الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مـــــــديرية التربية بولاية تمنراست المـــــوسم الدراسي :2020/2019

امتـــــــــحان الثلاثي الثاني الشعبـة : الثالثة علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات المـــــــــدة :03 ساعة ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

..................................الموضوع الأول...... ....

الموضوع الأول(04نقاط)

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ حيث: $u_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1) احسب الحدود u_1 و u_2 , ثم بين ان $u_{n+1} = 1 - \dfrac{4}{u_n + 3}$.

2) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n : $-1 \le u_n \le 0$.

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .ثم استنتج انها متقاربة .

II) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبعية بـ: $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$.

أ) بين ان (v_n) متتالية حسابية اساسها $\dfrac{1}{2}$ وعين حدها الاول .

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

ت) احسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$.

التمرين الثاني(04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لانفرق بينها بالمس (4بيضاء تحمل الارقام 1, 1 , 2, 3) و(3 حمراء تحمل الارقام 1, 2, 3) و (3 خضراء تحمل الارقام 1, 3, 3) نسحب **عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرايان من الصندوق** .

1) احسب احتمال الحوادث التالية

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس الون " B " الحصول على ثلاث كرايات تحمل رقم فردي "

C " الحصول على ثلاث كرات تحمل الوان العلم الوطني .

2) أ) بين ان $P(A \cap B) = \dfrac{1}{60}$ ثم احسب $P_A(B)$. ب) هل الحادثتان A و B مستقلتان.

3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات التي تحمل الرقم الفردي .

أ) ماهي قيم المتغير العشوائي X الممكنة . ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضياتي $E(x)$.

التمرين الثالث(4.5 نقاط)

1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z+2)(z^2 - 2z + 4) = 0$.

2) نعتبر في المستوي المركب المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ النقط : A , B وC لواحقها على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -2$.

أ) اكتب الاعداد z_A و z_B , z_B على الشكل الاسي .

ب) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;-1);(C;2)\}$.

ت) احسب طويلة وعمدة العدد المركب $L=\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم اكتبه على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن Z لاحقة النقطة $M(x;y)$ عين (S) مجموعة النقط M حيث $|z-1+i\sqrt{3}|=2$.

4) عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ADCB$ متوازي الاضلاع .

التمرين الرابع(7.5نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x+x+1$.

1) احسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها .

3) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-1.3<\alpha<-1.2$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II)نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين ان $f(x)=x-\dfrac{x}{e^x+1}$ ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بين ان $f'(x)=\dfrac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيراتها.

3) بين ان $f(\alpha)=\alpha+1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بالنسبة لـ (C_f)و (Δ) .

6) ارسم (Δ)و (T) و (C_f) .

7) ناقش حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $xe^x-m(e^x+1)=0$.

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الاول :(04 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان حيث (U_1 يحتوي على 6 كريات تحمل الارقام 1,1 ,1,1 ,2 ,2) و (U_2 يحتوي على 4 كريات تحمل الارقام 1 , 1 , 2 , 2)

I) نختار عشوائيا صندوق ثم نسحب منه كرية واحدة عشوائيا .

1) شكل شجرة الاحتمال المنمذجة لهذه التجربة

2) احسب احتمال سحب كرية تحمل الرقم 1 .

3) اذا كانت الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1 ما هو احتمال ان تكون من الصندوق U_1 .

II) نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد ثم نسحب **كريتين على التوالي بدون ارجاع** .

1) ماهو احتمال سحب كريتين من نفس الرقم .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكريتين المسحوبتين .

أ) ماهي قيم المتغير العشوائي X الممكنة .

ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي .

التمرين الثاني (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ حيث: $u_0=\frac{13}{4}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=3+\sqrt{u_n-3}$.

1) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$.

2) أ) بين ان $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n{}^2+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ب) برر لماذا المتتالية (u_n) متقاربة .

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبعية بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ) بين ان (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الاول .

ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) احسب P_n بدلالة n حيث : $P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times(u_2-3)\times....\times(u_n-3)$.

التمرين الثالث(05 نقاط)

I) نعتبر كثير حدود $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$

1) احسب $P(2)$ ماذا تستنتج .

