الاختبار الأول في مادة الرياضيات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية المدة: ساعتان

التمرين الأول: 12ن

$I-$ الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x) = x - x\ln x$

1- أ) احسب نهايات الدالة g.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$.

3- استنتج إشارة $g(x) + 1$ على $]0;+\infty[$.

$II-$ f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$.

1- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

د) احسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، فسر النتيجة هندسيا.

3- أ) بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$.

ب) استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2})

ج) ارسم (C_f) و المماس (T).

4- نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي: $x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \ldots (E)$

أ) تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x - m$.

ب) عين بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة (E).

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$، (C_h) منحناها البياني في المستوي.

أ) بين أن الدالة h زوجية.

ب) اكتب الدالة h بدلالة الدالة f.

ج) ارسم في نفس المعلم المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f).

التمرين الثاني:8ن

I– g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $g(x)=1-(ax+b)e^{x-2}$ حيث a و b عددان حقيقيان.

1- احسب $g'(x)$ بدلالة a و b.

2- عين قيمتي a و b إذا علمت أن منحنى الدالة g يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $A(-3;1+2e^{-5})$.

نأخذ فيما يلي $a=2$ و $b=4$

3- أ- ادرس تغيرات الدالة g.

ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4\prec\alpha\prec 0,5$ واستنتج إشارة $g(x)$.

II– نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2$ (C_f) تمثيلها البياني (وحدة الطول $2cm$)

1- بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}x.g(x)$

3- استنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$, ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4- عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

5- أنشئ (C_f) على المجال $[-5;2]$ (نأخذ $f(\alpha)\simeq-0,2$)

III– نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $h(x)=e^{1-f(x)}$

– احسب $h'(x)$ واستنتج إشارتها ثم شكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة $h(x)$)

انتهى بالتوفيق للجميع

الحل النموذجي للاختبار الأول في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة علوم — **السنة الدراسية** 2019/2020

التمرين الاول:

g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $g(x)=x-x\ln x$

1) أ) حساب النهايتين: $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} g(x)=0$ لأن $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x\ln x=0$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(1-\ln x)]=-\infty$.

ب) اتجاه تغير الدالة g على $]0;+\infty[$ وجدول تغيراتها:

لدينا $g'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2) إثبات أن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3.5<\alpha<3.6$،

لدينا $g(x)>-1$ من أجل كل x من $]0;1]$، إذن المعادلة $g(x)=-1$ لا تقبل حلا في المجال $]0;1]$،

وفي المجال $[1;+\infty[$ الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما وبما أن: $g(3.5)\cong-0.88>-1$ و $g(3.6)\cong-1.011<-1$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث

3) إشارة $g(x)+1$ على $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)+1$		$+$	0	$-$	

ii. f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ: $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$.

(C_f) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=4cm$.

1) إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$:

لدينا: $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=-\infty$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$.

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\times\frac{\ln x}{x}=0$ فإن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$.

2) أ) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{\frac{x+1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

ب) إشارة الدالة المشتقة من إشارة $g(x)+1$ لأن المقام موجب تماما إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$،

جدول تغيرات الدالة f:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\alpha}$	$\searrow$	0

ج) معادلة للمستقيم المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1: $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

د) بما أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ فهي تقبل الاشتقاق عند α ولدينا: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=\frac{g(\alpha)+1}{\alpha(\alpha+1)^2}=0$،

نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مماسا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=f(\alpha)$.

3) أ) إثبات أن: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$، لدينا $g(\alpha)=-1$ أي $\ln\alpha=\frac{1+\alpha}{\alpha}$ ومنه $f(\alpha)=\frac{1+\alpha}{\alpha(1+\alpha)}=\frac{1}{\alpha}$.

ب) حصر للعدد $f(\alpha)$: لدينا $3.5<\alpha<3.6$ أي $\frac{1}{3.6}<f(\alpha)<\frac{1}{3.5}$ ومنه $0.27<f(\alpha)<0.29$

ج) رسم (C_f) في المعلم أدناه.

4) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي: $x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2)\ ...(E)$

أ) من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما، المعادلة (E) تكافئ $(x+1)(x-2m)=2\ln x$ أي $x-2m=\frac{2\ln x}{x+1}$ أي $\frac{1}{2}x-m=f(x)$ أي $f(x)=\frac{1}{2}x-m$.

ب) بيانيا: حلول المعادلة (E) فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-m$:

من أجل $-m\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$ أي $m\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

من أجل $-m=-\frac{1}{2}$ أي $m=\frac{1}{2}$ المعادلة تقبل حل.

من أجل $-m\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ أي $m\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ المعادلة لا تقبل حلول.

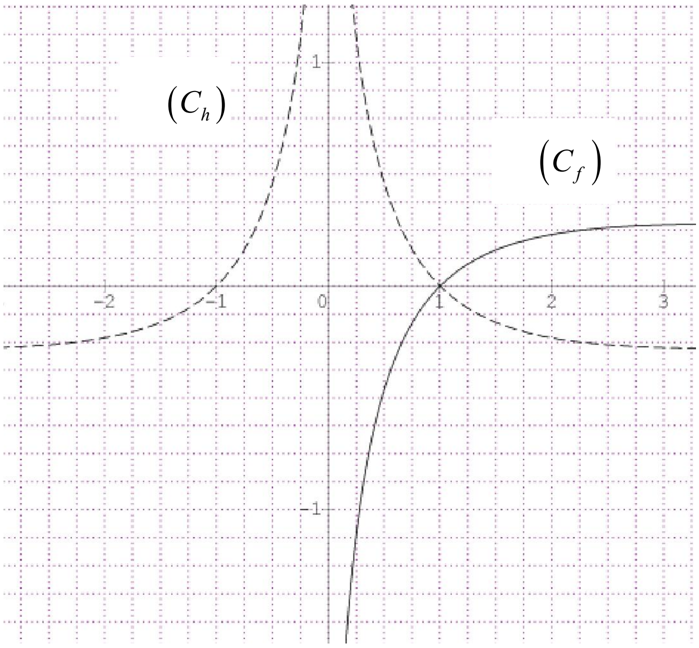
5) h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $h(x)=\frac{ln|x|}{-|x|-1}$،

(C_h) منحناها البياني في المستوي.

نلاحظ أن $h(x)=-f(|x|)$

أ) الدالة h زوجية: لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، $(-x)$ من $\mathbb{R}^*$، ولدينا: $h(-x)=-f(|-x|)=-f(|x|)=h(x)$

ب) رسم المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f).



التمرين الثاني :

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $g(x)=1-(ax+b)e^{x-2}$

حيث a و b عددان حقيقيان.

1- حساب $g'(x)$ بدلالة a و b.

$$g'(x)=-ae^{x-2}-e^{x-2}(ax+b)=-e^{x-2}(ax+a+b)$$

2- تعيين قيمتي a و b علما أن منحنى الدالة g يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة $A(-3;1+2e^{-5})$.

يكافئ $\begin{cases} g(-3)=1+2e^{-5} \\ g'(-3)=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 1-(-3a+b)e^{-5}=1+2e^{-5} \\ -e^{-5}(-3a+a+b)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3a-b=2 \\ -2a+b=0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \end{cases}$ ومنه $g(x)=1-(2x+4)e^{x-2}$

نأخذ فيما يلي $a=2$ و $b=4$

3- أ- درسة تغيرات الدالة g

-حساب النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-(2x+4)e^{x-2}=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}1-(2x+4)e^{x-2}=\lim_{x\to-\infty}1-2xe^{x-2}+4e^{x-2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-2xe^{x}\times e^{-2}+4e^{x-2}=0$$

حساب المشتق: الدالة g قابلة للإشتقاق على ولدينا

$$g'(x)=-e^{x-2}(ax+a+b)=e^{x-2}(-2x-6)$$

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;-3]$ ومتناقصة تماما على $[-3;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0 ↗	$2+e^{(-5)}+1$	↘ $-\infty$

ب- بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4\prec\alpha\prec 0,5$ واستنتاج إشارة $g(x)$.

