ثانوية عبد الحق بن حمودة - سيرات- مستغانم — السنة الدراسية : 2020/2019

المستــوى: 3 تقني رياضي — المــدة : 120 دقيقة

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الآتية : $645x-195y=13^n-54n-1$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

-1 أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15.

-2 عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

-3 جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E_2) بحيث $x_0+y_0=4$ ثم حل المعادلة (E_2).

-4 A عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^6$ في النظام ذي الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta 0\gamma\gamma}^5$ في النظام ذي الأساس 5.

- عين قيمة الأعداد الطبيعية α، β و γ ثم أكتب العدد A في النظام العشري.

التمرين الثاني

-1 يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و واحدة تحمل الرقم 2 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 0 و -1 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

✍ نسحب من الصندوق عشوائيا **كرتين على التوالي بالارجاع**

- ما احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما.
- ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني.

-2 نقوم الآن باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل الرقم 2 حيث $n>1$ و نسحب من الصندوق عشوائيا **كرتين على التوالي و بدون إرجاع.**

✍ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين.

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.
- بين أن الأمل الرياضياتي $E(X)=\dfrac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$.

التمرين الثالث

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^3+8=0$

تذكير: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و D التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_B}$.

-1 أ) أكتب العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

ب) أكتب معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD.

ج) عين قيم العدد الصحيح n حتى يكون $\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ حقيقي موجب.

-2 لتكن النقطة C مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(D;1)\}$.

أ) عين z_C لاحقة النقطة C ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

ب) أحسب قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO})$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (DC) و الدائرة (C).

3- R الدوران الذي مركزه D و يحول النقطة A إلى B.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) تحقق أن $R(B)=C$ ثم استنتج صورة المثلث ABD بالدوران R.

4- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $arg\left(\overline{z}+2\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية

التمرين الأول

1- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقي	1	13	4	7

2- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

لكي تقبل المعادلة (E_n) حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يجب أن يكون $p\,gcd(645,195)=15$ يقسم $13^n-54n-1$ أي $13^n-54n-1\equiv 0[15]$ ، لدينا أربع حالات هي :

- من أجل $\boxed{n=4k}$:

$13^{4k}-54(4k)-1\equiv 0[15]$ يكافئ $1-216k-1\equiv 0[15]$

يكافئ $-6k\equiv 0[15]$ نقسم على 3 نجد $-2k\equiv 0[5]$

بما أن 5 يقسم الجداء $(-2k)$ و 5 أولي مع 2 فإنه $k\equiv 0[5]$

ومنه $k=5p$ اذن $n=4k=4(5p)=20p/\ p\in\mathbb{N}$.

- من أجل $\boxed{n=4k+1}$:

$13^{4k+1}-54(4k+1)-1\equiv 0[15]$ يكافئ $-216k\equiv 42[15]$

يكافئ $-k\equiv 2[5]$ يكافئ $k\equiv 3[5]$ ومنه $k=5p+3$ اذن

$n=4k+1=4(5p+3)+1=20p+13/\ p\in\mathbb{N}$.

- من أجل $\boxed{n=4k+2}$:

$13^{4k+2}-54(4k+2)-1\equiv 0[15]$ يكافئ

$-216k-105\equiv 0[15]$

يكافئ $k\equiv 0[5]$ ومنه $k=5p$ اذن

$n=4k+2=4(5p)+2=20p+2/\ p\in\mathbb{N}$.

- من أجل $\boxed{n=4k+3}$:

$13^{4k+3}-54(4k+3)-1\equiv 0[15]$ يكافئ $-6k-6\equiv 0[15]$

يكافئ $-2k\equiv 2[5]$ نقسم على 2 نجد $-k\equiv 1[5]$ أي

$k\equiv 4[5]$ ومنه $k=5p+4$ اذن

$n=4k+3=4(5p+4)+3=20p+19/\ p\in\mathbb{N}$

ومنه قيم n هي :

$n\in\{20p;20p+13;20p+2;20p+19/\ p\in\mathbb{N}\}$

3- إيجاد الحل الخاص :

نبسط المعادلة (E_2) :

$(E_2)\ldots 645x-195y=13^2-54(2)-1$ نقسم طرفي المعادلة على 15 نجد : $(E_2)\ldots 43x-13y=4$

لدينا $\begin{cases}43x_0-13y_0=4\\ x_0+y_0=4\end{cases}$ نحل جملة المعادلة نجد $x_0=1$ و $y_0=3$ اذن الحل الخاص هو $(1;3)$.

