) عيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$ عند النقطة التي ترتيبتها -1

ب) بيّن أنّ النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1+e^{-2}) - 1\right)$. نقطة إنعطاف للمنحنى $\left(C_{f_m}\right)$.

4. بيّن أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

5. أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ $\left(C_{f_m}\right)$ و $\left(C_{f_{-m}}\right)$

حيث $\left(C_{f_{-m}}\right)$ منحنى ممثل للدالة المعرفة بـ: $f_{-m}(-x)$

ب) أنشئ كلا من (Δ)، (D) و $\left(C_{f_1}\right)$.ثم أنشئ $\left(C_{f_{-1}}\right)$ إنطلاقا من $\left(C_{f_1}\right)$ (نقبل أن $\alpha_1 \approx 0,4$ ، $f_1(2) \approx 16$)

III) نعتبر الدالة F المعرفة على R بـ $F(x) = f_1(x^2)$.

(C_F) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق

1. إستنتج إتجاه تغير الدالة F (دون حساب الدالة المشتقة للدالة F)

2. أدرس الوضع النسبي لـ $\left(C_{f_1}\right)$ و (C_F) من أجل $x \in [0; +\infty[$ ثم أنشئ (C_F) على $\mathbb{R}$

3. ناقش حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

الزمن	سبتمبر 2019 جوان 2020
(أنا)′	$+$
أنا	$BAC \nearrow$ النجاح

كيف يمكن للبذرة أن تصدق أن هناك

شجرة ضخمة مخبأة داخلها ؟

ما تبحث عنه موجود بداخلك

الإجابة النموذجية	التنقيط

التمرين الأول

1 إثبات أن المتتالية (L_n) هندسية

لدينا: $L_n = u_n - v_n$ ومنه $L_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{v_n + 2u_n}{3} - \frac{2v_n - u_n}{3} = \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{1}{3}L_n$

إذن (L_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و حدها الأول $L_0 = u_0 - v_0 = 6$

عبارة الحد العام L_n

لدينا: $L_n = L_0 \times q^n$ ومنه $L_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و بماأن: $q \in]-1;1[$ فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$ و بالتالي (L_n) متقاربة

2 دراسة إتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n)

$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n + 2u_n}{3} - u_n = \frac{v_n - u_n}{3} = -\frac{1}{3}L_n$ و $v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n + u_n}{3} - v_n = \frac{u_n - v_n}{3} = \frac{1}{3}L_n$

✍ بما أن $L_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

✍ بما أن $L_n > 0$ فإن $v_{n+1} - v_n < 0$ ، إذن المتتالية (v_n) متزايدة تماما.

3 إثبات أنّ المتتاليتين (v_n) و (u_n) متجاورتان

(u_n) متتالية متناقصة تماما و (v_n) متتالية متزايدة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0$

ومنه المتتاليتين (v_n) و (u_n) متجاورتان و $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4 حساب بدلالة n المجموع S_n

لدينا: $S_n'' = S_n' + S_n$ تكافئ

$$S_n = S_n'' - S_n' = \left({u_0}^2 - u_0v_0 + \cdots + {u_n}^2 - u_nv_n\right) - \left(v_0u_0 - {v_0}^2 + \cdots + v_nu_n - {v_n}^2\right)$$

تكافئ: $S_n = u_0^2 + v_0^2 - 2u_0v_0 + \cdots + u_n^2 + v_n^2 - 2u_nv_n$ تكافئ $S_n = (u_0 - v_0)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2$

تكافئ: $S_n = L_0^2 + \cdots + L_n^2 = {L_0}^2\left(\frac{1-(q^2)^n}{1-q^2}\right) = 36\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{81}{2}\left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$

5 إثبات أن (w_n) ثابتة

لدينا: $w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{v_n + 2u_n}{3} + \frac{2v_n + u_n}{3} = \frac{3v_n + 3u_n}{3} = v_n + u_n = w_n$ ومنه (w_n) ثابتة

$w_n = w_0 = 8$ ومنه $u_n + v_n = 8$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 8$ تكافئ $2\ell = 8$ ومنه $\ell = 4$

التمرين الثاني

1 حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x + \sqrt{x^2+8}\right) + \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x + \sqrt{x^2+8}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x^2+8}+x} = 0$$

2 إثبات أن $x - \sqrt{x^2+8} < 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$

$x - \sqrt{x^2+8} < 0$ تكافئ $x < \sqrt{x^2+8}$ صحيحة من أجل $x \in]-\infty;0[$ لأن $x < 0$ و $\sqrt{x^2+8} > 0$

من أجل $x \in [0;+\infty[$: نفرض أن $x - \sqrt{x^2+8} > 0$ تكافئ $x^2 > x^2 + 8$ تكافئ $0 > 8$ (تناقض) ومنه $x - \sqrt{x^2+8} < 0$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $x - \sqrt{x^2+8} < 0$

