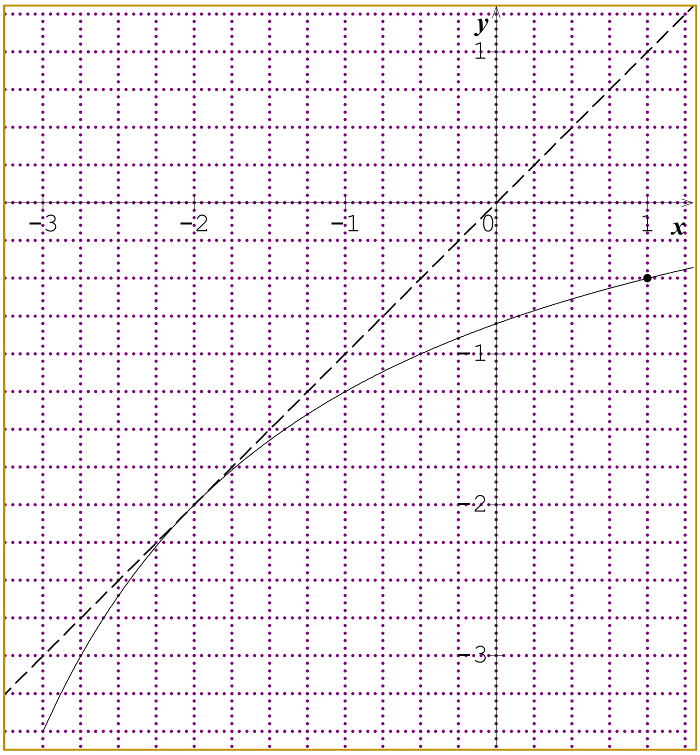
ياضيات

تمرين الخيار الأول:



f معرّفة على $[-3;1]$ بـ: $f(x)=\frac{x-4}{x+5}$ و(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1) أستنتج اتجاه تغير f، وتحقّق أنّ المنصف الأول يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة (-2)

2) نعرّف المتتالية (u_n) بـ:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n);\quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ) أنقل الشكل ومثّل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n).

(دون حسابها وموضحا خطوط الانشاء).

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n)، وتخمينا حول تقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2<u_n\le 1$

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وأحسب حدها الأول v_0.

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

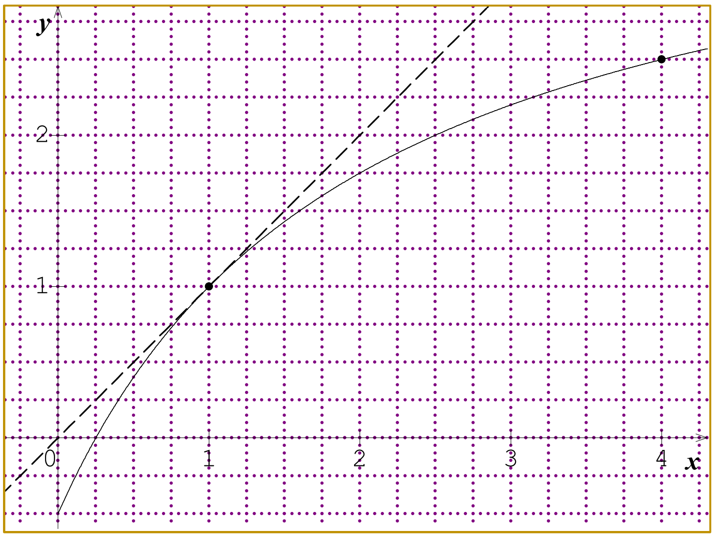
د) أثبت أنّ من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{n+1}{3}(1-2n)$

انتهى

بالتوفيق

ياضيات

تمرين الخيار الثاني:



f معرّفة على $[0;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1) أستنتج اتجاه تغير f، وتحقّق أنّ المنصف الأول يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1

2) نعرّف المتتالية (u_n) بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n); \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ) أنقل الشكل ومثّل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n). (دون حسابها وموضحا خطوط الانشاء).

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n)، وتخمينا حول تقاربها.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n \leq 4$

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وأحسب حدها الأول v_0.

