التمرين الأول: 04 نقاط:

المتتالية المعرّفة بحدّها الأول $\left(u_n\right)$ $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$

1- أحسب $u_1; u_2$ و u_3:

$$u_1=\frac{2}{3}u_0+1=\frac{2}{3}(2)+1=\frac{7}{3}$$
$$u_2=\frac{2}{3}u_1+1=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{3}\right)+1=\frac{23}{9}$$
$$u_3=\frac{2}{3}u_2+1=\frac{2}{3}\left(\frac{23}{9}\right)+1=\frac{73}{27}$$

2- $\left(v_n\right)$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــــ: $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

أ) البرهان بالتراجع أن $\left(v_n\right)$ متتالية ثابتة:

$\left(v_n\right)$ متتالية ثابتة معناه $v_{n+1}=v_n$ نضع $P(n): v_{n+1}=v_n$

- من أجل $n=0$ أي $P(0): v_1=\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=3=v_0$ صحيحة
- نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n ونثبت صحة $P(n+1)$ حيث $P(n+1): v_{n+2}=v_{n+1}$

لدينا من فرضية التراجع $v_{n+1}=v_n$

ومنه $u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$

بضرب الطرفي في $\frac{2}{3}$ نجد $\frac{2}{3}u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}=\frac{2}{3}u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

بإضافة للطرفي 1 نجد $\frac{2}{3}u_{n+1}+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}=\frac{2}{3}u_n+1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

ومنه $u_{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}=u_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ وبالتالي $v_{n+2}=v_{n+1}$ ومنه $P(n+1): v_{n+2}=v_{n+1}$ صحيحة

إذن $\left(v_n\right)$ متتالية ثابتة

ب) استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا مما سبق $\left(v_n\right)$ متتالية ثابتة وبالتالي $v_n=v_0=3$

لدينا $v_n=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $3=u_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$ وهذا يعني أن $u_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[3-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=3$ لأن $0<\frac{2}{3}<1$

3- $\left(w_n\right)$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــــ: $w_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$

- حساب المجموع S حيث: $S=w_0+w_1+w_2+.....+w_n$

$$S=\frac{2}{3}(0)-\left(\frac{2}{3}\right)^0+\frac{2}{3}(1)-\left(\frac{2}{3}\right)^1+\frac{2}{3}(2)-\left(\frac{2}{3}\right)^2+.....+\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$S=\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(-1+\frac{2}{3}n\right)-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}$ إذن $S=\frac{(n+1)(3-2n)}{6}+3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)$

التمرين الثاني: **06 نقاط** يحتوي صندوق على **4** كرات حمراء وكرتين سوداوين لا يمكن التمييز بينها باللمس.

1- نسحب عشوائيا بالتتابع ودون إرجاع كرتين من الصندوق: بما أننا في حالة تساوي الاحتمال فإن:

- حساب احتمال كل حادثة من الأحداث التالية:

A_0 <لم تسحب أي كرة سوداء>: $P(A_0)=\frac{A_4^2}{A_6^2}$ إذن $P(A_0)=\frac{4\times 3}{6\times 5}=\frac{2}{5}$

A_1 <سحبت كرة واحدة سوداء بالضبط>: $P(A_1)=\frac{2\times A_4^1\times A_2^1}{A_6^2}$ إذن $P(A_1)=\frac{2\times 4\times 2}{6\times 5}=\frac{8}{15}$

A_2 <الكرتين المسحوبتين سوداويين>: $P(A_2)=\frac{A_2^2}{A_6^2}$ إذن $P(A_2)=\frac{2\times 1}{6\times 5}=\frac{1}{15}$

2- بعد السحب الأول بقيت في الصندوق أربع كريات، نجري سحبا ثانيا لكرتين بالتتابع ودون إرجاع ونعتبر الأحداث التالية: B_0 < لم تسحب أية كرة سوداء عند السحب الثاني>

B_1 <سحبت بالضبط كرة واحدة سوداء عند السحب الثاني>

B_2 <الكرتين المسحوبتين عند السحب الثاني سوداوين>

أ- حساب الاحتمالات التالية: $P_{A_0}(B_0);P_{A_1}(B_0)$ و $P_{A_2}(B_0)$:

- إذا تحقق الحدث A_0 فإن الصندوق يحتوي على كرتين حمراوين وكرتين سوداوين، إذن

$P_{A_0}(B_0)=\frac{A_2^2}{A_4^2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