3 دراسة تغيرات الدالة f

الدالة f ثابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' حيث : $f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} = \frac{x - \sqrt{x^2+8}}{\sqrt{x^2+8}}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $x - \sqrt{x^2+8}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$

ومن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow \sqrt{8} \searrow 0$

❹ إثبات أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2x$ مقارب ما ئل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-2x)] = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8}+x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{8}{\sqrt{x^2+8}-x}=0$$

إذن المستقيم ذي المعادلة $y=-2x$ مقارب مايل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

❺ دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

لدينا: $[f(x)-(-2x)]=\sqrt{x^2+8}+x$

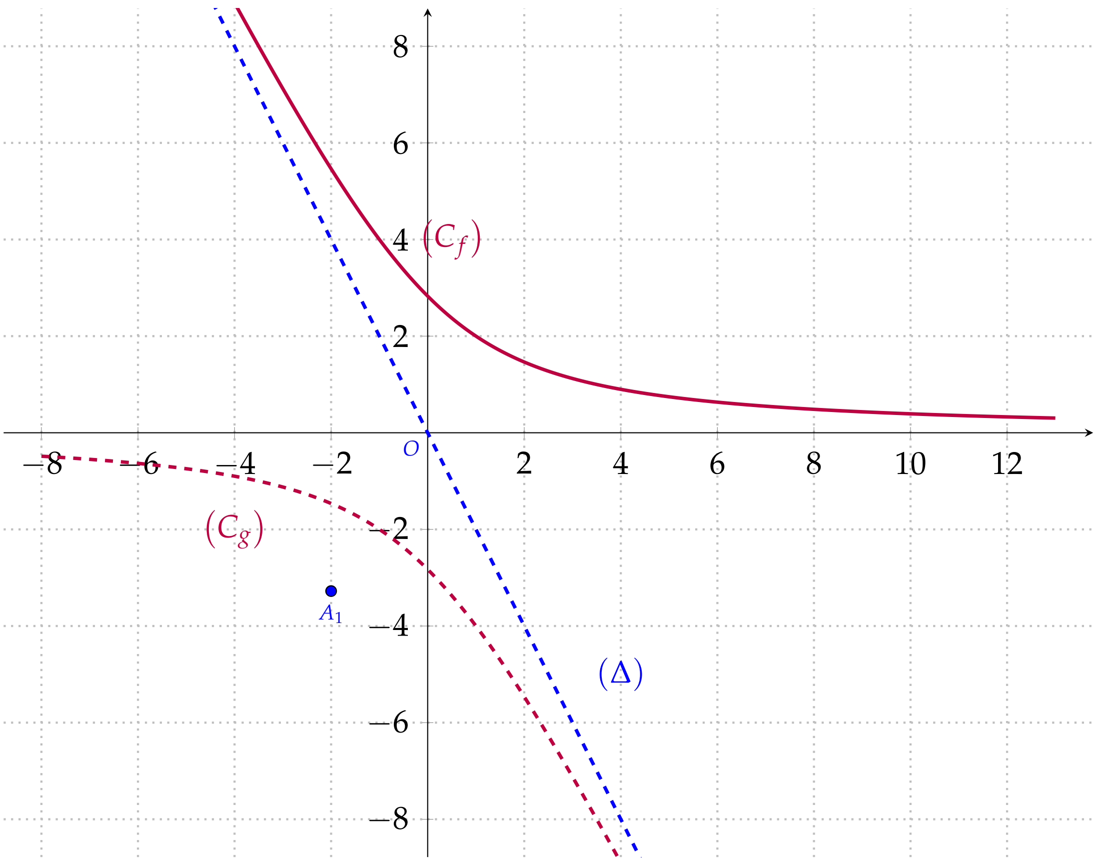
من أجل $x\in[0;+\infty[$: $\sqrt{x^2+8}+x>0$

من أجل $x\in]-\infty;0[$

نفرض $\sqrt{x^2+8}+x<0$ تكافئ $\sqrt{x^2+8}<-x$ تكافئ $x^2+8<x^2$ تكافئ $8<0$ (تناقض) ومنه $\sqrt{x^2+8}+x>0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: (C_f) يقع فوق (Δ)

❻ إنشاء (Δ) ، (C_f) و (C_g)



❼ إثبات أن (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبو إلى المبدأ

لدينا: من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

إذن: $f(-x)=-(-x)+\sqrt{(-x)^2+8}=x+\sqrt{x^2+8}=-(-x-\sqrt{x^2+8})=-g(x)$

ومنه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبو إلى المبدأ

التمرين الثالث

(I

❶ الدالة g_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g'_m حيث

$$g'_m(x) = me^{mx} + me^{mx}(1+mx) = me^{mx}(2+mx)$$

إشارة $g'_m(x)$ من نفس إشارة $(2+mx)$ لأن $me^{mx} > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{m}$		$+\infty$
$g'_m(x)$		$-$	0	$+$	