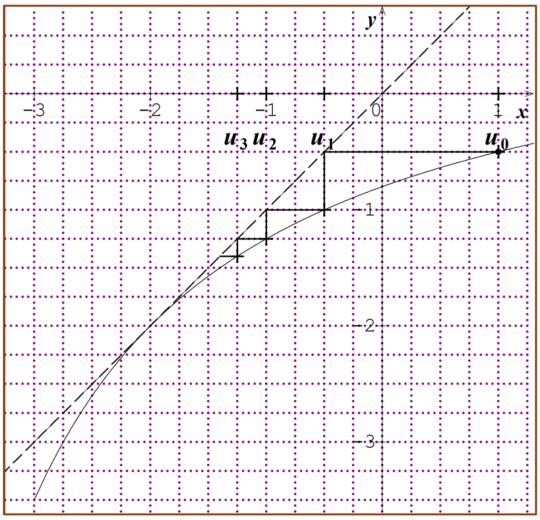
ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) أثبت أنّ من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n = \dfrac{n+1}{6}(8+n)$

انتهى

بالتوفيق



تمرين الخيار الأول: (10 نقاط)

f معرّفة على $[-3;1]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x-4}{x+5}$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1) أستنتج اتجاه تغير f، وتحقّق أنّ المنصف الأول يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة (-2)..........(1+ 0.5) ن

حل: الدالة f متزايدة، نثبت أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل العدد -2 حلا مضاعفا، لدينا: $f(x)=x$ تكافئ: $x-4=x(x+5)$ ويكافئ: $x^2+4x+4=0$ ويكافئ: $(x+2)^2=0$ ويكافئ: $x=-2$

2) نعرّف المتتالية (u_n) بـ: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n); \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

أ) أنقل الشكل ومثّل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n). (دون حسابها وموضحا خطوط الانشاء)..(4×0.25) ن

حل: تمثيل الحدود أنظر الشكل.

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n)، وتخمينا حول تقاربها. ....(2×0.25) ن

حل: من: $u_3<u_2<u_1<u_0$ نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2<u_n\le 1$ ....(3×0.5) ن

حل: البرهان: أولا: $-2\le(u_0=1)\le 1$ محققة. ثانيا: نفرض $-2<u_n\le 1$ ونبرهن $-2<u_{n+1}\le 1$

لدينا: $-2<u_n\le 1$ (فرضية التراجع) والدالة f متزايدة على $[-3;1]$ فهي متزايدة على $[-2;1]$ ومنه: $f(-2)<f(u_n)\le f(1)$ ومنه $-2<u_{n+1}\le -0.5\le 1$ وهو المطلوب. [معناه (u_n) محدودة]

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة. .... (0.5 + 1) ن

حل: نثبت أن الفرق $u_{n+1}-u_n$ سالب من أجل كل عدد طبيعي n.

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n-4}{u_n+5}-u_u=\dfrac{-u_n^2-4u_n-4}{u_n+5}=\dfrac{-(u_n+2)^2}{u_n+5}$ ولدينا: $-2<u_n\le 1$ ومنه:

$0<3<u_n+5\le 6$ ومنه: $u_{n+1}-u_n<0$ وينتج (u_n) متناقصة، ولدينا (u_n) محدودة فهي متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وأحسب حدها الأول v_0. .... (0.5 + 1) ن

حل: نثبت أن الفرق $v_{n+1}-v_n$ ثابت

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}+2}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{\frac{u_n-4}{u_n+5}+2}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{u_n+5}{u_n-4+2u_n+10}-\frac{1}{u_n+2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+5}{3u_n+6}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{1}{u_n+2}\left(\frac{u_n+5}{3}-1\right)=\frac{1}{u_n+2}\left(\frac{u_n+2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$، حدها الأول: $v_0=\frac{1}{u_0+2}$ و $u_0=1$ ومنه: $v_0=\frac{1}{3}$

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n. .... (0.5 + 0.5) ن

حل: $v_n=v_0+r\times n$ ومنه: $v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}(1+n)$ إذن: (v_n) متزايدة وموجبة تماما.

استنتاج عبارة u_n: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ يكافئ: $v_nu_n+2v_n=1$ ويكافئ: $u_n=\frac{1-2v_n}{v_n}$

وبالتعويض عن v_n نجد: $u_n=\frac{1-\frac{2}{3}(1+n)}{\frac{1}{3}(1+n)}$ ومنه: $u_n=\frac{1-2n}{1+n}$

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. حل: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-2n}{1+n}=-2$ .... (0.5) ن

د) أثبت أنّ من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{n+1}{3}(1-n)$ .... (01) ن