2) عين الاعداد الحقيقية a , b و c حيث $P(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

II) نعتبر الاعداد المركبة التالية $z_0=1+i$, $z_1=-2+2i\sqrt{3}$ و $Z_2=z_0.z_1$ و $Z_3=\frac{z_1}{z_0}$.

1) اكتب z_0 و z_1 على الشكل الاسي ثم استنتج الشكل الاسي للعددين Z_2 و Z_3.

2) اكتب Z_2 على الشكل الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

3) بين ان $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2018} = i$

4) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(Z_3)^n$ عددا حقيقيا .

التمرين الرابع (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

1) احسب نهايات الدالة h عند 0 و $+\infty$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة h على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3) احسب $h(1)$. ثم استنتج اشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ب) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

2) أ) بين ان من اجل كل x من $]0;+\infty[$ فان : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب-) شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) أ) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب (C_f) عند $+\infty$.

ب-) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1 - e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A يطلب تعيين احداثيها .

5) ارسم (Δ) و (d) و (C_f) .

6) اشرح طريقة لرسم التمثيل البياني للدالة g باستعمال التمثيل البياني (C_f) حيث $g(x) = |x| - 1 - \frac{\ln(|x|)}{|x|}$ ثم ارسمه .

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي مع سلم التنقيط
الموضوع الاول

التمرين الاول

1) $u_1=\frac{-1}{3}$, $u_2=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$, $u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}=\frac{u_n+3-4}{u_n+3}=1-\frac{4}{u_n+3}$.................................. (3×0.25)

2) أ) لدينا $u_0=0$ و منه $-1\le u_0\le 0$.ب) نفرض ان $-1\le u_n\le 0$ ثم نبرهن $-1\le u_{n+1}\le 0$ .... (0.25)

من الفرضية لدينا $-1\le u_n\le 0$ ومنه $2\le u_n+3\le 3$ ومنه $\frac{1}{3}\le\frac{1}{u_n+3}\le\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{-4}{3}\le\frac{-4}{u_n+3}\le\frac{-4}{2}$ اذن $-\frac{1}{3}\le 1-\frac{4}{u_n+3}\le -1$

وبالتالي $-1\le u_{n+1}\le 0$ ومنه $-1\le u_n\le 0$ .... (0.25)

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-2u_n-1}{u_n+3}$ وبما ان $u_n+3>0$ اذن ندرس اشارة $-u_n^2-2u_n-1=-(u_n+1)^2$ ومنه $u_{n+1}-u_n<0$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ .... (0.5)

- بما ان المتتالية (u_n) محدودة من الاسفل $-1\le u_n$ ومتناقصة فانها متقاربة .... $(025.)$

لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بـ: $v_n=\frac{1}{u_n+1}$.

أ) $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+1}=\frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n+3}+1}=\frac{1}{\frac{2u_n+2}{u_n+3}}=\frac{u_n+3}{2u_n+2}=\frac{u_n+1+2}{2(u_n+1)}=\frac{2}{2(u_n+1)}+\frac{u_n+1}{2(u_n+1)}=v_n+\frac{1}{2}$ ومنه (v_n)

متتالية حسابية اساسها $r=\frac{1}{2}$ و حدها الاول $v_0=1$ .... $(0.25+\ 0.5)$

ب) - $v_n=v_0+rn=1+\frac{1}{2}n=1+0.5n$ . ... (0.25)

- لدينا $v_n=\frac{1}{u_n+1}$ و منه $u_n=\frac{1-v_n}{v_n}=\frac{1}{v_n}-1=\frac{1}{1+0.5n}-1$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+0.5n}-1=-1$ ...$(0.25+0.25)$

ت) $S_n=u_0v_0+u_1v_1+u_2v_2+....+u_nv_n=\left(\frac{1-v_0}{v_0}\right)v_0+\left(\frac{1-v_1}{v_1}\right)v_1+......+\left(\frac{1-v_n}{v_n}\right)v_n$ ومنه

$S_n=(1-v_0)+(1-v_1)+....+(1-v_n)=(n+1)-\frac{0.5^{n+1}-1}{-0.5}$.................................. (0.5)