❷ حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g_m(x) = 1$ لأن $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} mxe^{mx} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{mx} = 0$

جدول تغيرات الدالة g_m

x	$-\infty$		$-\frac{2}{m}$		$+\infty$
$g'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$g_m(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

الإستنتاج من أجل كل عدد حقيقي x أن $g_m(x) > 0$

لدينا $1-e^{-2} > 0$ قيمة حدية صغرى للدالة g_m أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g_m(x) > 1-e^{-2} > 0$

(II

❶ إثبات أنّ جميع المنحنيات (C_{f_m}) تمر بنقطة ثابتة I

من أجل كل $m, m' \in \mathbb{R}$ بحيث $m \neq m'$ لدينا: $(C_{f_m}) \cap \left(C_{f'_m}\right) = I$ حيث I نقطة ثابتة مستقلة عن m

إذن لإيجاد إحداثيات النقطة $I(x_0; y_0)$ نحل المعادلة $f_m(x_0) - f'_m(x_0) = 0$

أي $x_0 - 1 + x_0e^{mx_0} - (x_0 - 1 + x_0e^{m'x_0}) = 0$ ومنه $x_0e^{mx_0} - x_0e^{m'x_0} = 0$ أي $x_0(e^{mx_0} - e^{m'x_0}) = 0$

يعني $x_0 = 0$ أو $e^{mx_0} - e^{m'x_0} = 0$ يعني $mx_0 - m'x_0 = 0$ أي $x_0(m-m') = 0$ و هذا يعني أن $x_0 = 0$ لأن $m \neq m'$

و $y_0 = f_m(x_0) = f_m(0) = -1$ ومنه $I(0, -1)$

حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - 1 + xe^{mx}) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x - 1 + xe^{mx}) = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{mx} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{m} \times mxe^{mx} = \frac{1}{m} \times 0 = 0$

إثبات أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_{f_m}) بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{mx} = 0$ ومنه المستقيم ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

دراسة الوضع النسبي لـ (D) و (C_{f_m})

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_{f_m}) تحت (D)	(C_{f_m}) يقطع (D) في النقطة $\Omega(0; -1)$	(C_{f_m}) فوق (D)	

❷ دراسة إتجاه تغير الدالة f_m

الدالة f_m قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f'_m حيث : $f'_m(x) = 1 + mxe^{mx} + e^{mx} = 1 + (1 + mx)e^{mx} = g_m(x)$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $g_m(x) > 0$ ومنه الدالة f_m متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f_m

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		$+$	
$f_m(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

❸ تعيّن معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_{f_m}) عند النقطة التي ترتيبتها -1

$f_m(x) = -1$ تكافئ $x - 1 + xe^{mx} = -1$ تكافئ $x(1 + e^{mx} = 0$ تكافئ $x = 0$

$y = f'_m(0)(x - 0) + f(0) = 2x - 1$

تبيان أنّ النقطة $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1 + e^{-2}) - 1\right)$. نقطة إنعطاف للمنحنى (C_{f_m}).

لدينا $f''_m(x) = g'_m(x)$ تنعدم من أجل $x = -\frac{2}{m}$ و تغير إشارتها من السالب إلى الموجب و منه النقطة

$A_m\left(-\frac{2}{m}; f_m\left(-\frac{2}{m}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) أي $A_m\left(-\frac{2}{m}; -\frac{2}{m}(1 + e^{-2}) - 1\right)$

❹ إثبات أن المعادلة $f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_m حيث $0 < \alpha_m < 1$

لدينا f_m مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة و رتيبة تماما على المجال $[0;1]$

و لدينا $f_m(0) \times f_m(1) = (-1) \times e^m < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة و شرط الرتابة نستنتج أن المعادلة

