الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية : .... **الموسم الدراسي : 2019–2020**

المستوى : النهائي شعب علمية **المدة : 03 ساعات**

إختبار الثلاثي الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (00 نقاط)

نعتبرالمستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

✍ فيما يلي إختر الإجابة الصحيحة في كل مرة مع التعليل :

1) في المجموعة $\mathbb{C}$ حلول المعادلة التالية $2z-i\overline{z}=5-4i$ هو :

أ) $z=2+i$ ب) $z=2-i$ ج) $z=2i$

2) مجموعة حلول المعادلة $\frac{z-2}{z-1}=2$ في $\mathbb{C}$ مع $(z\neq 1)$ هي :

أ) $S=\{1-i\}$ ب) $S=\varnothing$ ج) $S=\{1-i;1+i\}$

3) نعتبر العدد المركب $z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ، العدد z^2 يساوي :

أ) $\frac{1}{2}-i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{1}{2}$

4) نعتبر z عدد مركب غير معدوم عمدته θ ، عمدة العدد المركب $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\overline{z}}$ هي :

أ) $-\frac{\pi}{3}+\theta$ ب) $\frac{2\pi}{3}+\theta$ ج) $\frac{2\pi}{3}-\theta$

5) نعتبر n عدد طبيعي ، يكون العدد $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا كان :

أ) $n=3$ ب) $n=6k+3$ مع $(k\in\mathbb{Z})$ ج) $n=6k$ مع $(k\in\mathbb{Z})$

6) نعتبر A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب i و -1 مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|z-i|=|z+1|$ هي :

أ) المستقيم (AB) ب) الدائرة التي قطرها $[AB]$ ج) المستقيم العمودي على (AB) و المار بالمبدأ O

7) نعتبر A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب 4 و $3i$ ، لاحقة النقطة C بحيث يكون $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ هي :

أ) $1-4i$ ب) $-3i$ ج) $7+4i$

التمرين الثاني: (00 نقاط)

تحتوي علبة على 10 قريصات حيث : 4 قريصات بيضاء تحمل الرقم 0 ، 3 قريصات حمراء تحمل الرقم 7 ، قريصتان بيضاوتان تحملان الرقم 2 و قريصة واحدة حمراء تحمل الرقم 5 ، القريصات كلها متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس .

1) نسحب عشوائيا و في آن واحد من العلبة 4 قريصات .

أ) مـــا هو عدد السحبات الممكنة ؟ .

إقلب الصفحة

ب) أحسب إحتمال كل حادثة من الأحداث التالية :

*) A : " الأرقام المسحوبة كلها متساوية " . *) B : " بالأرقام المسحوبة يمكن تشكيل العدد 2000 " .

*) C : " القريصات المسحوبة كلها بيضاء " . *) D : " القريصات المسحوبة من نفس اللون " .

*) E : " يوجد في السحب على الأقل قريصة تحمل رقما مختلفا عن الأرقام الأخرى " .

ج) علمـــاً أن الحادثة C محققة ، أحسب إحتمال الحادثة B .

3) نعتبر اللعبة التالية : يأتي لاعب و يقوم بالتجربة أعلاه

- إذا كان بإمكان اللاعب بعد السحب تشكيل العدد 5000 فإنه سيربح $15DA$.
- إذا كان بإمكان اللاعب بعد السحب تشكيل العدد 7000 فإنه سيربح $10DA$.
- إذا كان بإمكان اللاعب بعد السحب تشكيل العدد 2000 فإنه سيربح $4DA$.
- إذا كان بإمكان اللاعب بعد السحب تشكيل العدد 0000 فإنه سيخسر $5DA$.
- أمـــــا في باقي السحبات فإنه سيخسر $1DA$.

نعتبر X هو المتغير العشوائي الذي يساوي قيمة الربح الجبري للاعب .

❖ أكتب قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (00 نقاط)

نعرف على المجموعة $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+u_n^2}{1+u_n} \end{cases}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$.

2) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $3-u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}(3-u_n)$.

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n < 3$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة .

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $\dfrac{u_n}{1+u_n} - \dfrac{3}{4} < 0$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 < 3-u_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n (3-u_0)$.

ج) إستنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع: (00 نقاط)

I) 1) أ) أدرس إتجاه تغير الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^x - x - 1$.

ب) مـــا هي القيمة الحدية الصغرى للدالة g على $\mathbb{R}$ ؟ .

2) إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $e^x > x+1$ و $e^x > x$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$.

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$.

ب) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f'(x)=\dfrac{2(x-1)\times g(x)}{e^x-x}$.

ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيراتها . (نقبل أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$) .

3) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ و حدته $(3cm)$

نعتبر القطع المكافئ (P) الذي معادلته : $y=x^2-2x$ و (C) هو المنحني الممثل للدالة f .

أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2+2x\right]$ ، ثمّ فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C) .

4) أكتب معادلة كل من المماسين (D) ، (D') لــ (C) و (P) على الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) أنشئ في نفس المعلم كلا من : (D) ، (D') ، (P) و (P) .

التمرين الخامس: (00 نقاط) خاص بالنهائي شعبتي رياضيات و تقني رياضيات

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كالآتي : $\begin{cases} u_0=0 \quad , \quad u_1=1 \\ u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n \end{cases}$.

1) أحسب : u_2 ، u_3 ، u_4 ، u_5 و u_6 .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_{n+1}=2u_n+1$.

ب) إستنتج القاسم المشترك الأكبر لكل حدين متتاليين من المتتالية (u_n) .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n=2^n-1$.

ب) عين $PGCD(2^n-1;2^{n+1}-1)$ و ذلك من أجل كل عدد طبيعي n .

4) أ) تحقق أنه من أجل كل ثنائية $(n;p)$ من $\mathbb{N}^2$ يكون : $u_{n+p}=u_n(u_p+1)+u_p$.

ب) إستنتج من أجل كل ثنائية $(n;p)$ من $\mathbb{N}^2$ يكون : $PGCD(u_n;u_p)=PGCD(u_n;u_{n+p})$ ....(1) .

5) نعتبر a و b عددين حقيقيين غير معدومين و العدد r هو باقي قسمة a على b .

أ) إستنتج من (1) أن : $\begin{cases} PGCD(u_b;u_r)=PGCD(u_a;u_b) \\ PGCD(u_a;u_b)=u_{PGCD(a;b)} \end{cases}$.

ب) أحسب عندئذ : $PGCD(u_{2020};u_{1440})$.

إنتهـــــــى

الحـــــــل المفصل لإختبار الثلاثي الثانـــــي

حـــــل التمرين الأول: (00 نقاط)

إختيار الإجابة الصحيحة في كل مرة مع التعليل :

1) لدينا : $2z-i\bar{z}=5-4i$ ، بوضع : $z=a+ib$ يكون : $2(a+ib)-i(a-ib)=5-4i$ أي : $2a+2ib-ia-b=5-4i$

أي : $(2a-b)+i(2b-a)=5-4i$ و منه : $\begin{cases}2a-b=5\\2b-a=-4\end{cases}$ أي : $\begin{cases}2a-b=5\\4b-2a=-8\end{cases}$ بالجمع نجد : $3b=-3$ أي : $b=-1$

بالتعويض نجد : $a=2$. إذن الجواب الصحيح هو (ب) : $z=2-i$.

2) لدينا المعادلة $\frac{z-2}{z-1}=2$ تكافئ $z^2-z=z-2$ أي : $z^2-2z+2=0$ و منه : $z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$ و $z_2=1-i$.

إذن الجواب الصحيح هو (ج) : $S=\{1-i;1+i\}$.

3) لدينا : $z=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ أي : $z^2=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ أي : $z^2=\frac{4\sqrt{12}}{16}+2i\times\frac{4}{16}$ أي نجد :

$z^2=\frac{2\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{2}$ ، إذن الجواب الصحيح هو (ج) : $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$.

4) نعلم أن : $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right)=\arg\left(-1+i\sqrt{3}\right)-\arg\left(\bar{z}\right)$ أي : $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right)=\frac{2\pi}{3}-(-\theta)$

و منه : $\arg\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}\right)=\frac{2\pi}{3}+\theta$. إذن الجواب الصحيح هو (ب) : $\frac{2\pi}{3}+\theta$.