- حل المعادلة (E_2):

لدينا $\begin{cases}43x-13y=4\cdots\cdots(*)\\ 43(1)-13(3)=4\cdots\cdots(**)\end{cases}$ أي

$43(x-1)=13(y-4)$، بما أن 13 يقسم الجداء $43(x-1)$ و 13 أولي مع 43 فإنه حسب غوص 13 يقسم $(x-1)$ أي $x-1=13k$ ومنه $x=13k+1$ نعوض قيمة x في المعادلة $(*)$ نجد $y=43k+3$ اذن مجموعة حلول المعادلة (E_2) هي: $S=\{(13k+1;34k+3)/\ k\in\mathbb{Z}\}$

4- تعيين قيمة الأعداد الطبيعية α، β و γ :

$$\begin{cases}A=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^6=\alpha\times 6^0+\beta\times 6^1+\alpha\times 6^2+\beta\times 6^3+\alpha\times 6^4\\ A=\overline{\beta 0\gamma\gamma\gamma}^5=\gamma\times 5^0+\gamma\times 5^1+\gamma\times 5^2+0\times 5^3+\beta\times 5^4\\ 1\le\alpha\le 5\\ 1\le\beta\le 4\\ 0\le\gamma\le 4\end{cases}$$

أي $\begin{cases}A=1333\alpha+222\beta\\ A=31\gamma+625\beta\\ 1\le\alpha\le 5\\ 1\le\beta\le 4\\ 0\le\gamma\le 4\end{cases}$ معناه

$\begin{cases}1333\alpha+222\beta=31\gamma+625\beta\\ 1\le\alpha\le 5\\ 1\le\beta\le 4\\ 0\le\gamma\le 4\end{cases}$ أي $\begin{cases}43\alpha-13\beta=\gamma\\ 1\le\alpha\le 5\\ 1\le\beta\le 4\\ 0\le\gamma\le 4\end{cases}$

نلاحظ أن α، β حلين للمعادلة $(*)$ بالمطابقة مع المعادلة $(**)$ نجد $\alpha=1$، $\beta=3$ و $\gamma=4$.

كتابة العدد A في النظام العشري:

$A=1333\alpha+222\beta=A=1333(1)+222(3)=1999$

التمرين الثاني

-1

- **احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما:**

$$P(A)=\frac{2(1^1\times 4^1)}{6^2}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

- **احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني:**

$$P(B)=\frac{2(4^1\times 2^1)+2^2}{6^2}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

-2

- **تعيين قيم المتغير العشوائي X** : $X\in\{2;3;4\}$

الحالات الممكنة للسحب :

$$A_{n+4}^2=\frac{(n+4)(n+3)\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+4-2)!}}=(n+4)(n+3)$$

قانون الاحتمال :

$$P(X=2)=\frac{A_3^2}{A_{n+4}^2}=\frac{6}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X=3)=\frac{2\left(A_{n+1}^1\times A_3^1\right)}{A_{n+4}^2}=\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X=4)=\frac{A_{n+1}^2}{A_{n+4}^2}=\frac{\dfrac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n+1-2)!}}}{(n+4)(n+3)}=\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

اذن :

X	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{6}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}$

- تبيين أن $E(X)=\frac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$:

$$E(X)=2\times\frac{6}{(n+4)(n+3)}+3\times\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$
$$+4\times\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}=\frac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$$

التمرين الثالث

I. حل المعادلة $z^3+8=0$:

لدينا $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$

$z^3+8=0$ تكافئ $(z+2)(z^2-2z+4)=0$

تكافئ $z+2=0$ أي $z_0=-2$

أو $z^2-2z+4=0$ نحسب $\Delta=-12=i^2\times12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

ومنه
$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3} \\ \text{أو} \\ z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3} \end{cases}$$

اذن مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{-2;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

II.

1- أ) كتابة العدد $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+i\sqrt{3}+2}{1-i\sqrt{3}+2}=\frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)}{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا $\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Bigg\rangle\ \theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\,k\in\mathbb{Z}$$
اذن $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

- استنتاج طبيعة المثلث ABD :

بما أن $\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن المثلث ABD متقايس الأضلاع.