لدينا في هذه الحالة أيضا: $P_{A_0}(B_1)=\frac{2\times A_2^1\times A_2^1}{A_4^2}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ و $P_{A_0}(B_2)=\frac{A_2^2}{A_4^2}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

- إذا تحقق الحدث A_1 فإن الصندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة سوداء، إذن

$P_{A_1}(B_0)=\frac{A_3^2}{A_4^2}=\frac{3\times 2}{12}=\frac{1}{2}$

وفي هذه الحالة يكون لدينا: $P_{A_1}(B_1)=\frac{2\times A_3^1\times A_1^1}{A_4^2}=\frac{2\times 3\times 1}{12}=\frac{1}{2}$

و $P_{A_1}(B_2)=\frac{0}{A_4^2}=0$ (لا يمكن سحب كرتين سوداوين لأن الصندوق يحتوي على كرة واحدة سوداء)

- إذا تحقق الحدث A_2 فإن الصندوق يحتوي على **04** كرات حمراء فقط، إذن $P_{A_2}(B_1)=P_{A_2}(B_2)=0$ و

$P_{A_2}(B_0)=1$

- نستنتج الآن $P(B_0);P(B_1)$ و $P(B_2)$: بتطبيق صيغة الاحتمالات الكلية نحصل على:

$P(B_0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\times 1=\frac{1+4+1}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

$P(B_1)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{15}\times 0=\frac{4+4}{15}=\frac{8}{15}$

$P(B_2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{8}{15}\times 0+\frac{1}{15}\times 0=\frac{1}{15}$

نلاحظ انه في هذه الحالة لدينا $P(B_0)+P(B_1)+P(B_2)=1$

ج- إذا علمت أنه عند السحب الثاني حصلنا على كرة سوداء بالضبط، ما هو احتمال الحصول على كرة واحدة سوداء بالضبط عند السحب الأول: نحسب الاحتمال الشرطي $P_{B_1}(A_1)$:

$P_{B_1}(A_1)=\dfrac{P(A_1\cap B_1)}{P(B_1)}=\dfrac{P(A_1)\times P_{A_1}(B_1)}{P(B_1)}$ إذن $P_{B_1}(A_1)=\dfrac{\frac{8}{15}\times\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{1}{2}$

3- نعتبر الحادثة: R < لكي تسحب الكرتين السوداوين تم بالضبط إجراء السحب الأول والسحب الثاني>

أي أن $P(R)=P(R\cap A_0)+P(R\cap A_1)$ وبالتالي $P(R)=P(A_0)P_{A_0}(R)+P(A_1)P_{A_1}(R)$

وهذا يعني أن $P(R)=P(A_0)P_{A_0}(B_2)+P(A_1)P_{A_1}(B_1)$

- بيان أن $P(R)=\dfrac{1}{3}$: $P(R)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{8}{15}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

4- نسحب هذه المرة عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الصندوق، فان كل سحب ممكنة عبارة عن توفيقة لـ 3 عناصر من بين 6 إذن: عدد عناصر مجموعة الإمكانيات: $card(\Omega)=C_6^3=20$

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة ممكنة بعدد الكرات الحمراء المكونة لها. قيم المتغير العشوائي هي:

$X\in\{1;2;3\}$

- تحدد قانون احتمال المتغير العشوائي X:

من أجل $X=1$: $P(X=1)=\dfrac{C_4^1\times C_2^2}{20}=\dfrac{1}{5}$

من أجل $X=2$: $P(X=2)=\dfrac{C_4^2\times C_2^1}{20}=\dfrac{3}{5}$

من أجل $X=3$: $P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{20}=\dfrac{1}{5}$

- حساب الأمل الرياضي $E(X)$: $E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$

حل التمرين الثالث: 10 نقاط

.I لدينا: $f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right);D_f=\mathbb{R}$

1- أ- التحقق أنه من أجل كل x: $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$

$e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}\right)^2-2\sqrt{e^x}+1+1=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$ إذن $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1$

- الاستنتاج أن f معرفة على $\mathbb{R}$: بما أن $e^x-2\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1>0$ فإن $D_f=\mathbb{R}$

ب- بيان أن من أجل كل عدد حقيقي x: $1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}>0$

لدينا مما سبق $e^x-2\sqrt{e^x}+2>0$ هذا يعني أن $\dfrac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}>0$ وبالتالي $1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}>0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x: $1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}>0$

2- حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)$: $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=+\infty$

- بيان أن $\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)=\ln(4)$

$\lim\limits_{n\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to-\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=2\ln(2)=\ln(4)$ لأن $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1\right)=2$

- تفسر النتيجة هندسيا.