التملرين الثاني

1) لدينا عدد الامكانيا $C_{10}^3=120$ ومنه $p(\text{A})=\frac{C_4^3+C_3^3+C_3^3}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$, $p(B)=\frac{C_8^3}{120}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$,

$p(C)=\frac{C_4^1\times C_3^1\times C_3^1}{120}=\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$ .... $(0.5+0.5+0.5)$

2) $p(A\cap B)=\frac{C_3^3+C_3^3}{120}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$. $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1/60}{1/20}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ .... $(0.5+0.5)$

- الحادثتان A و B ليست مستقلتان.. (0.25)

3) - قيم المتغير الشوائي X هي $X=\{1;2;3\}$ .... (0.25)

- قانون احتمال X .... (3×0.25)

x_i	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{C_2^2\times C_8^1}{120}=\frac{8}{120}$	$\frac{C_2^1\times C_8^2}{120}=\frac{56}{120}$	$\frac{C_8^3}{120}=\frac{56}{120}$

- $E(\text{X})=\sum_{i=1}^{4}x_i.p_i=1\times\frac{8}{120}+2\times\frac{56}{120}+3\times\frac{56}{120}=\frac{432}{120}=3.6$ .... (0.25)

التمرين الثالث

$(z+2)(z^2-2z+4)=0$ يعني ان $z+2=0$ او $z^2-2z+4=0$ ومنه $z=-2$ او $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12$ اذن

$\sqrt{\Delta}=2i\sqrt{3}$ ومنه $z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ و $z_1=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ ومنه المعادلة تقبل ثلاث حلول هي

$S=\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3};-2\}$ .... (0.25 +0.25 +0.25+ 0.25)

1) أ) كتابة الاعداد z_A و z_B , z_B على الشكل الاسي

- لدينا $|z_A|=2$ ومنه $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}$ و بالتالي $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .... (0.5)

- لدينا $|z_B|=2$ ومنه $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_B)=-\frac{\pi}{3}$ و بالتالي $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .... (0.5)

- لدينا $|z_C|=2$ ومنه $\begin{cases}\cos(\theta)=-1\\ \sin(\theta)=0\end{cases}$ ومنه $\arg(z_C)=\pi$ و بالتالي $z_C=2e^{i\pi}$ .... (0.5)

ب) $z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\lambda z_C}{\alpha+\beta+\lambda}=\frac{1+i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}-4}{2}=\frac{-4+2i\sqrt{3}}{2}=-2+i\sqrt{3}$ .... (0.5)

ت)- $|L|=\left|\frac{1-i\sqrt{3}+2}{1+i\sqrt{3}+2}\right|=\left|\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12}}=1$ اي $CB=CA$ .... (0.25)

- $\arg(L)=\arg\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}\right)=\arg(3-i\sqrt{3})-\arg(3+i\sqrt{3})=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$ منه $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})=60^0$ .... (0.25)

- المثلث ABC متقايس الاضلاع .... (0.25)

2) $|z-1+i\sqrt{3}|=2$ يعني $|z_M-z_B|=2$ ومنه $MB=2$ ومنه مجوعة النقط هي دائرة مركزها $B(1;\sqrt{3})$ ونصف قطرها $r=2$ .... (0.25)

3) $ADBC$ متوازي اضلاع يعني $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ اي $z_D-z_A=z_B-z_C$ ومنه $x+iy-1-i\sqrt{3}=1-i\sqrt{3}+2$ وبالتالي $x+iy=4$ اذن $x=4$ و $y=0$ ومنه $z_D=4$ .... (0.25)

التمرين الرابع

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^x+x+1$

1) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ .... (025. + 0.25).

2) لدينا $g'(x)=e^x+1$ وبما ان $e^x>0$ اذن $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ .... (0.25+ 0.25)

- جدول تغيرات الدالة g .... (0.25)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

3) لدينا $g(-1.3)=-0.027$ و $g(-1.2)=0.1$ بما ان الدالة g مستمرة و رتيبة على $\mathbb{R}$ و $g(-1.3)\times g(-1.2)<0$ فان

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-1.3<\alpha<-1.2$ .... ((0.5)

- اشارة $g(x)$ في الجدول المقابل .... (0.25).