ب) كتابة معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD:

بما أن المثلث متقايس الأضلاع فإن مركز ثقله هو مركز للدائرة المحيطة به أي $z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}=0$ نلاحظ أن النقطة G هي مبدأ المعلم O ونصف قطرها هو

$$r=|OA|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2=|OB|=|OD|$$

لدينا $(C):(x-x_O)^2+(x-y_O)^2=r^2$ اذن معادلة الدائرة هي $(C):x^2+y^2=4$

ج) تعيين قيم العدد الصحيح n حتى يكون $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ حقيقي موجب:

$\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n=2k\pi$

أي $n\times\frac{\pi}{3}=2k\pi$ ومنه $n=6k\ /\ k\in\mathbb{Z}$

2- أ) تعيين z_C :

$$z_C=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_D}{-1+1+1}=\frac{-(-2)+1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{1}$$

اذن $z_C=4$

- طبيعة الرباعي $ABCD$: معين

التبرير : $CD=AC=AB=BD$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)\neq\frac{\pi}{2}$

ب) حساب قيس الزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO}\right)$:

$$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO}\right)=arg\left(\frac{z_O-z_D}{z_C-z_D}\right)=arg\left(\frac{-\left(1-i\sqrt{3}\right)}{4-\left(1-i\sqrt{3}\right)}\right)$$
$$=arg\left(-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/\,k\in\mathbb{Z}$$

- استنتاج الوضع النسبي للمستقيم (DC) و الدائرة (C):

بما أن $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO}\right)$ زاوية قائمة و النقطة $D\in(C)$ فإن المستقيم (DC) مماس للدائرة (C) في النقطة D .

3- أ) العبارة المركبة للدوران R :

لدينا العبارة المركبة للدوران هي $z' = az + b$

$a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ لأن المثلث ABD متقايس الأضلاع

أي $\left(\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DB}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ لأنها في الاتجاه المباشر أو يمكن التحقق حسابيا.

$z_D = \dfrac{b}{1-a}$ أي $b = z_D(1-a) = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2$

اذن العبارة المركبة للدوران R هي $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$ أو $z' = \left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2$.

ب) تحقق أن $R(B) = C$:

$$z' = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B + 2 = \left(1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right) + 2 = 4 = z_C$$

اذن C صورة B بالدوران R أي $R(B) = C$.

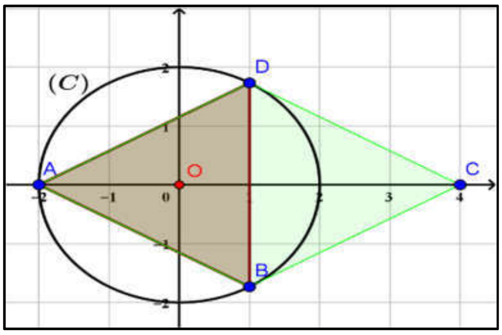
- **استنتاج صورة المثلث ABD بالدوران R:**

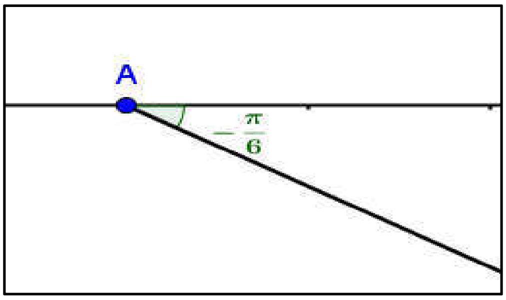
لدينا $\begin{cases} R(D) = D \\ R(B) = C \\ R(A) = B \end{cases}$ اذن صورة المثلث ABD بالدوران R هو المثلث BCD.

4- تعيين (Γ) : لدينا $arg\left(\overline{z}+2\right) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

يكافئ $arg\left(\overline{z+2}\right) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ يكافئ $-arg\left(z-(-2)\right) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

يكافئ $arg\left(z - z_A\right) = -\dfrac{\pi}{6} - 2k\pi$ ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A باستثناء النقطة A.





ثانوية عبد الحق بن حمودة - سيرات- مستغانم | السنة الدراسية : 2020/2019

المستــوى: 3 علوم تجريبية | المــدة: 120 دقيقة

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

-1 يحتوي صندوق على 8 كرات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم -1 و ثلاثة تحمل الرقم 0 و اثنتان تحملان الرقم 1 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 و 2 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

✍ نسحب من الصندوق عشوائيا **ثلاث كرات في آن واحد.**

- أحسب احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الاقل.

✍ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الأرقام المسجلة على الكرات.

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

-2 نعتبر زهر نرد بستة أوجه أربعة منها تحمل الحرف " β " ووجهان يحملان الحرف " α " .

نقوم بالتجربة الآتية : نرمي زهر النرد اذا تحصلنا على الحرف " β " نسحب على التوالي و **بدون إرجاع** كرتين من الصندوق و إذا تحصلنا على الحرف " α " نسحب على التوالي و **بالإرجاع** كرتين من الصندوق.

- أحسب إحتمال ظهور الحرف " α " علما أن الكرتين المسحوبتين مختلفتين في اللون.