يقبل (C_f) مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته $y=ln(4)$ بجوار $-\infty$

3- أ-بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ ثم تحقق أن $f'(0)=0$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=2\dfrac{e^x-\sqrt{e^x}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}$ وبالتالي $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$

- التحقق أن $f'(0)=0$: $f'(0)=\dfrac{2\sqrt{e^0}\left(\sqrt{e^0}-1\right)}{\left(\sqrt{e^0}-1\right)^2+1}=0$

ب-أدرس إشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)$ على $\mathbb{R}$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: لدينا $\sqrt{e^x}-1=\dfrac{e^x-1}{\sqrt{e^x}+1}$ إذن إشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)$ على $\mathbb{R}$ من إشارة $\left(e^x-1\right)$

من أجل $x\le 0$ لدينا $e^x\le 1$ وبالتالي $e^x-1\le 0$ و هذا يعني من أجل $x\in]-\infty;0]$ فإن $\sqrt{e^x}-1\le 0$

من أجل $x\ge 0$ لدينا $e^x\ge 1$ وبالتالي $e^x-1\ge 0$ و هذا يعني من أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن $\sqrt{e^x}-1\ge 0$

- الاستنتاج أن متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$.

بما أن $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ من أجل كل عدد حقيقي x، فإن $f'(x)$ إشارة من إشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)$

وعليه من أجل $x\in]-\infty;0]$ فإن $f'(x)\le 0$ ومن أجل $x\in[0;+\infty[$ فإن $f'(x)\ge 0$

إذن f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4- أ-التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=2x+2ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)$

لدينا $f(x)=2ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$ ومنه $f(x)=2ln\left(e^x\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)\right)$

وبالتالي $f(x)=2ln\left(e^x\right)+2ln\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}\right)$

إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$

ب-بيان أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى بجوار $+\infty$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=0$

فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى بجوار $+\infty$

5- أ-التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$

من أجل كل عدد حقيقي x : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)=e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2=e^x-3\sqrt{e^x}+2$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$

ب-أدرس إشارة $\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ و $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ على $\mathbb{R}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: لدينا $\sqrt{e^x}-2=\frac{e^x-4}{\sqrt{e^x}+2}$ إذن إشارة $\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ على $\mathbb{R}$ من إشارة $\left(e^x-4\right)$

نضع $e^x-4=0$ هذا يكافئ $e^x=4$ وبالتالي $x=\ln(4)$ ومنه فإن جدول إشارة $\left(\sqrt{e^x}-2\right)$

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$	0	$+$	

لدينا مما سبق إشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)$ إذن إشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج-استنتاج أنه من أجل كل x من $[0;\ln(4)]$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$

لدينا مما سبق (جدول الإشارة $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$)

من أجل كل x من $[0;\ln(4)]$: $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)\le 0$ وبالتالي $e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2\le 0$

وهذا يعني أنه من أجل كل x من $[0;\ln(4)]$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$

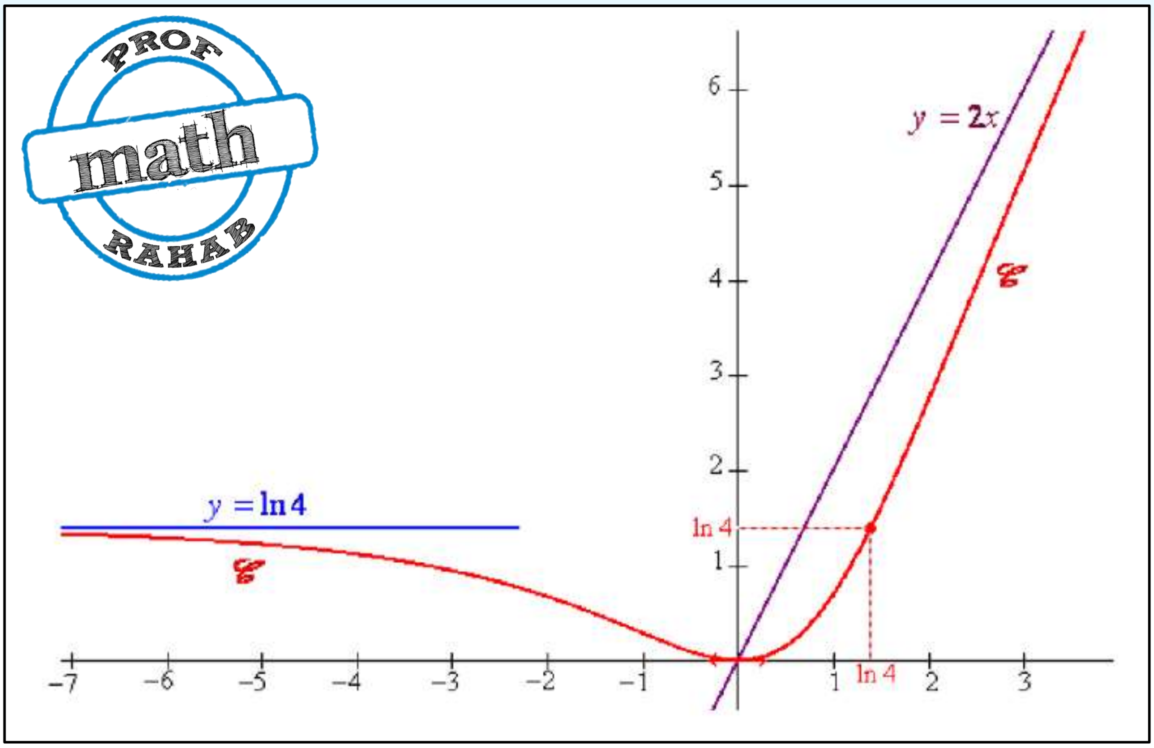
د-بيان أنه من أجل كل x من $[0;\ln(4)]$: $f(x)\le x$