الدالة مستمرة ورتيبة تماما على $[0,4;0,5]$

$g(0,4)=0,03$; $g(0,5)=-0.16$ $g(0,4)\times g(0,5)\prec 0$

II- الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2$

1- بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{x}\times e^{-2}-\frac{1}{4}x^2=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{x-2}-\frac{1}{4}\right)=+\infty$$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\frac{1}{2}x.g(x)$

$$f'(x)=2xe^{x-2}+e^{x-2}x^2-\frac{1}{2}x$$

$$=-\frac{1}{2}x\left(1-(2x+4)e^{x-2}\right)=-\frac{1}{2}x.g(x)$$

3- استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$, ثم تشكيل جدول تغيرات

x	$-\infty$ 0	α	$+\infty$
$-\frac{1}{2}x$	$+$	$-$	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$

ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جدول التغيرات للدالة f

x	$-\infty$	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

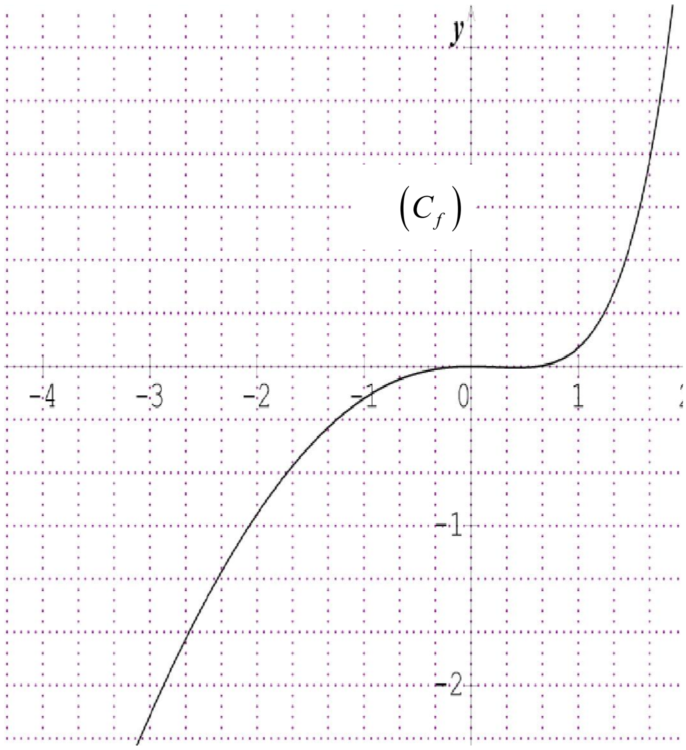
4- تعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

$f(x)=0$ ومنه $x^2e^{x-2}-\frac{1}{4}x^2=0$ ومنه $x^2(e^{x-2}-\frac{1}{4})=0$

ومنه $x=0$ أو $e^{x-2}-\frac{1}{4}=0$ ومنه $e^{x-2}=\frac{1}{4}$ ومنه

$x=2-\ln 4$ ومنه $s=\{2-\ln 4;0\}$

5- انشاء (C_f) على المجال $]-5;2]$ (نأخذ $f(\alpha)\simeq -0,2$)



III- نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $h(x)=e^{1-f(x)}$

- حساب المشتقة : $h'(x)=\left(e^{1-f(x)}\right)'=-f'(x)e^{1-f(x)}$ ومنه

إشارة $h'(x)$ من إشارة $-f'(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$+$	$-$	

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $[0;\alpha]$

ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و $[\alpha;+\infty[$

جدوا التغيرات للدالة h

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$e^{1,2}$	$\searrow$	0

انتهى بالتوفيق والتميز للجميع

الأستاذ: قشار صالح