5) نعلم أن : $\left|\sqrt{3}+i\right|=2$ و $\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\frac{\pi}{6}$ ، إذن يكون العدد $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ تخيليا صرفا إذا كان :

$\arg\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $n.\arg\left(\sqrt{3}+i\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $n.\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $n.\pi=3\pi+6k\pi$

و منه : $n=3+6k$ مع $(k\in\mathbb{Z})$. إذن الجواب الصحيح هو (ب) : $n=6k+3$ مع $(k\in\mathbb{Z})$

6) لدينا : $|z-i|=|z+1|$ تعني : $AM=BM$ و منه مجموعة النقط M هي محور القطعة $[AB]$ و بما أن النقطة O تنتمي إلى هذا المحور (لأن : $OA=OB$) ، إذن مجموعة النقط M ستكون المستقيم المار بالمبدأ O و يعامد $[AB]$.

و عليه الجواب الصحيح هو (ج) : المستقيم العمودي على (AB) و المار بالمبدأ O .

7) لدينا : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن يكون : $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$ تخيلي صرف و $\mathrm{Im}\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)>0$.

لنحسب العدد : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{z_C-4}{3i-4}\times\frac{-4-3i}{-4-3i}=\frac{(z_C-4)(-4-3i)}{25}$ ، لنضع : $z_C=x+iy$ نجد :

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(x+iy-4)(-4-3i)}{25}=\frac{-4x-3ix-4iy+3y+16++12i}{25}=\left(\frac{-4x+3y+15}{25}\right)+i\left(\frac{-3x-4y+12}{25}\right)$$

إذن يكون : $-4x+3y+16=0$ و $-3x-4y+12>0$ و منه النقطة التي تحقق هذه الشروط هي $C(1;-4)$.

و عليه الجواب الصحيح هو (أ) : $1-4i$.

حــــــــل التمرين الثاني: (00 نقاط)

1) أ) عدد السحبات الممكنة هو : $C_{10}^{4}=210$.

ب) حساب إحتمال الأحداث التالية :

– الحدث A : يعني أن كل القريصات المسحوبة تحمل الرقم 0 أي : $p(A)=\dfrac{C_4^4}{210}=\dfrac{1}{210}$.

– الحدث B : أي قريصة تحمل الرقم 2 و ثلاث قريصات تحمل الرقم 0 و منه : $p(B)=\dfrac{C_2^1\times C_4^3}{210}=\dfrac{8}{210}=\dfrac{4}{105}$.

– الحدث C : أي القريصات كلها بيضاء و منه : $p(C)=\dfrac{C_6^4}{210}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$.

– الحدث D : أي 4 قريصات بيضاء أو 4 قريصات حمراء و منه : $p(D)=\dfrac{C_6^4+C_4^4}{210}=\dfrac{16}{210}=\dfrac{8}{105}$.

– الحدث E : هو الحدث العكسي للحدث A و منه : $p(E)=1-p(A)=1-\dfrac{1}{210}=\dfrac{209}{210}$.

ج) لنحسب الإحتمال الشرطي $p_C(B)$ ، أي : $p_C(B)=\dfrac{p(B\cap C)}{p(C)}$.

– الحدث $(B\cap C)$ يعني يمكن تشكيل العدد 2000 و القريصات كلها بيضاء أي : $p(B\cap C)=\dfrac{C_2^1\times C_4^3}{210}=\dfrac{8}{210}=\dfrac{4}{105}$

إذن : $p_C(B)=\dfrac{\frac{4}{105}}{\frac{1}{14}}=\dfrac{8}{15}$.

3) "$X=15$" لما نسحب $1R_5$ و $3B_0$ ، أي أن : $p(X=15)=\dfrac{C_1^1\times C_4^3}{210}=\dfrac{4}{210}$.

"$X=10$" لما نسحب $1R_7$ و $3B_0$ ، أي أن : $p(X=10)=\dfrac{C_3^1\times C_4^3}{210}=\dfrac{12}{210}$.

"$X=4$" هي الحدث B ، أي أن : $p(X=4)=\dfrac{8}{210}$.

"$X=-5$" هي الحدث A ، أي أن : $p(X=-5)=\dfrac{1}{210}$.

"$X=-1$" هي باقي الحالات ، أي أن : $p(X=-1)=1-\dfrac{(4+12+8+1)}{210}$ و منه : $p(X=-1)=\dfrac{185}{210}$.

– قانون الإحتمال :

X_i	-5	-1	4	10	15
p_i	$\dfrac{1}{210}$	$\dfrac{185}{210}$	$\dfrac{8}{210}$	$\dfrac{12}{210}$	$\dfrac{4}{210}$

– حساب الامل الرياضي :

أي : $E(X)=\sum_{i=1}^{5}(X_i\times p_i)$ و منه $E(X)=\dfrac{-5-185+32+120+60}{210}=\dfrac{22}{210}$: $E(X)=\dfrac{11}{105}$.