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ (وذلك حسب خاصية التزايد المقارن $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$) .... (0.25)

- التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب افقي عند $-\infty$ معادلته $y=0$ (محور الفواصل)................. (0.25)

ب) $x-\frac{x}{e^x+1}=\frac{xe^x+x-x}{e^x+1}=\frac{xe^x}{e^x+1}=f(x)$ .... (0.25)

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{e^x+1}\right)=+\infty$ (لان $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x+1}\right)=0$ حسب الخاصية $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$)..................(0.25)

2) $f'(x)=\frac{(e^x+xe^x)(e^x+1)-e^x(xe^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x+xe^{2x}+xe^x-xe^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x.g(x)}{(e^x+1)^2}$ ....(0.5)

-. ومنه نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن الدالة f متزايدة على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty;\alpha]$ ....(0.25)

--. حدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$			
$f(x)$	0 ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

................(0.25)

3) $f(\alpha)-\alpha-1=\frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}-\alpha-1=\frac{-(e^\alpha+\alpha+1)}{e^\alpha+1}=\frac{-g(\alpha)}{e^\alpha+1}=0$ ومنه $f(\alpha)=\alpha+1$....................(0.25)

- لدينا $-1.3<\alpha<-1.2$ ومنه $-0.3<\alpha+1<-0.2$ اذن $-0.3<f(\alpha)<-0.2$ ....(0.25)

4) لدينا $f(0)=0$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$ ومنه معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 هي

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ اي $y=\frac{1}{2}x$ ....(0.5)

5) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x+1}\right)=0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ....(0.25)

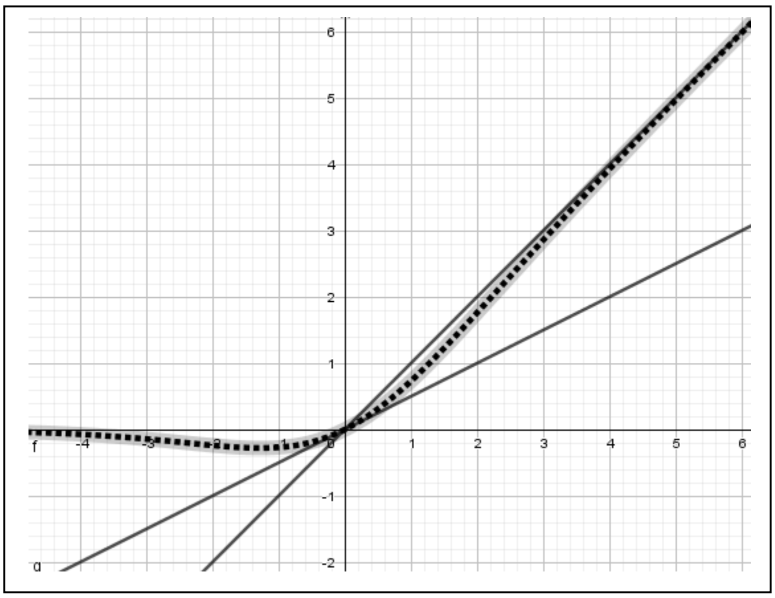
- دراسة الوضع النسبي: لدين $f(x)-y=-\frac{x}{e^x+1}$ وبما ان $e^x+1>0$ فان اشارة $f(x)-y$ من اشارة $-x$ ومنه

(3×0.25)...........

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f)يقطع (Δ)	(C_f)يقع تحت (Δ)

.

6) التمثيل (Δ)و (T) و (C_f) ....(0.5+ 0.25+ 0.25.)