حل: لدينا مما سبق من أجل $n\in\mathbb{N}$: $v_nu_n=1-2v_n$

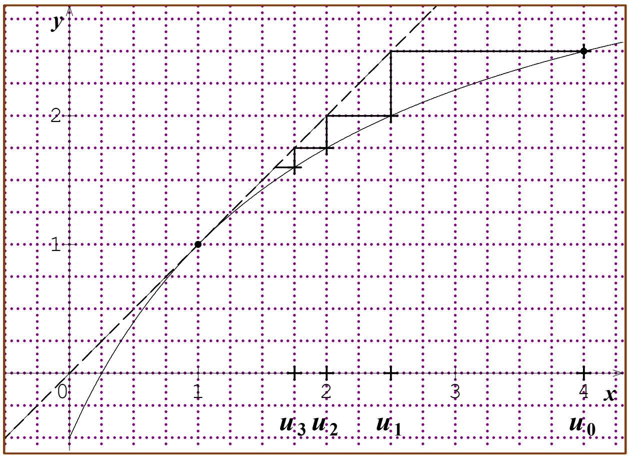
ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{مرة}(n+1)}-2\underbrace{(v_0+v_1+\ldots+v_n)}_{\text{م.حسابية}}$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=(n+1)-(n+1)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1+n)\right)$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=(n+1)\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+n)\right)$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{1}{3}(n+1)(1-n)$ وهو المطلوب

انتهى



تمرين الخيار الثاني: (10 نقاط)

f معرّفة على $[0;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1) أستنتج اتجاه تغير f، وتحقّق أنّ المنصف الأول يمسّ (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .... (1+0.5 ن)

حل: الدالة f متزايدة، نثبت أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل العدد 1 حلا مضاعفا، لدينا: $f(x)=x$ تكافئ: $4x-1=x(x+2)$ ويكافئ: $x^2-2x+1=0$ ويكافئ: $(x-1)^2=0$ ويكافئ: $x=1$

2) نعرّف المتتالية (u_n) بـ: $\begin{cases} u_0=4 \\ u_{n+1}=f(u_n);\quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$

أ) أنقل الشكل ومثّل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n). (دون حسابها وموضحا خطوط الانشاء)... 4×0.25 ن

حل: تمثيل الحدود أنظر الشكل.

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n)، وتخمينا حول تقاربها. ....2×0.25 ن

حل: من: $u_3<u_2<u_1<u_0$ نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1<u_n\le 4$ .... 3×0.5 ن

حل: البرهان: أولا: $1\le(u_0=4)\le 4$ محققة. ثانيا: نفرض $1<u_n\le 4$ ونبرهن $1<u_{n+1}\le 4$

لدينا: $1<u_n\le 4$ (فرضية التراجع) والدالة f متزايدة على $[0;4]$ فهي متزايدة على $[1;4]$ ومنه:

$f(1)<f(u_n)\le f(4)$ ومنه $1<u_{n+1}\le 2.5\le 4$ وهو المطلوب. [معناه (u_n) محدودة]

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة. .... 1 + 0.5 ن

حل: نثبت أن الفرق $u_{n+1}-u_n$ سالب من أجل كل عدد طبيعي n.

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{4u_n-1}{u_n+2}-u_u=\dfrac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n+2}=\dfrac{-(u_n-1)^2}{u_n+2}$ ولدينا: $1<u_n\le 4$ ومنه:

$0<3<u_n+2\le 6$ ومنه: $u_{n+1}-u_n<0$ وينتج (u_n) متناقصة. ولدينا (u_n) محدودة فهي متقاربة.

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وأحسب حدها الأول v_0. .... 1 + 0.5 ن

حل: نثبت أن الفرق $v_{n+1}-v_n$ ثابت

$$\left[\begin{array}{l} v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+2}{4u_n-1-u_n-2}-\frac{1}{u_n-1} \\ v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2}{3u_n-3}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{u_n-1}\left(\frac{u_n+2}{3}-1\right)=\frac{1}{u_n-1}\left(\frac{u_n-1}{3}\right)=\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

إذن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$، حدها الأول: $v_0=\frac{1}{u_0-1}$ و $u_0=4$ ومنه: $v_0=\frac{1}{3}$

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n. .... 0.5 + 0.5 ن

حل: $v_n=v_0+r\times n$ ومنه: $v_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}n=\frac{1}{3}(1+n)$ (إذن: (v_n) متزايدة وموجبة تماما).

استنتاج عبارة u_n: $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يكافئ: $v_nu_n-v_n=1$ ويكافئ: $u_n=\frac{1+v_n}{v_n}$

وبالتعويض عن v_n نجد: $u_n=\dfrac{1+\frac{1}{3}(1+n)}{\frac{1}{3}(1+n)}$ ومنه: $u_n=\frac{4+n}{1+n}$

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. حل: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4+n}{1+n}=1$ .... 0.5 ن

د) أثبت أنّ من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{n+1}{6}(8+n)$ .... 1 ن