حـــــل التمرين الثالث: (00 نقاط)

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3+u_n^2}{1+u_n} \end{cases}$.

1) لبين بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n > 0$.

- لنتحقق من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 1$ ، أي : $1 > 0$ و منه : $u_0 > 0$ (محققة) .
- لنفرض أن : $u_n > 0$ و لنثبت أن : $u_{n+1} > 0$.

لدينا فرضا : $u_n > 0$ أي : $3+u_n^2 > 0$ و $1+u_n > 0$ و منه : $\dfrac{3+u_n^2}{1+u_n} > 0$ ، إذن : $u_{n+1} > 0$.

- و عليه : من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n > 0$.

2) أ) التحقق أن : $3-u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}(3-u_n)$.

لدينا : $3-u_{n+1} = 3-\dfrac{3+u_n^2}{1+u_n}$ أي : $3-u_{n+1} = \dfrac{3+3u_n-3-u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{3u_n-u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$

و منه : $3-u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}(3-u_n)$ و هو المطلوب .

ب) لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $u_n < 3$.

- لنتحقق من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 1$ أي : $1 < 3$ و منه : $u_0 < 3$ (محققة) .
- لنفرض أن : $u_n < 3$ و لنثبت أن : $u_{n+1} < 3$.

لدينا مما سبق أن : $3-u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}(3-u_n)$ ، بما أن : $0 < u_n < 3$ فإن : $3-u_n > 0$ و منه سيكون : $3-u_{n+1} > 0$

إذن : $u_{n+1} < 3$. و عليه : من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n < 3$ و أيضا : $0 < u_n < 3$.

3) لنبين أن المتتالية (u_n) متزايدة :

أي : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{3+u_n^2}{1+u_n}-u_n$ أي : $u_{n+1}-u_n = \dfrac{3+u_n^2-u_n-u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{3-u_n}{1+u_n}$ ، بما أن : $u_n < 3$ فإن : $0 < 3-u_n$ و $1+u_n > 0$

أي أن : $\dfrac{3-u_n}{1+u_n} > 0$ و منه : $u_{n+1}-u_n > 0$ ، إذن المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.

- بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بـــ 3 فهمي متقاربة .

4) أ) لنحسب الفرق $\dfrac{u_n}{1+u_n}-\dfrac{3}{4}$:

$\dfrac{u_n}{1+u_n}-\dfrac{3}{4} = \dfrac{4u_n-3-3u_n}{4(1+u_n)} = \dfrac{u_n-3}{4(1+u_n)}$ و بما أن : $u_n < 3$ فإن : $u_n-3 < 0$ ، إذن : $\dfrac{u_n}{1+u_n}-\dfrac{3}{4} < 0$.

ب) لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $0 < 3-u_n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n (3-u_0)$.

لدينا : $\dfrac{u_n}{1+u_n}-\dfrac{3}{4} < 0$ أي : $\dfrac{u_n}{1+u_n} < \dfrac{3}{4}$ (نضرب الطرفين في $3-u_n$ هذا الأخير موجب تماما) أي تصبح :

$\dfrac{u_n}{1+u_n}(3-u_n) < \dfrac{3}{4}(3-u_n)$ و منه : $3-u_{n+1} < \dfrac{3}{4}(3-u_n)$ و أيضا تكون : $0 < 3-u_{n+1} < \dfrac{3}{4}(3-u_n)$.

*) بتعويض قيم n نجد : $0 < 3-u_1 < \dfrac{3}{4}(3-u_0)$ و $0 < 3-u_2 < \dfrac{3}{4}(3-u_1)$ و $0 < 3-u_3 < \dfrac{3}{4}(3-u_2)$ .... و هكذا

......حتـــى $0 < 3-u_n < \dfrac{3}{4}(3-u_{n-1})$. بالضرب طرف لطرف سيكون :

$$0<(3-u_1)(3-u_2)\times.......\times(3-u_n)<\left(\frac{3}{4}\right)^n(3-u_0)(3-u_1)\times.......\times(3-u_{n-1})$$

بالإختزال نجد : $0<3-u_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n(3-u_0)$ و هو المطلوب .

ج) إستنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا : $0<3-u_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n(3-u_0)$ أي : $0<3-u_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n\times 2$ $(u_0=1)$.