التمرين الثاني

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $z_A=4\sqrt{3}-4i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-\sqrt{3}+i$.

-1 أكتب العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

-2 جد z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

-3 لتكن النقطة G مرجح الجملة $\left\{(O;-1),(D;1),(B;1)\right\}$ ذات اللاحقة z_G.

أ) بين أن $z_G=4\sqrt{3}+6i$ ثم علم النقط A، B، C، D و G.

ب) بين أن النقط C، D، G في استقامية.

ج) حدد طبيعة الرباعي $OBGD$.

-4 عين (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-z_B|$

-5 عين (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO}\right)\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MO}\right)=0$

التمرين الثالث

I. لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2-2+\ln x$.

-1 أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

-2 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد $1.31<\alpha<1.32$.

-3 استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=x-e+\frac{1-\ln x}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. وحدة الطول $2cm$.

1- بين أن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

2- بين أنه من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

3- أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن المستقيم $(\Delta): y=x-e$ مقارب للمنحنى (C_f) ثم ادرس وضعيته مع (C_f).

5- بين أن $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6- أرسم (Δ) و (C_f).

بالتوفيق للجميع

الإجابة النموذجية

التمرين الأول

1- الحالات الممكنة للسحب : $C_{10}^{3}=120$.

• احتمال الحصول على كرتين سوداوين على الأقل :

$$P(A)=\frac{C_8^2\times C_2^1+C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{112}{120}=\frac{14}{15}$$

• قيم المتغير العشوائي X : $X\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

• قانون الاحتمال :

$$P(X=-2)=\frac{C_3^1\times C_3^1\times C_1^1}{120}=\frac{9}{120}$$

$$P(X=-1)=\frac{C_3^1\times C_3^2+C_3^3}{120}=\frac{10}{120}$$

$$P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_7^2+C_3^2\times C_7^1+C_3^3}{120}=\frac{85}{120}$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^2\times C_3^1+C_3^3}{120}=\frac{10}{120}$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^2\times C_1^1+C_3^2\times C_1^1}{120}=\frac{6}{120}$$

اذن :

X	-2	-1	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{9}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{85}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{6}{120}$

-2

إحتمال " ظهور الحرف α علما أن الكرتين مختلفتين في اللون"

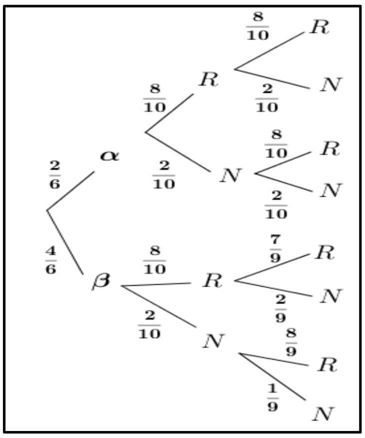
نضع " M : حادثة ظهور الحرف α " و" D : حادثة الكرتين مختلفتين في اللون"

لدينا $P(D)=\frac{2}{6}\times\frac{2\times 8^1\times 2^1}{10^2}+\frac{4}{6}\times\frac{2A_8^1\times A_2^1}{A_{10}^2}=\frac{232}{675}$

و $P(D\cap M)=\frac{2}{6}\times 2\times\frac{8^1\times 2^1}{10^2}=\frac{8}{75}$

اذن $P_D(M)=\frac{P(D\cap M)}{P(D)}=\frac{\frac{8}{75}}{\frac{232}{675}}=\frac{9}{29}$

يمكن استعمال شجرة الإحتمالات



التمرين الثاني

I. حل المعادلة : $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

لدينا $\Delta=-64=(8i)^2$ ومنه $z_1=4\sqrt{3}-4i$ أو $z_2=4\sqrt{3}+4i$

اذن مجموعة الحلول هي $S=\{4\sqrt{3}-4i\,;4\sqrt{3}+4i\}$

II. 1.كتابة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$ على الشكل الأسي :

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{4\sqrt{3}+4i}{4\sqrt{3}-4i}=\frac{(4\sqrt{3}+4i)(4\sqrt{3}+4i)}{(4\sqrt{3}-4i)(4\sqrt{3}+4i)}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنه : $\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و

$$\begin{cases}\cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Big\rangle\ \theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$$

اذن $\frac{z_B}{z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

• طبيعة المثلث OAB : لدينا $\left|\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}\right|=1$ و $arg\left(\frac{z_B-z_o}{z_A-z_o}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$ ومنه المثلث OAB متقايس الأضلاع.