7) المناقشة البيانية ....(0.5)

لدينا $xe^x-m(e^x+1)=0$ ومنه نجد $m=\frac{xe^x}{e^x+1}$يعني

حل المعادلة $f(x)=m$ زمنه

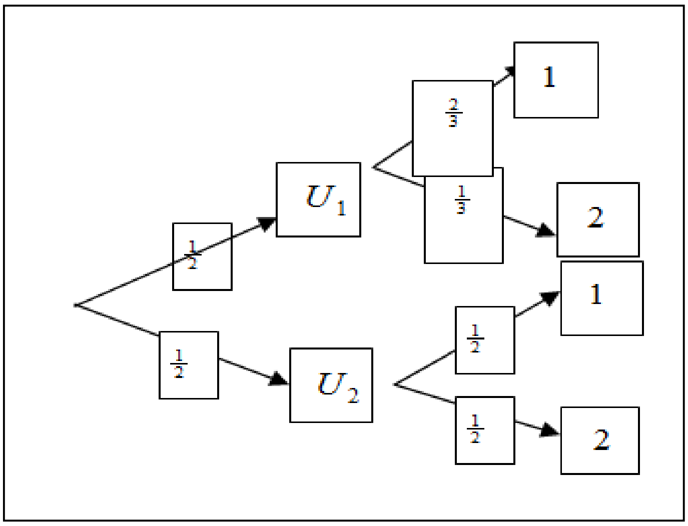
- اذا كان $m=0$ المعادلة تقبل حلا واحدا $x=0$
- اذا كان $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلا واحدا $x=\alpha$
- اذا كان $f(\alpha)<m<0$ المعادلة تقبل حلان سالبان .
- اذا كان $m>0$ المعادلة تقبل حلا واحدا موجب
- اذا كان $m<f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلولا

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الاول :

(III

كرية واحدة عشوائيا .



1) شجرة الاحتمال ....(0.5)

2) احتمال سحب كرية تحمل رقم 1 هو

$$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\text{...........(0.5)}$$

$$(3\quad p_A(U_1)=\frac{p(A\cap U_1)}{p(A)}=\frac{2/6}{7/12}=\frac{2}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{4}{7}\text{..........(0.5)}$$

IV) نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد ثم نسحب **كريتين على التوالي بدون ارجاع .**

1) $p(B)$ أحتمال سحب كريتين من نفس الرقم هو $\frac{A_6^2+A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

2) أ) قيم المتغير العشوائي X الممكنة هي $X=\{2;3;4\}$ ....(0.5)

ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X.. .... (3×0.5)

x_i	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{A_6^2}{90}=\frac{30}{90}=\frac{5}{15}$	$\frac{2A_6^1\times A_4^1}{90}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$	$\frac{A_4^2}{90}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i.p_i=2\times\frac{5}{15}+3\times\frac{8}{15}+4\times\frac{2}{15}=\frac{46}{15}=3.06\text{.........................(0.25)}$$

التمرين الثاني

1) الرهان بالتراجع : أ) (لدينا $u_0=\frac{13}{4}$ و منه $3\le u_0\le 4$ ب.) نفرض ان $3\le u_n\le 4$ ثم نبرهن $3\le u_{n+1}\le 4$.........(0.5)

- لدينا من الفرضية $3\le u_n\le 4$ ومنه $0\le u_n-3\le 1$ اذن $0\le\sqrt{u_n-3}\le 1$ ومنه $3\le 3+\sqrt{u_n-3}\le 4$ وبالتالي

$3\le u_{n+1}\le 4$ ومنه برهنا ان $3\le u_n\le 4$ ....(0.5)

2) أ) $u_{n+1}-u_n=3+\sqrt{u_n-3}-u_n=\frac{(\sqrt{u_n-3}+(3-u_n))(\sqrt{u_n-3}-(3-u_n))}{\sqrt{u_n-3}-(u_n+3)}=\frac{-u_n^{\,2}+7u_n-12}{\sqrt{u_n-3}+u_n-3}$.........(0.5)

ب) لدينا $\left(\sqrt{u_n-3}+u_n-3\right)>0$ ومنه اشارة $u_{n+1}-u_n$ من اشارة $-u_n^{\,2}+7u_n-12$ اذن لدينا

$\Delta=(7)^2-4\times(-1)\times(-12)=1$ ومنه $x_1=3$ و $x_2=4$ اذن اشارة $u_{n+1}-u_n$ في الجدول المقابل

u_n	$-\infty$	3		4		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$	-	0	+	0	-	

بما ان $3\le u_n\le 4$ فان المتتالية (u_n) متزايدة تماما . ...(0.5)

ب) بما ان المتتالية (u_n) متزايدة تماماومحدودة فانها متقاربة ....(0.25)

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية بـ: $v_n=\ln(u_n-3)$.