بما أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n\times 2\right]=0$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}(3-u_n)=0$ إذن ستكون : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$.

حــــل التمرين الرابع: (00 نقاط)

I) 1) أ) دراسة إتجاه تغير الدالة g :

لدينا : $g(x)=e^x-x-1$ أي : $g'(x)=e^x-1$ ، لدينا : $e^x-1\geq 0$ أي : $e^x\geq 1$ و منه : $x\geq 0$.

إذن جدول تغيرات الدالة g يكون كالآتي :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty\end{cases}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

ب) مــن جدول التغيرات نلاحظ أن القيمة الحدية الصغرى للدالة g هي 0 ، و منه نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $g(x)\geq 0$.

2) لدينا : $e^x-x-1\geq 0$ أي : $e^x\geq x+1$ و منه : $e^x>x$ ، و هو المطلوب .

II) 1) أ) لنبين أن : $f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$.

لدينا : $f(x)=x^2-2\ln(e^x-x)$ أي : $f(x)=x^2-2\ln\left[e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right]$ أي : $f(x)=x^2-2\left[\ln e^x+\ln(1-xe^{-x})\right]$

و منه : $f(x)=x^2-2x-2\ln(1-xe^{-x})$ ، و هو المطلوب .

ب) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1\underbrace{-xe^{-x}}_{0}\right)=\ln(1)=0\end{cases}$.

2) أ) لنحسب $f'(x)$: $f'(x)=2x-2\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)$ أي : $f'(x)=2\left[x-\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]$ أي : $f'(x)=2\left[\frac{xe^x-x^2-e^x+1}{e^x-x}\right]$

أي : $f'(x)=2\left[\frac{xe^x-e^x-(x^2-1)}{e^x-x}\right]$ أي : $f'(x)=2\left[\frac{e^x(x-1)-(x+1)(x-1)}{e^x-x}\right]$ ،

أي : $f'(x)=2\left[\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{e^x-x}\right]$ و منه : $f'(x)=\frac{2(x-1)\times g(x)}{e^x-x}$ و هو المطلوب .

ب) نعلم أن $e^x>x$ أي : $e^x-x>0$ ، إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-1)\times g(x)$.

و عليه نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول التالـــي :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

و منه جدول تغيرات الدالة f يكون :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) \simeq -0{,}08$

3) أ) لنحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2+2x\right]$ أي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2+2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\ln\left(1-xe^{-x}\right)\right)=0$

لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1)=0\end{cases}$.

التفسير البياني : نستنتج أن القطع المكافئ (P) هو منحني مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي :

لندرس إشارة الفرق : $f(x)-x^2+2x=-2\ln\left(1-xe^{-x}\right)$ ، أولا نقارن بين $1-xe^{-x}$ و 1 أي : $1-xe^{-x}-1=-xe^{-x}$

إذن الإشارة من إشارة $-x$.

و منه : على المجال $]-\infty;0[$ يكون : $1-xe^{-x}>1$ و على المجال $]0;+\infty[$ يكون : $1-xe^{-x}\le 1$.

و بالتالي سنلخص الإشارة و الووضعية النسبية في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln\left(1-xe^{-x}\right)$	$+$	0	$-$
$-2\ln\left(1-xe^{-x}\right)$	$-$	0	$+$
الوضعية النسبية	(C) يقع تحت (P)	(C) يقطع (P) النقطة $O(0;0)$	(C) يقع فوق (P)