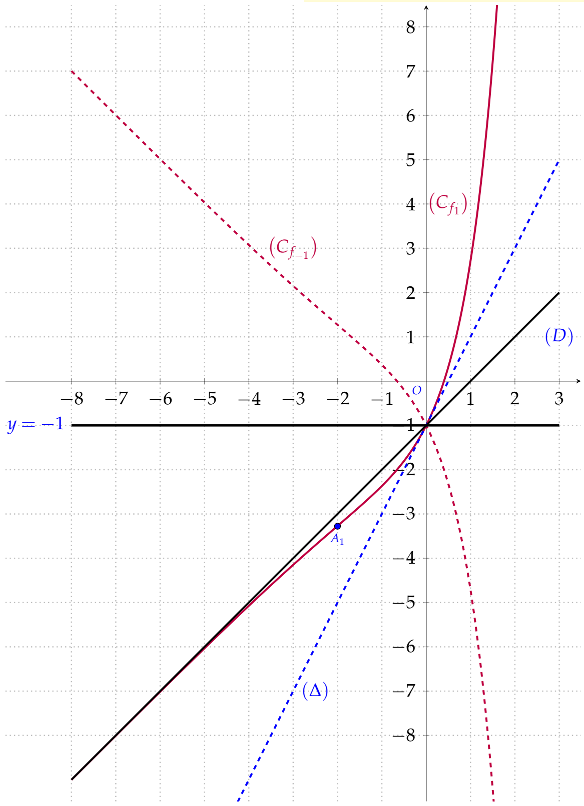
$f_m(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $0 < \alpha_n < 1$

❺ إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_m(x) + f_{-m}(-x) = -2$

$f_m(x) + f_{-m}(-x) = x - 1 + xe^{mx} + \left(-x - 1 - xe^{-m(-x)}\right) = -2$ ، إذن نستنتج أن المنحنيين

(C_{f_m}) و $(C_{f_{-m}})$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = -1$

إنشاء كلا من (Δ)، (D)، (C_{f_1}) و أنشئ $(C_{f_{-1}})$: النقطة $A_1\left(-2; -3 - 2e^{-2}\right)$ نقطة إنعطاف للمنحنى (C_{f_1})



(III

❶ إستنتاج إتجاه تغير الدالة F

الدالة F هي مركب الدالتين $x \mapsto f_1(x)$ و $x \mapsto x^2$ و لدينا الدالة f_1 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه إتجاه تغير الدالة F هو من نفس إتجاه تغير الدالة $x \mapsto x^2$ ، إذن الدالة F متناقصة تماما من أجل $x \in]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما من أجل $x \in [0;+\infty[$

❷ أدرس الوضع النسبي لـ (C_{f_1}) و (C_F) من أجل $x \in [0;+\infty[$

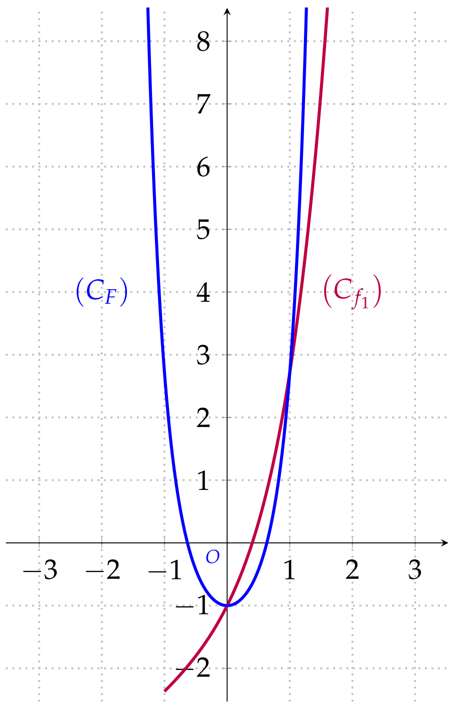
لدينا من أجل $x=0$ أو $x=1$ فإن $x^2=x$ و منه $f_1(x^2)=f_1(x)$ إذن (C_{f_1}) يقطع (C_F) في النقطتين $A\,(0,-1)$ و $B\,(1,1)$

لدينا من أجل $x \in]0;1[$: $x^2 < x$ ومنه $f_1(x^2) < f_1(x)$ ومنه (C_F) يقع تحت المنحنى (C_{f_1}) من أجل $x \in]0;1[$

لدينا من أجل $x \in]1;+\infty[$: $x < x^2$ ومنه $f_1(x) < f_1(x^2)$ ومنه (C_F) يقع فوق المنحنى (C_{f_1}) من أجل $x \in]1;+\infty[$

❸ إنشاء (C_F)

لدينا الدالة F دالة زوجية و منه منحناها البياني متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب



مناقشة حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $e^{F(x)} = m$

$e^{F(x)} = m$ تكافئ $F(x) = \ln(m)$ إذن حلول المعادلة $F(x) = \ln(m)$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_F)

مع عائلة المستقيمات $D_m : y = \ln(m)$

من أجل $\ln(m) \in]-\infty;-1[$ أي $m \in]0;e^{-1}[$ لا يوجد حل

من أجل $\ln(m) = -1$ أي $m = e^{-1}$ يوجد حل $x_0 = 0$

$\ln(m) \in]-1;+\infty[$ أي $m \in]e^{-1};+\infty[$ يوجد حلين متمايزين مختلفين في الإشارة