لدينا مما سبق (السؤال السابق) من أجل كل x من $[0;\ln(4)]$: $e^x-2\sqrt{e^x}+2\le\sqrt{e^x}$

وبالتالي $\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\le\ln\left(\sqrt{e^x}\right)$

وهذا يعني أنه من أجل كل x من $[0;ln(4)]$: $f(x)\le x$

6- أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f) (نقبل أن يقبل نقطتي انعطاف فاصلة إحداهما أصغر من وفاصلة الأخرى أكبر من تحديدهما ليس مطلوب ونأخذ $ln(4)=1.4$)



II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$

يمكنك فيما يلي استعمال نتائج دراسة الدالة f

1- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le ln(4)$

باستعمال البرهان بالتراجع: نضع $P(n):0\le u_n\le \ln(4)$

- من أجل $n=0$ أي $P(0):0\le u_0=1\le ln(4)$ صحيحة
- نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n ونثبت صحة $P(n+1)$ حيث $P(n):0\le u_{n+1}\le \ln(4)$

لدينا من فرضية التراجع $0\le u_n\le ln(4)$ ولدينا f متزايدة تماما على المجال $[0;ln(4)]$

ومنه $f(0)\le f(u_n)\le f(ln(4))$ حيث $f(ln(4))=ln(4)$; $f(0)=0$

وبالتالي $0\le f(u_n)\le ln(4)$

ومنه $P(n):0\le u_{n+1}\le \ln(4)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le ln(4)$

2- بيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

نعلم أنه من أجل كل x من $[0;ln(4)]$: $f(x)\le x$ وأنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le ln(4)$

إذن $f(u_n)\le u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n أي أن $u_{n+1}\le u_n$

وبالتالي فإن (u_n) متناقصة تماما.

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـــ 0 فهي إذن متقاربة.

- تحديد نهايتها.

لدينا (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي وليكن l

ولدينا أيضا f مستمرة على $[0;ln(4)]$

وبالتالي النهاية l تحقق الشرطين: $\begin{cases} l\in[0;ln(4)] \\ f(l)=l \end{cases}$

$f(l)=l$ معناه $2ln\left(e^l-2\sqrt{e^l}+2\right)=l$ وهذا يعني أن $ln\left(e^l-2\sqrt{e^l}+2\right)=\frac{l}{2}$

وبالتالي $e^l-2\sqrt{e^l}+2=e^{\frac{l}{2}}$ وهذا يعني $e^l-3\sqrt{e^l}+2=0$ وهذا يكافئ $\left(\sqrt{e^l}-1\right)\left(\sqrt{e^l}-2\right)=0$

وبالتالي $\begin{cases} \sqrt{e^l}-1=0 \\ \sqrt{e^l}-2=0 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} e^l=1 \\ e^l=4 \end{cases}$ وهذا يعني أن $\boxed{\begin{cases} l=0 \\ l=ln(4) \end{cases}}$

بما أن (u_n) متناقصة تماما فإن $u_n\le u_0=1$ من أجل كل عدد طبيعي n وبالتالي $l\le 1$

إذن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n=0}$