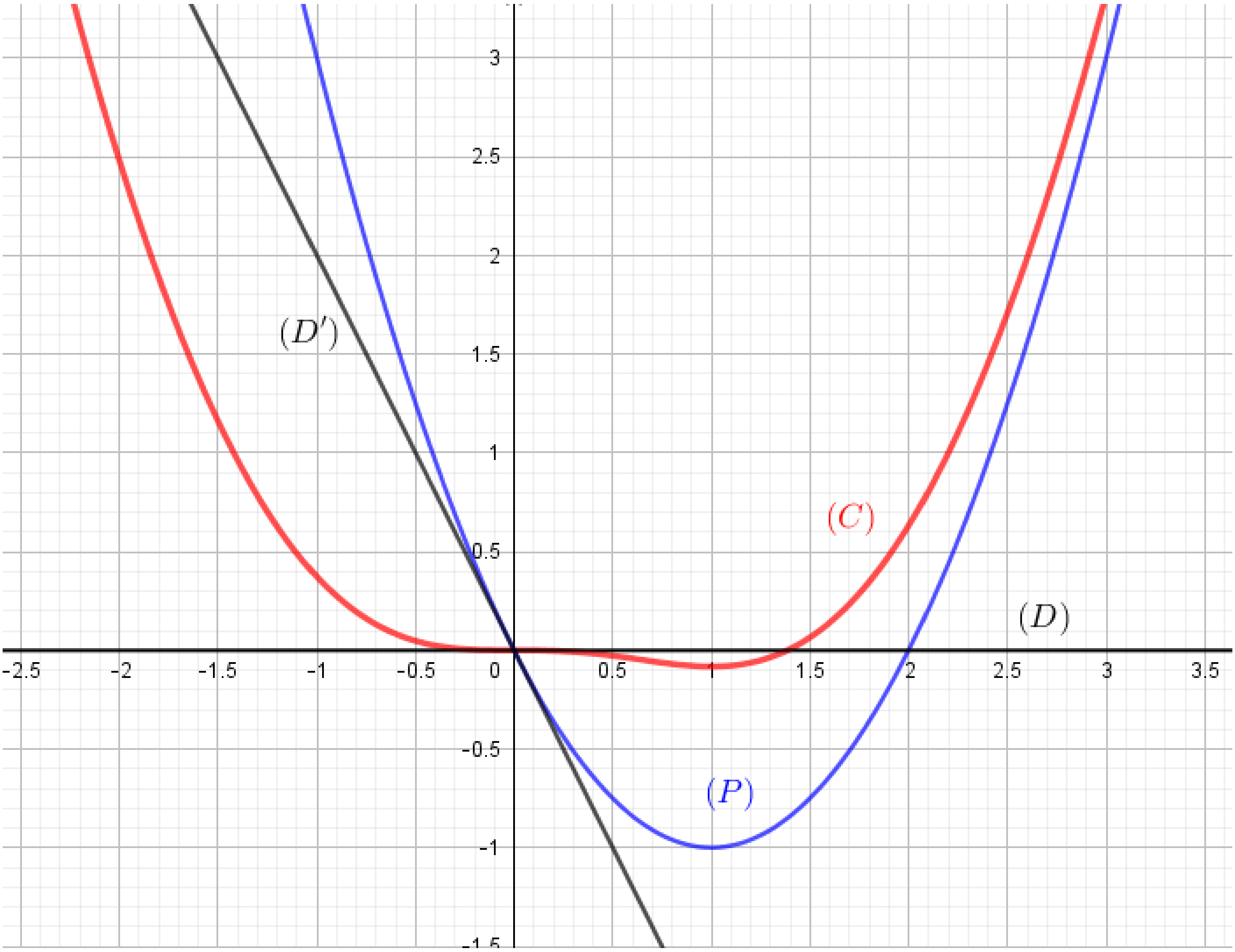
ملاحـــــظة : مبدأ المعلم هو نقطة إنعطـــــاف للمنحني (C) .

4) كتابة معادلة كل من المماسين (D) و (D') :

*) معادلة (D) : $(D): y=0$ ، لأن : $\begin{cases}f'(0)=0\\ f(0)=0\end{cases}$.

*) معادلة (D') : $(D'): y=-2x$ ، لأن : $\begin{cases}h'(0)=-2\\ h(0)=0\end{cases}$ (وضعنا : $h(x)=x^2-2x$) .

5) الإنشــــــــــاء :



حــــــل التمرين الخامس: (00 نقاط) **خاص بالنهائي شعبتي رياضيات و تقني رياضيات**

لدينا : $\begin{cases} u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$.

1) حساب الحدود : $u_2 = 3$ ، $u_3 = 7$ ، $u_4 = 15$ ، $u_5 = 31$ ، $u_6 = 63$.

2) أ) لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = 2u_n + 1$: نستعمل البرهان بالتراجع

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_1 = 2u_0 + 1$ و منه : $u_1 = 1$ (محققة) .

*) لنفرض أن : $u_{n+1} = 2u_n + 1$ و نثبت أن : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 1$.

لدينا فرضا : $u_{n+1} = 2u_n + 1$ أي : $2u_n = u_{n+1} - 1$ و نعلم أن : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ أي تصبح : $u_{n+2} = 3u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$

و منه : $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 1$ و هو المطلوب ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

ب) حسب مبرهنة **بيـــــزو** نستنتج أن : $PGCD(u_{n+1}; u_n) = 1$.