2- ايجاد z_D: لدينا العبارة المركبة للدوران هي :

$(z'-z_o)=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_o)$ تكافئ $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

تكافئ $z'=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و بما أن D صورة النقطة C

فإن : $z_D=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C$ تكافئ

$$z_D=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)=2i$$

3- أ)تبيين أن : $z_G=4\sqrt{3}+6i$:

$$z_G=\frac{-z_o+z_D+z_B}{-1+1+1}=\frac{0+2i+4\sqrt{3}+4i}{1}=4\sqrt{3}+6i$$

• تعليل النقط :

ب) تبيين أن النقط C، D، G في استقامية :

طريقة ① : نثبت أن $\vec{CD}\,//\,\vec{CG}$ لدينا $\vec{CG}\left(5\sqrt{3};5\right)$ و $\vec{CD}\left(\sqrt{3};1\right)$ ، $\vec{CD}\,//\,\vec{CG}$ معناه $\sqrt{3}\times5-1\times\sqrt{3}=0$ محققة

و بالتالي النقط C، D، G في استقامية.

طريقة ② : نبين أن $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=k\in\mathbb{R}$ ، لدينا $\frac{z_G-z_C}{z_D-z_C}=5$ و بالتالي النقط C، D، G في استقامية.

ج) طبيعة الرباعي $OBGD$: متوازي الأضلاع ،

التبرير : $z_{\overline{OB}}=(z_B-z_O)=4\sqrt{3}+4i=z_{\overline{DG}}$.

4- تعيين (Γ_1) : لدينا $|z|=|z-z_B|$ تكافئ $|z-z_o|=|z-z_B|$ تكافئ $MO=MB$ اذن مجموعة النقط هي محور القطعة $[OB]$.

-5 تعيين (Γ_2) :

$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MO})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MO})=0$ تكافئ

$(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{OM})=0$ تكافئ

$(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD})=0$ تكافئ

$(\overrightarrow{MG})(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=0$ أي $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{OG}=0$

اذن مجموعة النقط هي المستقيم العمودي على المستقيم (OG) في النقطة G أي الذي يشمل G و $\overrightarrow{OG}$ ناظما له.

التمرين الثالث

I. 1-دراسة اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=2x+\frac{1}{x}$ و

بما أن $x>0$ فإن $g'(x)>0$.

• جدول تغيراتها :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

-2 تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد :

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1.31;1.32]$

و $\begin{cases} g(1.32)\approx 0.02 \\ g(1.32)\approx -0.01 \end{cases}$ أي $g(1.32)<0<g(1.32)$ فإنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد

$1.31<\alpha<1.32$.

-3 استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II. 1-تبيين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \underbrace{x}_{0}-e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\underbrace{\left(1-\overbrace{\ln x}^{-\infty}\right)}_{+\infty}=+\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}-e+\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}-\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=+\infty$

-2 دراسة اتجاه تغير الدالة f : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=1-\frac{-\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=\frac{x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.إذن الدالة متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

• جدول تغيراتها :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$ $+\infty$

-4 المستقيم $y=x-e$ مقارب لـ (C_f) معناه

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-e)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=0$ ومنه

المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

• **دراسة الوضع النسبي** :ندرس إشارة الفرق

$f(x)-(x-e)=\frac{1-\ln x}{x}$ ومنه من أجل كل x من

$]0;+\infty[$ لدينا : $\frac{1-\ln x}{x}=0$ يكافئ $\begin{cases}1-\ln x=0\\ x\neq 0\end{cases}$ أي

إذن $x=e$:

☒ (C_f) فوق (Δ) في المجال $]0;e]$ و (C_f) تحت (Δ) في المجال $[e;+\infty[$.

☒ (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(e;0)$.

-5 تبيين أن : $f(\alpha)=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$ لدينا $g(\alpha)=\alpha^2-2+\ln\alpha=0$

أي $\ln\alpha=2-\alpha^2$ ولدينا من جهة أخرى $f(\alpha)=\alpha-e+\frac{1-\ln\alpha}{\alpha}$

ومنه :

$$f(\alpha)=\alpha-e+\frac{1-(2-\alpha^2)}{\alpha}=\alpha-e-\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{\alpha}=2\alpha-e-\frac{1}{\alpha}$$

• **استنتاج حصر لـ** $f(\alpha)$:لدينا $1.31<\alpha<1.32$ أي

$\begin{cases}-0.1<2\alpha-e<-0.08\\ -0.76<\frac{-1}{\alpha}<-0.75\end{cases}$ إذن $-0.86<f(\alpha)<-0.83$.

-6 رسم (Δ) و (C_f):