أ) $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-3)=\ln(3+\sqrt{u_n-3}-3)=\ln(\sqrt{u_n-3})=\frac{1}{2}\ln(u_n-3)=\frac{1}{2}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

وحدها الاول $V_0=\ln(\frac{13}{4}-3)=\ln(\frac{1}{4})=-\ln(4)$ ....(0.25 + 0.5)

ب) $v_n=v_0\times q^n=-\ln(4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ....(0.25)

لدينا $v_n=\ln(u_n-3)$ ومنه $u_n-3=e^{v_n}$ وبالتالي $u_n=e^{v_n}+3=e^{-\ln(4)\times(\frac{1}{2})^n}+3$..................................(0.25)

ومنه $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(e^{-\ln(4)\times(\frac{1}{2})^n}+3)=4$ ....(0.25)

$$P_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times(u_2-3)\times....\times(u_n-3)=(e^{v_0}+3-3)\times(e^{v_1}+3-3)\times(e^{v_2}+3-3)\times....\times(e^{v_n}+3-3)$$

(0.5).. $p_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times e^{v_2}\times....\times e^{v_n}=e^{(v_0+v_1+v_2+..v_n)}=e^{-\ln(4)\times\frac{0.5^{n+1}-1}{0.5-1}}$

التمرين الثالث

نعتبر كثير حدود $P(z)=z^3-4z^2+6z-4$

1) $P(2)=2^3-4\times(2)^2+6\times2-4=8-16+12-4=0$ نستنتج ان 2 جذرا لـ ر $P(z)$ ....(0.25 +0.25)

2) باستعمال القسمة الاقليدية لـ $P(z)$ على $(z-2)$ نجد z^2-2z+2 ....(0.5)

نحل المعادلة $z^2-2z+2=0$ أي $\Delta=(-2)^2-4\times1\times2=-4$ أي $\sqrt{\Delta}=2i$ ومنه المعادلة تقبل حلان هما $z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$

و $z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$ ومنه المعادلة $p(z)=0$ تقبل ثلاث حلول هي $S=\{1+i;1-i;2\}$ ....(0.5)

نعتبر الاعداد المركبة التالية $z_0=1+i$, $z_1=-2+2i\sqrt{3}$ و $Z_2=z_0.z_1$ و $Z_3=\frac{z_1}{z_0}$.

1) - لدينا $|z_0|=\sqrt{2}$ ومنه $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_0)=\frac{\pi}{4}$ و بالتالي $z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ....(0.5)

- لدينا $|z_1|=4$ ومنه $\begin{cases}\cos(\theta)=-\frac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_1)=\frac{2\pi}{3}$ و بالتالي $z_1=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ....(0.5)

- $Z_2=z_0.z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times4e^{i\frac{2\pi}{3}}=4\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})}=4\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$ ....(0.25)

- $Z_3=\frac{z_1}{z_0}=\frac{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ....(0.25)

2) أ) $Z_2=z_0.z_1=(1+i)(-2+i\sqrt{3})=-2+i\sqrt{3}-2i+i^2\sqrt{3}=(-2-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-2)i$ ....(0.5)

ب) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{-2-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ و $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)=\frac{2+i\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ ....(0.25 + 0.25)

3) $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{2018}=\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^{2018}=\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2018}=e^{i\frac{2018\pi}{4}}=e^{i(504\pi+\frac{2\pi}{4})}=e^{i\frac{\pi}{2}}=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})=i$ ....(0.5)

4) يكون $(Z_3)^n$ حقيقيا اذا كانت عمدته من الشكل $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ اذن لدينا $(Z_3)^n=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{12}}$ يكون $(Z_3)^n$ حقيقيا اذا

كان $\frac{5n\pi}{12}=k\pi$ أي $n=12\pi$ حيث $(k\in\mathbb{Z})$ ....(0.5)

التمرين الرابع .

I) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=x^2-1+\ln(x)$

1) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ و $\lim_{\substack{x\to0\\>}}h(x)=-\infty$ ....(025. + 0.25).