3) أ) لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n = 2^n - 1$: نستعمل البرهان بالتراجع

*) لنتحقق من أجل $n = 0$ ، أي : $u_0 = 2^0 - 1$ و منه : $u_0 = 0$ (محققة) .

*) لنفرض أن : $u_n = 2^n - 1$ و نثبت أن : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

لدينا : $u_{n+1} = 2u_n + 1$ و لدينا فرضا : $u_n = 2^n - 1$ أي : $u_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1$ أي : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1$

و منه : $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ و هو المطلوب ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n = 2^n - 1$.

ب) تعيين $PGCD\left(2^n-1;2^{n+1}-1\right)$:

*) نستنتج أن : $PGCD\left(2^n-1;2^{n+1}-1\right)=PGCD\left(u_{n+1};u_n\right)$ و منه : $PGCD\left(2^n-1;2^{n+1}-1\right)=1$.

4) أ) التحقق أن $u_{n+p}=u_n\left(u_p+1\right)+u_p$:

لنحسب : $u_n\left(u_p+1\right)+u_p=\left(2^n-1\right)\left[\left(2^p-1\right)+1\right]+\left(2^p-1\right)$ أي : $u_n\left(u_p+1\right)+u_p=\left(2^n-1\right)2^p+2^p-1$

أي : $u_n\left(u_p+1\right)+u_p=2^{n+p}-2^p+2^p-1$ و منه : $u_n\left(u_p+1\right)+u_p=2^{n+p}-1$ ، إذن : $u_{n+p}=u_n\left(u_p+1\right)+u_p$.

ب) الإستنتاج : نفرض d قاسما لــ u_n و u_p إذن : d/u_n و d/u_p و منه : $d/u_n\left(u_p+1\right)u_p$ أي أن : d/u_{n+p}

بالعكس نفرض d قاسما لــ u_n و u_{n+p} إذن : $d/u_n\left(u_p+1\right)$ و منه : $d/u_{n+p}-u_n\left(u_p+1\right)$ أي أن : d/u_p .

و عليه فإن كل قاسم لــ u_n و u_p يكون قاسما لــ u_n و u_{n+p} و ايضا كل قاسم لــ u_n و u_{n+p} يكون قاسما لــ u_n و u_p

و منه سيكون : $PGCD\left(u_n;u_p\right)=PGCD\left(u_n;u_{n+p}\right)$.

5) أ) لدينا : $PGCD\left(u_n;u_p\right)=PGCD\left(u_n;u_{n+p}\right)\ ...(1)$ و لدينا أيضا : باقي قسمة a على b هو r أي : $a=b.p+r$

إذن سيكون :

$$PGCD\left(u_b;u_r\right)=PGCD\left(u_b;u_{b+r}\right)=PGCD\left(u_b;u_{2b+r}\right)=PGCD\left(u_b;u_{3b+r}\right)=.....=PGCD\left(u_b;u_{b.q+r}\right)=PGCD\left(u_b;u_a\right)$$

و منه : $PGCD\left(u_b;u_r\right)=PGCD\left(u_a;u_b\right)$.

و حسب خوارزمية إقليدس نعلم أن : $PGCD\left(a;b\right)=PGCD\left(b;r\right)$ حيث : r هو باقي قسمة a على b .

إذن : $PGCD\left(u_a;u_b\right)=PGCD\left(u_b;u_r\right)=PGCD\left(u_r;u_{r_1}\right)=PGCD\left(u_{r_1};u_{r_2}\right)=........=PGCD\left(u_{r_n};u_0\right)$

حيث : r_n هو آخر باقي غير معدوم و بما أن : $u_0=0$ فإن : $PGCD\left(u_a;u_b\right)=PGCD\left(u_{r_n};0\right)$

أي : $PGCD\left(u_a;u_b\right)=u_{r_n}$ و منه : $PGCD\left(u_a;u_b\right)=u_{PGCD(a;b)}$ و هو المطلوب .

آخر باقي غير معدوم هو $PGCD\left(a;b\right)$.

ب) حساب $PGCD\left(u_{2020};u_{1440}\right)$:

- حسب السؤال السابق سيكون : $PGCD\left(u_{2020};u_{1440}\right)=u_{PGCD(2020;1440)}$ و منه : $PGCD\left(u_{2020};u_{1440}\right)=u_{20}$.