حل: مما سبق لدينا من أجل $n\in\mathbb{N}$: $v_nu_n=1+v_n$

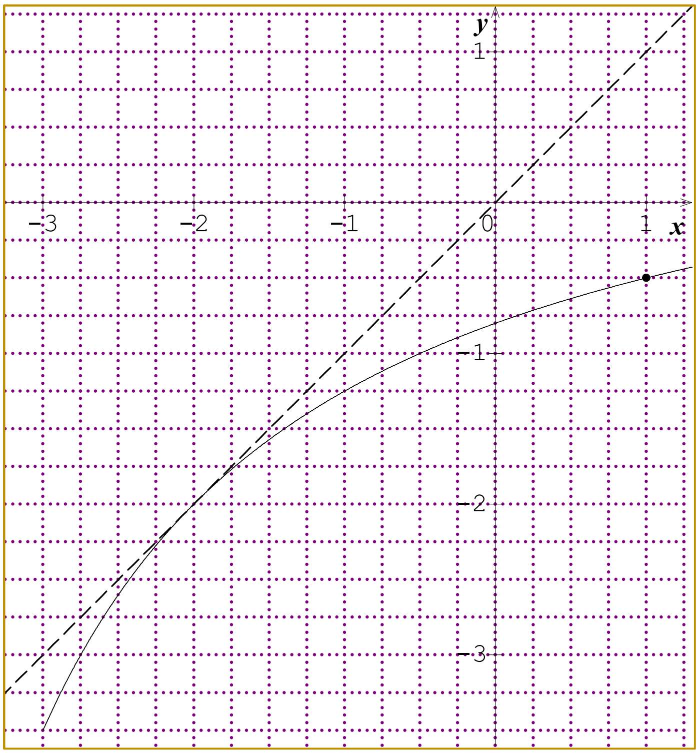
ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{مرة}(n+1)}+\underbrace{(v_0+v_1+\ldots+v_n)}_{\text{م.حسابية}}$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(1+n)\right)$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=(n+1)\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}(1+n)\right)$

ومنه: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{1}{6}(n+1)(8+n)$ وهو المطلوب

انتهى



نص الفرض

تمرين الخيار الأول:

f معرّفة على $[-3;1]$ بـ: $f(x)=\frac{x-4}{x+5}$ و(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

5) أستنتج اتجاه تغير f، وتحقّق أنّ المنصف الأول يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة (-2)

6) نعرّف المتتالية (u_n) بـ:

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f(u_n); \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

أ) أنقل الشكل ومثّل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n). (دون حسابها وموضحا خطوط الانشاء).

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n)، وتخمينا حول تقاربها.

7) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2<u_n\le 1$

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة.

8) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{1}{u_n+2}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وأحسب حدها الأول v_0.

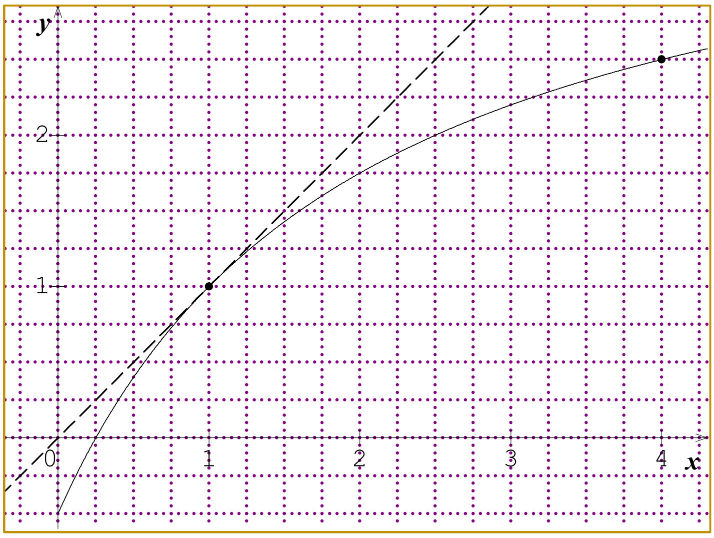
ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

جـ) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) أثبت أنّ من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_0v_0+u_1v_1+\ldots+u_nv_n=\frac{n+1}{3}(1-n)$

انتهى — بالتوفيق

تمرين الخيار الثاني:



f معرّفة على $[0;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x-1}{x+2}$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

5) أستنتج اتجاه تغير f، وتحقّق أنّ المنصف الأول يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1

6) نعرّف المتتالية (u_n) بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n); \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ) أنقل الشكل ومثّل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n). (دون حسابها وموضحا خطوط الانشاء).

ب) أعط تخمينا فيما يخصّ اتجاه تغير المتتالية (u_n)، وتخمينا حول تقاربها.

7) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $1 < u_n \le 4$

ب) أثبت أنّ المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة.

8) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

أ) أثبت أنّ المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r وأحسب حدها الأول v_0.

ب) أكتب بدلالة n عبارة v_n، واستنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

د) أثبت أنّ من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_0v_0 + u_1v_1 + \ldots + u_nv_n = \dfrac{n+1}{6}(8+n)$

انتهى — بالتوفيق