2) لدينا $h'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$ وبما ان $x>0$ اذ $h'(x)>0$ ومنه h متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ....(0.25+ 0.25)

- جدول تغيرات الدالة g ....(0.25)

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3) $h(1)=1-1+\ln(1)=0$ ....(0.25)

- اشارة $h(x)$ في الجدول المقابل ....(0.25).

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$	0	$+$

-

(II نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-1-\frac{\ln(x)}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (وذلك من خاصية التزايد المقارن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$)..(0.25)

ب) $\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=+\infty$ ونفسر النتيجة المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=0$ (محور التراتيب)..............(0.25+ 0.25)

2) أ) $f'(x)=1-\frac{1-\ln(x)}{x^2}=\frac{x^2-1+l(x)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}$ ....(0.5)

ب) ومنه نستنتج ان اشارة $f'(x)$ من اشارة $h(x)$ اذن الدالة f متزايدة على $[1;+\infty[$ ومتناقصة على $]0;1]$ ....(0.5)

جدول التغيرات ....(0.5)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right)=0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$ ....(0.25)

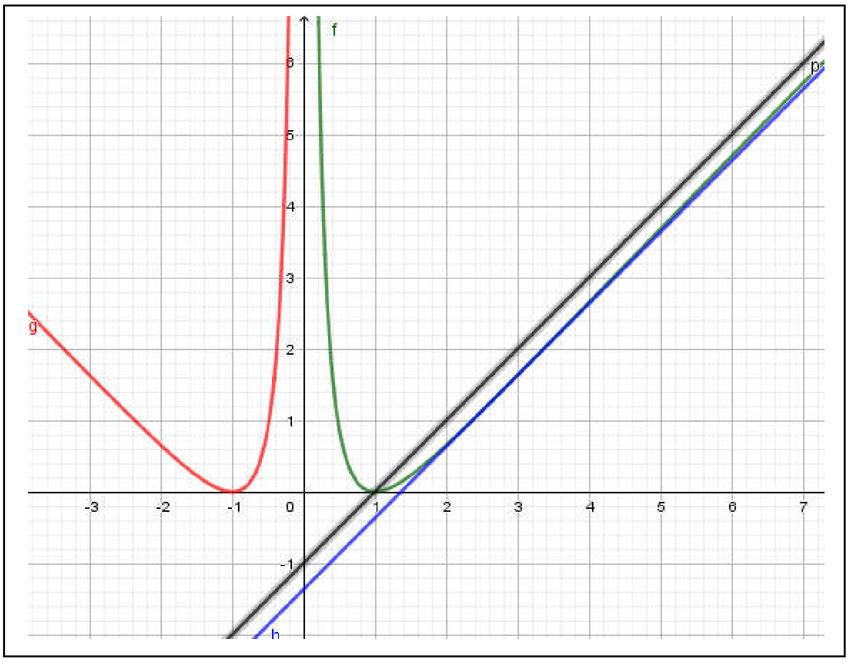
- دراسة الوضع النسبي: لديا $f(x)-y=-\frac{\ln(x)}{x}$ وبما ان $x>0$ فان اشارة $f(x)-y$ من اشارة $-ln(x)$ ومنه

(3×0.25)............

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$		+	0	-	
الوضع النسبي		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

4) نحل المعادلة $f'(x)=1$ أي $\frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2}=1$ يعني $x^2-1+\ln(x)=x^2$ ومنه $\ln(x)=1$ أي $x=e$ وبالتالي المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-1-e^{-1}$ يمس المنحني (C_f) في نقطة A ذات الفاصلة e اي $A(e;e-1-e^{-1})$ ....(0.5)

5) رسم التمثيل ....(05+0.25+0.25)



6) اشرح طريقة لرسم التمثيل البياني للدالة g باستعمال التمثيل البياني (C_f) ....(0.5)

- على المجال $]0;+\infty[$ التمثيل البياني للدالة g يكون منطبق على المنحنى (C_f).

- على المجال $]-\infty;0[$ التمثيل البياني للدالة g يكون نظير المنحنى (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .

بالتوفيق للجميع في شهادة الباكالوريا 2020